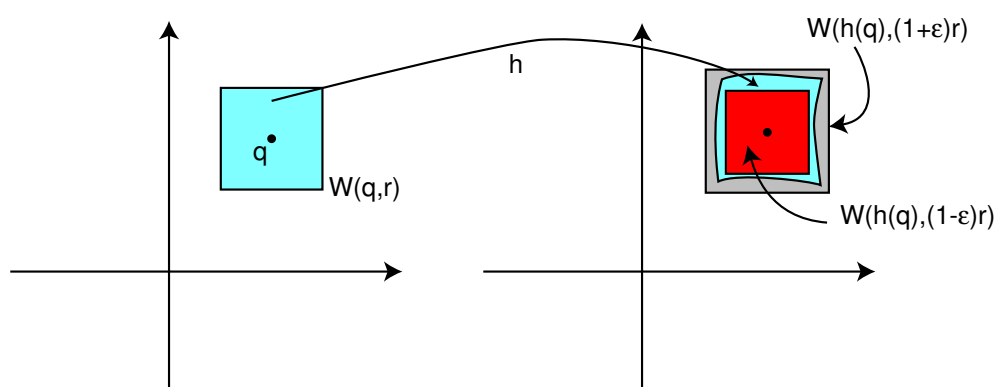


Analysis III

Prof. Dr. Dirk Ferus

Wintersemester 2007/8



Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|------------|
| 1 | Definition des Lebesgueintegrals | 7 |
| 1.1 | Intervalle und Maße | 8 |
| 1.2 | Treppenfunktionen, Nullmengen | 14 |
| 1.3 | Das Integral auf $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ | 20 |
| 1.4 | Das Integral auf $\mathcal{L}^1(\phi)$ | 25 |
| 2 | Die Konvergenzsätze | 27 |
| 2.1 | Der Konvergenzsatz von Beppo Levi | 27 |
| 2.2 | Der Konvergenzsatz von Lebesgue | 34 |
| 3 | Messbare Funktionen | 38 |
| 4 | Sukzessive Integration: Fubini und Tonelli | 42 |
| 5 | Messbare und integrierbare Mengen | 46 |
| 6 | Der Transformationssatz | 53 |
| 6.1 | Nullmengen und Verzerrung durch lineare Abbildungen | 53 |
| 6.2 | Verzerrung durch C^1 -Diffeomorphismen | 59 |
| 6.3 | Der Transformationssatz | 63 |
| 6.4 | Das Lemma von Sard | 68 |
| 7 | Räume integrierbarer Funktionen | 70 |
| 7.1 | Die L^p -Räume | 70 |
| 7.2 | Die Vollständigkeit der L^p -Räume | 74 |
| 8 | Fourierreihen | 78 |
| 8.1 | Lineare Algebra und Geometrie im Hilbertraum | 79 |
| 8.2 | Orthonormalsysteme und Fourierreihen im L^2 | 83 |
| 8.3 | Punktweise Konvergenz | 86 |
| 8.4 | Cesàro-Konvergenz | 92 |
| 8.5 | Rückblick auf das Lebesgueintegral | 98 |
| 9 | Der Satz von Stokes | 101 |
| 9.1 | Alternierende multilineare Algebra | 102 |
| 9.1.1 | Äußeres Produkt | 107 |
| 9.2 | Differentialformen | 111 |
| 9.3 | Die Cartansche oder äußere Ableitung | 116 |
| 9.4 | Potentiale von Differentialformen | 121 |
| 9.5 | Integration von Differentialformen über Ketten | 128 |
| 9.6 | Der Satz von Stokes | 136 |
| 9.7 | Beispiele und Anwendungen | 141 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 9.7.1 | $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und der Fixpunktsatz von Brouwer | 141 |
| 9.7.2 | Der Cauchysche Integralsatz | 147 |
| 10 | Anhang | 152 |
| 10.1 | Sternförmige Mengen | 152 |
| 10.2 | Homotopie und Homologie von Wegen | 158 |
| 10.3 | Klassische Integralsätze | 163 |
| 10.3.1 | Der Hodge-*-Operator | 163 |
| 10.3.2 | Klassische Differentialoperatoren und Integralsätze | 166 |
| 10.3.3 | Harmonische Funktionen | 170 |
| 10.4 | Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten | 173 |
| 10.4.1 | Mannigfaltigkeiten | 173 |
| 10.4.2 | Zerlegung der Eins | 177 |
| 10.4.3 | Orientierung | 178 |
| 10.4.4 | Integration über Mannigfaltigkeiten | 182 |
| 10.4.5 | Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten | 185 |
| 10.4.6 | Der Abbildungsgrad | 189 |
| 10.4.7 | Der Antipodensatz | 192 |
| 10.4.8 | Der Satz von Holditch | 195 |

Literatur

Zur Analysis insgesamt

Barner/Flohr: Analysis II. Walter de Gruyter, Euro 30.-

Theodor Bröcker: Analysis II. Spektrum Akademischer Verlag , Euro 20.-

Gelbaum/Olmsted: Counterexamples in Analysis, Holden-Day 1964

Zum Lebesgueintegral

Alan J. Weir, Lebesgue Integration and Measure, Cambridge 1973 , Euro 37.-

Friedrich Hirzebruch/Winfried Scharlau, Funktionalanalysis, Spektrum Verlag, Euro 15.- (Steilkurs)

F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956

Zu den Differentialformen

Michael Spivak, Calculus on Manifolds, HarperCollins, Euro 48.-

Raoul Bott, Loring W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer Graduate Texts 1982, Euro 60.-

Ilka Agricola/Thomas Friedrich, Globale Analysis, Vieweg 2001, Euro 30.-

Zur Geschichte der Mathematik (und Analysis)

Moritz Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 4 Bände, um 1900

Felix Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Springer-Verlag

N. Bourbaki, Elements of the History of Mathematics, Springer

Zur Geschichte des Satzes von Stokes

Victor J. Katz, The history of Stokes' Theorem, Mathematics Magazine 52 (1979), p146-156

Das griechische Alphabet

| | | |
|----------------|---------------------|----------|
| <i>Alpha</i> | α | <i>A</i> |
| <i>Beta</i> | β | <i>B</i> |
| <i>Gamma</i> | γ | Γ |
| <i>Delta</i> | δ | Δ |
| <i>Epsilon</i> | ϵ | <i>E</i> |
| <i>Zeta</i> | ζ | <i>Z</i> |
| <i>Eta</i> | η | <i>H</i> |
| <i>Theta</i> | θ, ϑ | Θ |

| | | |
|----------------|-----------|-----------|
| <i>Iota</i> | ι | <i>I</i> |
| <i>Kappa</i> | κ | <i>K</i> |
| <i>Lambda</i> | λ | Λ |
| <i>Mu</i> | μ | <i>M</i> |
| <i>Nu</i> | ν | <i>N</i> |
| <i>Xi</i> | ξ | Ξ |
| <i>Omikron</i> | o | <i>O</i> |
| <i>Pi</i> | π | Π |

| | | |
|----------------|-----------------|----------|
| <i>Rho</i> | ρ, ϱ | <i>P</i> |
| <i>Sigma</i> | σ | Σ |
| <i>Tau</i> | τ | <i>T</i> |
| <i>Ypsilon</i> | υ | <i>Y</i> |
| <i>Phi</i> | ϕ, φ | Φ |
| <i>Chi</i> | χ | <i>X</i> |
| <i>Psi</i> | ψ | Ψ |
| <i>Omega</i> | ω | Ω |

1 Definition des Lebesgueintegrals

Wir haben in der Analysis I das Regelintegral für reell- (oder komplex-)wertige Funktionen auf einem Intervall kennen gelernt. Es diente unter anderem zur Flächenberechnung. Will man auch Volumina berechnen, so scheint eine Erweiterung der Integration auf Funktionen von mehreren Variablen wünschenswert. Das werden wir jetzt in Angriff nehmen, gleichzeitig aber das Regelintegral verallgemeinern.

Es gibt verschiedene Integralbegriffe,

- eben das *Regelintegral*, welches Sie im ersten Semester kennengelernt haben,
- das *Riemannsche Integral*, das lange Zeit in den Lehrbüchern der Analysis Standard war, und
- das *Lebesguesche Integral*, das wir in diesem Semester betrachten wollen.

Für Treppenfunktionen, ja für alle „anständigen“ Funktionen, liefern diese Integrale denselben Wert. Sie unterscheiden sich aber hinsichtlich der jeweiligen Menge der „integrierbaren“ Funktionen; diese Menge vergrößert sich bei den obigen drei Integralbegriffen in der angegebenen Reihenfolge.

Aber es ist nicht das Ziel, möglichst „exotische“ Funktionen auch noch integrieren zu können, es geht um andere Vorteile: In vielen Anwendungen der Analysis möchte man Grenzwertprozesse in Funktionenräumen, zum Beispiel im Raum der integrierbaren Funktionen, durchführen. Ein Beispiel aus der Theorie der Differentialgleichungen haben Sie im letzten Semester beim Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf gesehen, andere Beispiele im Zusammenhang mit der Fourier-Entwicklung von Funktionen gaben Lebesgue (um 1900) den Anlass zur Entwicklung seiner Integrationstheorie. Ziel ist, dass unter *möglichst allgemeinen* Voraussetzungen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

gilt, und hier gewinnt das Lebesgueintegral um Längen!

Der wesentliche Unterschied in den Definitionen kommt (jedenfalls bei unserem Zugang) folgendermaßen zustande:

Zunächst definiert man das Integral für Treppenfunktionen auf die offensichtliche Weise. Dann erweitert man es auf Funktionen, die sich durch Treppenfunktionen „gut approximieren“ lassen. Der Unterschied liegt in der Definition von „gut approximieren“.

- Bei den Regelfunktionen betrachtet man Grenzwerte von Folgen von Treppenfunktionen im Sinne *gleichmäßiger Konvergenz*.
- In der Riemannschen Theorie betrachtet man Funktionen, die sich zwischen zwei Treppenfunktionen mit beliebig klein vorgegebener Integraldifferenz einsperren lassen (*Sandwiching*).
- In der Lebesgueschen Theorie schließlich betrachtet man Grenzwerte von *monotonen* Folgen von Treppenfunktionen.

Es gibt verschiedene Zugänge zum Lebesgueintegral. Der hier gewählte basierend auf *Hirzebruch/Scharlau* und *Weir* geht zurück auf Riesz-Nagy (vgl. Literaturliste). Er zielt direkt auf das Integral im \mathbb{R}^n und stellt die Monotonie in den Vordergrund. Das ist jedenfalls für die Analysis angemessen und nach meiner Meinung verständlicher als der (sehr elegante) Zugang über eine axiomatische Maßtheorie.

1.1 Intervalle und Maße

- Wir lernen ein Axiomensystem für Maße auf der Menge aller Intervalle des \mathbb{R}^n kennen. Diese Definition hat allerdings nur provisorischen Charakter. Später werden wir den Maßbegriff auf eine viel größere Familie von Teilmengen des \mathbb{R}^n erweitern.
- Schon im eindimensionalen Fall war die Definition des Integrals für Treppenfunktionen nicht ganz einfach, weil man die Unabhängigkeit von der Darstellung der Treppenfunktion zeigen musste. Den Beweis haben wir damals nur skizziert. In höheren Dimensionen ist das noch viel komplizierter. Wir formulieren und beweisen mit dem Zerlegungslemma ein fundamentales Hilfsmittel für solche Probleme.

Wir beschränken uns nicht auf Flächen- oder Volumenberechnung, sondern betrachten allgemeinere Maße. Stellen Sie sich etwa vor, dass Sie für einen Körper im \mathbb{R}^3 nicht das Volumen, sondern durch Integration einer Dichte seine Masse ermitteln möchte.

Definition 1.

- (i) Wir bezeichnen mit

$$I(\mathbb{R}^n) := \{I \subset \mathbb{R}^n \mid I = I_1 \times \dots \times I_n, I_k \text{ beschränktes Intervall in } \mathbb{R}\}$$

die Menge der *beschränkten Intervalle* im \mathbb{R}^n . Dabei lassen wir auch leere Intervall zu.

Bemerkung: Der Durchschnitt zweier beschränkter Intervalle ist wieder ein beschränktes Intervall.

- (ii) Eine Abbildung $\phi : I(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein *Maß*, wenn sie *additiv, monoton und regulär* ist, d.h. folgende drei Eigenschaften besitzt:

- Additivität: Für alle $I, I_1, I_2 \in I(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$I = I_1 \dot{\cup} I_2 \implies \phi(I) = \phi(I_1) + \phi(I_2).$$

Dabei bezeichnet $\dot{\cup}$ die *disjunkte Vereinigung*.

- Monotonie: Für alle $I, J \in I(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$I \subset J \implies \phi(I) \leq \phi(J).$$

- Regularität¹:

$$\forall I \in I(\mathbb{R}^n) \forall \epsilon > 0 \exists J \in I(\mathbb{R}^n) (J \text{ offen}) \wedge (I \subset J) \wedge (\phi(J) \leq \phi(I) + \epsilon).$$

Aus der Additivität folgt $\phi(\emptyset) = 0$ und mit der Monotonie dann $\phi \geq 0$.

Beispiel 2 (Lebesguemaß). Das *Lebesguemaß* auf \mathbb{R} ist definiert durch

$$\mu_1 : I(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, I \mapsto \mu_1(I) := \begin{cases} 0 & \text{für } I = \emptyset, \\ \sup(I) - \inf(I) & \text{für } I \neq \emptyset \end{cases}.$$

Jedem Intervall wird also seine „Länge“ zugeordnet.

□

¹Der Begriff der Regularität stellt eine Verbindung zur Topologie des \mathbb{R}^n her, der für die Analysis sehr bedeutsam, in der abstrakteren Maßtheorie aber nicht erwünscht ist und dort deshalb nicht auftritt.

Beispiel 3 (Produktmaß). Sind ϕ_1, ϕ_2 Maße auf \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q , so definiert

$$\phi(I_1 \times I_2) := \phi_1(I_1)\phi_2(I_2)$$

für $I_1 \times I_2 \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{I}(\mathbb{R}^p) \times \mathcal{I}(\mathbb{R}^q)$ ein Maß, das *Produktmaß* $\phi = \phi_1 \times \phi_2$.

Insbesondere erhält man das *n-dimensionale Lebesguemaß* μ_n rekursiv durch $\mu_n = \mu_{n-1} \times \mu_1$.

Beweis der Maßeigenschaften. Wir zeigen nur die Additivität, die beiden anderen Eigenschaften sind sehr einfach.

Sei $I = J \dot{\cup} K$ mit $I = I_1 \times I_2$ und entsprechend für J, K . Wir setzen voraus, dass $J \neq \emptyset \neq K$. Dann gilt insbesondere

$$J_q \cup K_q = I_q \quad q = 1, 2. \quad (1)$$

1. Fall: Sei $J_1 \cap K_1 \neq \emptyset$. Wir zeigen zunächst, dass dann

$$J_1 = K_1. \quad (2)$$

Aus Symmetriegründen genügt der Nachweis, dass $J_1 \subset K_1$. Sei also $x_1 \in J_1 \subset I_1$. Nach Voraussetzung gibt es $y_1 \in J_1 \cap K_1$, und dazu ein $y_2 \in K_2 \subset I_2$, so dass also $(y_1, y_2) \in K \subset I$. Nun ist $(x_1, y_2) \in I = J \dot{\cup} K$. Wäre $(x_1, y_2) \in J$, so also $y_2 \in J_2$ und $(y_1, y_2) \in J$ im Widerspruch zu $J \cap K = \emptyset$. Also ist $(x_1, y_2) \in K$ und daher $x_1 \in K_1$ und (2) bewiesen.

Nun folgt wegen $J \cap K = \emptyset$, dass $J_2 \cap K_2 = \emptyset$. Damit ist

$$\begin{aligned} \phi(I) &= \phi_1(I_1)\phi_2(I_2) = \phi_1(I_1)(\phi_2(J_2) + \phi_2(K_2)) \\ &= \phi_1(J_1)\phi_2(J_2) + \phi_1(K_1)\phi_2(K_2) = \phi(J) + \phi(K). \end{aligned}$$

2. Fall: $J_2 \cap K_2 \neq \emptyset$. Beweist man wie den ersten Fall.

3. Fall: $J_1 \cap K_1 = \emptyset = J_2 \cap K_2$. Seien $x_1 \in J_1, y_2 \in K_2$.

Nach (1) ist dann $(x_1, y_2) \in I$, also z.B. $(x_1, y_2) \in J$. Dann ist aber $y_2 \in J_2$. Widerspruch! Dieser Fall kommt nicht vor.

□

Beispiel 4 (Diracmaß). Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Teilmenge, d.h. $\#(M \cap K) < \infty$ für jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}^n$. Dann definiert

$$\delta_M(I) := \#(M \cap I)$$

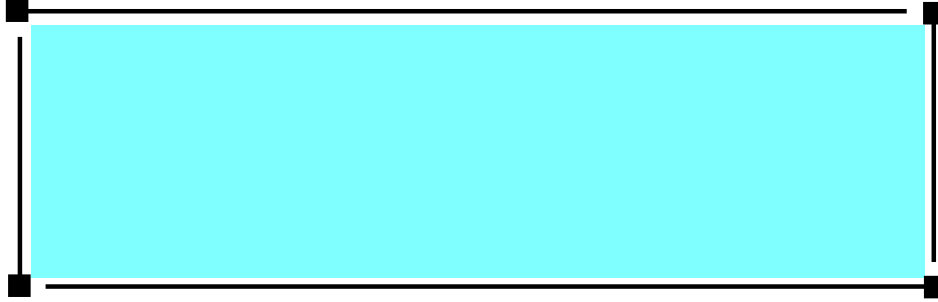
ein Maß. Für $M = \{0\}$ heißt $\delta := \delta_M$ das *Diracmaß in 0*.

□

Satz 5 (Additivitätssatz für Intervalle). Seien $I, I_1, \dots, I_k \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ und I_1, \dots, I_k paarweise disjunkt. Dann gilt:

$$I = \bigcup_{j=1, \dots, k} I_j \implies \phi(I) = \sum_{j=1, \dots, k} \phi(I_j).$$

Das Problem beim Beweis verdeutlicht die folgende Vereinigung von 5(!) Intervallen:



Keine zwei dieser Intervalle bilden vereinigt ein Intervall. Deshalb kann man nicht einfach das Additivitätsaxiom mehrfach anwenden.

Die Lösung bietet eine Zerlegung in kleinere „atomare“ disjunkte Intervalle, in der Abbildung die vier Ecken, die vier offenen Seiten und die offene Rechteckfläche. Daraus kann man erst vertikale „Spalten“ und daraus dann das ganze Intervall so aufbauen, dass man jedesmal das Additivitätsaxiom anwenden kann. Das Maß des ganzen Intervalls, aber auch das Maß jedes der obigen fünf Teilintervalle ist jeweils die Summe der Maße der beteiligten „Atome“.

Erst über der linken unteren Ecke,



dann über dem offenen mittleren Intervall,



dann über der rechten unteren Ecke einen "Turm" aufbauen.



Schließlich die Türme zusammensetzen.



Wir nennen eine Familie $(J_\rho)_{1 \leq \rho \leq m}$ von paarweise disjunkten Intervallen aus $I(\mathbb{R}^n)$ eine *Intervallkette*, wenn

$$\bigcup_{\rho=1}^r J_\rho$$

für jedes $r \in \{1, \dots, m\}$ ein Intervall ist. Nach vollständiger Induktion ist dann für jedes Maß ϕ

$$\phi\left(\bigcup_{\rho=1}^m J_\rho\right) = \sum_{\rho=1}^m \phi(J_\rho).$$

Der Beweis des obigen Satzes wird im wesentlichen reduziert auf das folgende

Lemma 6 (Zerlegungslemma). Seien $I^1, \dots, I^m \in I(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Familie

$$(J_{\rho_1 \dots \rho_n})_{1 \leq \rho_i \leq 4m-1}$$

von $(4m-1)^n$ (zum Teil vielleicht leeren) Intervallen in $I(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die $J_{\rho_1 \dots \rho_n}$ sind paarweise disjunkt.

(ii) Für alle q ist

$$I^q = \bigcup_{I^q \cap J_{\rho_1 \dots \rho_n} \neq \emptyset} J_{\rho_1 \dots \rho_n}.$$

(iii) Definiere für $q \in \{1, \dots, m\}$

$$J_{\rho_1 \dots \rho_n}^q = I^q \cap J_{\rho_1 \dots \rho_n}.$$

(Nach (i), (ii) ist das leer oder $= J_{\rho_1 \dots \rho_n}$.) Definiere weiter für $1 \leq j < n$ und $1 \leq \rho_1, \dots, \rho_j \leq 4m - 1$

$$J_{\rho_1 \dots \rho_j}^q = \bigcup_{\rho_{j+1}, \dots, \rho_n=1}^{4m-1} J_{\rho_1 \dots \rho_j \rho_{j+1}, \dots, \rho_n}^q.$$

Dann ist für alle $1 \leq j \leq n$ und alle $1 \leq \rho_1, \dots, \rho_{j-1} \leq 4m - 1$ die Familie

$$\left(J_{\rho_1 \dots \rho_j}^q \right)_{1 \leq \rho_j \leq 4m-1}$$

eine Intervallkette.

(iv) Ist ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n , so gilt

$$\phi(I^q) = \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n=1}^{4m-1} \phi(J_{\rho_1 \dots \rho_n}^q).$$

Beweis. Wir beweisen (i) - (iii) durch vollständige Induktion über die Dimension n .

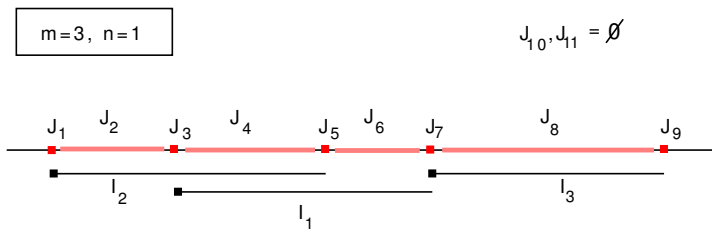
$n = 1$. Seien $a_q := \inf I^q, b_q := \sup I^q$ und

$$\{a_q \mid q \in \{1, \dots, m\}\} \cup \{b_q \mid q \in \{1, \dots, m\}\} = \{J_1, J_3, \dots, J_{2r-1}\}$$

mit

$$J_1 < J_3 < \dots < J_{2r-1}.$$

Das sind $r \leq 2m$ Punkte, weil ja Endpunkte der Intervalle zusammenfallen können. Wir bezeichnen die $r - 1$ offenen Intervalle dazwischen mit $J_{2i} =]J_{2i-1}, J_{2i+1}[$. Wenn wir die J_{2i-1} als einpunktige Intervalle verstehen, haben wir also eine Folge von $2r - 1 \leq 4m - 1$ aneinander anschliessenden disjunkten Intervallen. Wenn es weniger als $4m - 1$ sind, füllen wir durch leere Intervalle auf, setzen also $J_{2r} = \dots = J_{4m-1} = \emptyset$.



Dann ist offenbar $(J_\rho)_{1 \leq \rho \leq 4m-1}$ eine Intervallkette, und es gelten (i) und (ii). Für jedes q ist weiter $(J_\rho^q)_{1 \leq \rho \leq 4m-1}$ eine Intervallkette, die in der Regel mit einigen leeren Intervallen beginnt (und endet), und es ist

$$I^q = \bigcup_{\rho=1}^{4m-1} J_\rho^q.$$

Damit gilt (iii).

$n \rightarrow n + 1$. Sei

$$I^q = \underset{\sim}{I}^q \times \tilde{I}^q$$

mit $\underset{\sim}{I}^q \in I(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde{I}^q \in I(\mathbb{R})$. Wir wählen dazu

- $J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n}$ gemäß der Induktionsvoraussetzung und
- \tilde{J}_ρ wie im Fall $n = 1$.

Damit setzen wir

$$J_{\rho_1 \dots \rho_n \rho_{n+1}} := J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n} \times \tilde{J}_{\rho_{n+1}}.$$

Diese Intervalle erfüllen die Behauptung: Sie sind paarweise disjunkt, weil ihre Faktoren disjunkt sind. Es gilt

$$\begin{aligned} I^q &= I^q \times \tilde{I}^q = \left(\bigcup_{\substack{I^q \cap J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n} \\ \neq \emptyset}} J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n} \right) \times \left(\bigcup_{\tilde{I}^q \cap \tilde{J}_{\rho_{n+1}} \neq \emptyset} \tilde{J}_{\rho_{n+1}} \right) \\ &= \bigcup_{\substack{I^q \cap J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n} \\ \tilde{I}^q \cap \tilde{J}_{\rho_{n+1}} \neq \emptyset}} J_{\sim \rho_1 \dots \rho_n} \times \tilde{J}_{\rho_{n+1}} = \bigcup_{I^q \cap J_{\rho_1 \dots \rho_{n+1}} \neq \emptyset} J_{\rho_1 \dots \rho_{n+1}}. \end{aligned}$$

Die Kettenbedingung (iii) folgt für den letzten Index ρ_{n+1} aus dem Fall $n = 1$ und für die anderen aus der Induktionsvoraussetzung, weil eine Intervallkette eine Intervallkette bleibt, wenn man das Kartesische Produkt ihrer Glieder mit einem festen Intervall bildet.

Damit sind (i) - (iii) bewiesen.

Schließlich gilt (vi) wegen

$$\phi(I^q) = \phi\left(\bigcup_{\rho_1} J_{\rho_1}^q\right) = \sum_{\rho_1} \phi(J_{\rho_1}^q) = \sum_{\rho_1} \phi\left(\bigcup_{\rho_2} J_{\rho_1 \rho_2}^q\right) = \dots = \sum_{\rho_1} \dots \sum_{\rho_n} \phi(J_{\rho_1 \dots \rho_n}^q).$$

□

Beweis des Additivitätssatzes. Wähle zu I, I_1, \dots, I_k eine Familie $(J_{\rho_1 \dots \rho_n})$ wie im Zerlegungslemma. Weil $I = \bigcup I_j$, ist ohne Einschränkung

$$I = \bigcup_{1 \leq \rho_1, \dots, \rho_n \leq 4k-1} J_{\rho_1 \dots \rho_n}.$$

Dann gilt

$$\sum_{j=1}^k \phi(I_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{\rho_1, \dots, \rho_n} \phi(J_{\rho_1 \dots \rho_n}^j) = \phi(I).$$

□

Wir formulieren die Ergebnisse aus Zerlegungslemma und Additionssatz noch einmal in einer "griffigen" Kurzform:

Lemma 7 (Zerlegungslemma, Version 2). *Zu $I_1, \dots, I_k \in I(\mathbb{R}^n)$ gibt es paarweise disjunkte $J_1, \dots, J_r \in I(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:*

Für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ und Maße $\phi : I(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$I_j = \bigcup_{I_j \cap J_\rho \neq \emptyset} J_\rho \quad \text{und} \quad \phi(I_j) = \sum_{I_j \cap J_\rho \neq \emptyset} \phi(J_\rho).$$

Bemerkung. Für $I(\mathbb{R}^n)$ gilt

- (i) $\emptyset \in I(\mathbb{R}^n)$.
- (ii) $I_1, I_2 \in I(\mathbb{R}^n) \implies I_1 \cap I_2 \in I(\mathbb{R}^n)$.
- (iii) Sind $I, J \in I(\mathbb{R}^n)$ mit $J \subset I$, so gibt es (nach dem Zerlegungslemma) paarweise disjunkte Menge $J_1, \dots, J_k \in I(\mathbb{R}^n)$ mit $I \setminus J = \bigcup_{i=1}^k J_k$.

In der Maßtheorie nennt man $I(\mathbb{R}^n)$ dann einen *Semiring* und fragt, unter welchen Voraussetzungen sich eine additive und monotone Funktion auf einem solchen fortsetzen lässt zu einem *Maß* auf der von dem Semiring *erzeugten* σ -*Algebra* - was auch immer das genau bedeuten mag. Vergleiche dazu den Abschnitt 5.

1.2 Treppenfunktionen. Nullmengen

- Die Definition für das Integral von Treppenfunktionen bezüglich eines gegebenen Maßes ist nun kanonisch.
- Mit den Nullmengen eines Maßes lernen wir einen zentralen Begriff der Lebesgueschen Integrationstheorie kennen.
- Wir beweisen ein erstes Lemma über die Integration monotoner Folgen.

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Definition 8 (Charakteristische Funktion und Treppenfunktion).

- (i) Für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ bezeichne

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

die *charakteristische Funktion* mit

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachten Sie:

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$

und insbesondere

$$\chi_{A \dot{\cup} B} = \chi_A + \chi_B.$$

- (ii) Eine Funktion der Form

$$f = \sum_{\mu=1}^m a_\mu \chi_{I_\mu} \tag{3}$$

mit $a_\mu \in \mathbb{R}$, $I_\mu \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ heißt *Treppenfunktion*.

Bemerkungen:

- Die Darstellung ist nicht eindeutig!
- Nach dem Zerlegungslemma 6 gibt es immer eine Darstellung mit paarweise disjunkten I_μ .
- Treppenfunktionen sind beschränkt und haben kompakten Träger. (Der Träger einer reellwertigen Funktion ist die abgeschlossene Hülle der Punktmenge, auf der die Funktion $\neq 0$ ist.)

- (iii) Das ϕ -Integral von f wie in (3) definiert man als

$$\int f d\phi = \sum_{\mu=1}^m a_\mu \phi(I_\mu).$$

Unabhängigkeit von der Darstellung. Sei

$$f = \sum_{\mu=1}^m a_\mu \chi_{I_\mu} = \sum_{\nu=1}^n b_\nu \chi_{K_\nu}.$$

Nach dem Zerlegungslemma existiert eine Familie disjunkter Intervalle J_ρ , so dass

$$I_\mu = \bigcup_{J_\rho \cap I_\mu \neq \emptyset} J_\rho, \quad K_\nu = \bigcup_{J_\rho \cap K_\nu \neq \emptyset} J_\rho.$$

Es folgt

$$f = \sum_{\mu=1}^m a_{\mu} \sum_{J_{\rho} \cap I_{\mu} \neq \emptyset} \chi_{J_{\rho}} = \sum_{\rho} \left(\sum_{J_{\rho} \cap I_{\mu} \neq \emptyset} a_{\mu} \right) \chi_{J_{\rho}} = \sum_{\rho} \left(\sum_{J_{\rho} \cap K_{\nu} \neq \emptyset} b_{\nu} \right) \chi_{J_{\rho}} \quad (4)$$

und nach Satz 5

$$\phi(I_{\mu}) = \sum_{J_{\rho} \cap I_{\mu} \neq \emptyset} \phi(J_{\rho}), \quad \phi(K_{\nu}) = \sum_{J_{\rho} \cap K_{\nu} \neq \emptyset} \phi(J_{\rho}).$$

Weil die J_{ρ} paarweise disjunkt sind, sind die Koeffizienten von $\chi_{J_{\rho}}$ in den beiden letzten Termen von (4) gleich. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^m a_{\mu} \phi(I_{\mu}) &= \sum_{\mu=1}^m a_{\mu} \sum_{J_{\rho} \cap I_{\mu} \neq \emptyset} \phi(J_{\rho}) = \sum_{\rho} \left(\sum_{J_{\rho} \cap I_{\mu} \neq \emptyset} a_{\mu} \right) \phi(J_{\rho}) \\ &= \sum_{\rho} \left(\sum_{J_{\rho} \cap K_{\nu} \neq \emptyset} b_{\nu} \right) \phi(J_{\rho}) = \sum_{\nu=1}^n b_{\nu} \phi(K_{\nu}). \end{aligned}$$

□

Satz 9. Die Treppenfunktionen auf \mathbb{R}^n bilden einen Vektorraum $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$. Das Integral

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int f d\phi$$

ist linear und monoton: $\int f d\phi \leq \int g d\phi$, falls $f \leq g$.

Beweis. Die Vektorraumeigenschaft und die Linearität sind klar nach der Definition.

Zur Monotonie: Sind f und g zwei Treppenfunktionen, so gibt es nach dem Zerlegungssatz eine endliche Menge beschränkter, paarweise disjunkter(!) Intervalle I_1, \dots, I_m , so dass sich f und g schreiben lassen als

$$f = \sum_{i=0}^m \alpha_i \chi_{I_i}, \quad g = \sum_{i=0}^m \beta_i \chi_{I_i}.$$

aus $f \leq g$ folgt $\alpha_i \leq \beta_i$ für alle i und daraus $\int f d\phi \leq \int g d\phi$. □

Definition 10 (Nullmengen). $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt ϕ -Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge (I_k) in $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ gibt, so dass

$$N \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \phi(I_k) < \epsilon.$$

Bemerkung: Wegen der Regularitätseigenschaft gibt es dann auch immer eine solche Folge (I_k) von offenen Intervallen. (Beweis?)

Beispiele 11. (i) Einpunktige Mengen sind μ_n -Nullmengen.

(ii) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist eine δ -Nullmenge, aber $\{0\}$ ist keine δ -Nullmenge. □

Beispiel 12 (Cantormenge). Die Cantormenge C entsteht aus dem Intervall $[0, 1]$, indem man das mittlere Drittel $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ herausnimmt, aus jedem verbleibenden Intervall wieder das mittlere Drittel herausnimmt usw. Durch die Konstruktion ergeben sich endliche Folgen von Intervallen der Gesamtlänge

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \dots$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ läßt sich C also sogar durch nur endlich viele Intervalle einer Gesamtlänge $= (\frac{2}{3})^k < \epsilon$ überdecken. Die Cantormenge ist daher eine μ_1 -Nullmenge. □

Satz 13. *Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.*

Beweis. Seien $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von ϕ -Nullmengen und $N = \bigcup N_i$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ eine Folge $(I_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$, für die $N_i \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_{ij}$ und

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi(I_{ij}) < \frac{\epsilon}{2^{i+1}}.$$

Wir bezeichnen mit $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die ‘‘Diagonalfolge’’

$$I_{00}, I_{10}, I_{01}, I_{20}, I_{11}, I_{02}, I_{30}, I_{21}, I_{12}, I_{03}, \dots$$

Dann ist

$$N = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i \subset \bigcup_{i, j \in \mathbb{N}} I_{ij} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k.$$

Andrerseits ist

$$\sum_{k=0}^m \phi(J_k) \leq \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \phi(I_{ij}) < \sum_{i=0}^m \frac{\epsilon}{2^{i+1}} < \epsilon.$$

Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} \phi(J_k) \leq \epsilon$. □

Beispiele 14. 1. Weil einpunktige Mengen μ_1 -Nullmengen sind, ist die abzählbare Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ eine μ_1 -Nullmenge.

2. Die Cantormenge ist eine überabzählbare μ_1 -Nullmenge. Stellt man nämlich die Zahlen in C im ‘‘Trialsystem‘‘ dar, so erhält man genau die Zahlen der Form $0.a_1a_2a_3 \dots$ mit $a_j \neq 1$ für alle j . Diese Menge ist aber offensichtlich gleichmächtig zur Menge $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ dargestellt im Dualsystem, also überabzählbar. □

Definition 15. Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

- (i) Zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißen ϕ -gleich, wenn es eine ϕ -Nullmenge N gibt, so dass

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus N} = g|_{\mathbb{R}^n \setminus N}.$$

Wir schreiben das als

$$f =_{\phi} g.$$

Analog definiert man $f \leq_{\phi} g$ etc.

- (ii) Eine Folge (f_i) von Funktionen heißt ϕ -konvergent gegen eine Funktion f , wenn es eine ϕ -Nullmenge N gibt, so dass $\lim f_i(x) = f(x)$ für alle $x \notin N$. Wir schreiben das als

$$\lim f_i =_{\phi} f.$$

- (iii) Man sagt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine ϕ -definierte Funktion, wenn f auf dem Komplement einer ϕ -Nullmenge N definiert ist, eigentlich also eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$ ist.

Wenn klar ist, von welchem Maß die Rede ist, sagt man auch einfach „ f und g sind fast-überall gleich“, (f_i) ist „fast-überall konvergent“, f ist „fast-überall definiert“ etc.

In unserem Aufbau der Lebesgueschen Integrationstheorie spielen *monotone* Funktionenfolgen eine wichtige Rolle. Eine einfache Situation beschreibt das folgende Lemma, dessen Beweis erstaunlich schwierig ist.

Lemma 16 (Monotone Nullfolgen von Treppenfunktionen). Sei $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit

- (i) $h_m \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$,
- (ii) $h_m(x) \geq h_{m+1}(x)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n$,
- (iii) $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m =_{\phi} 0$.

Dann gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m d\phi = 0.$$

Beweis. Wegen der Monotonie genügt es zu zeigen: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein m_0 mit

$$\int h_{m_0} d\phi < \epsilon.$$

Sei also $\epsilon > 0$. Wir wählen ein kompaktes Intervall $K \in I(\mathbb{R}^n)$, auf dessen Komplement h_0 und damit jedes h_m verschwinden, und ein $M > 0$ mit $h_0 \leq M\chi_K$.

Zu jedem h_m wählen wir endlich viele paarweise disjunkte Intervalle $J_{m\rho} \subset K$ ($1 \leq \rho \leq r_m$), so dass

$$h_m = \sum_{\rho=1}^{r_m} \alpha_{m\rho} \chi_{J_{m\rho}}$$

und $\bigcup_{\rho=1}^{r_m} J_{m\rho} = K$. Das ist möglich nach dem Zerlegungslemma angewendet auf K und die Konstanzintervalle von h_m .

Damit definieren wir

$$S := \{(m, \rho) \mid \alpha_{m\rho} < \epsilon\}.$$

Sei N eine ϕ -Nullmenge, auf deren Komplement $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0$ ist, und sei dazu $(\tilde{J}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge offener Intervalle mit

$$N \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{J}_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \phi(\tilde{J}_k) < \epsilon.$$

Wir wollen auch die $J_{m\rho}$ durch offene Intervalle ersetzen, um die Kompaktheit von K ausnutzen zu können. Wir wählen dazu für jedes (m, ρ) eine Zahl $\epsilon_{m\rho} > 0$ mit

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\rho=1}^{r_m} \epsilon_{m\rho} < 1,$$

etwa $\epsilon_{m\rho} = \frac{1}{2^{m+\rho+1}}$, und ein *offenes* Intervall $\tilde{J}_{m\rho}$ mit

$$\tilde{J}_{m\rho} \supset J_{m\rho} \text{ und } \phi(\tilde{J}_{m\rho}) - \phi(J_{m\rho}) < \epsilon_{m\rho}\epsilon.$$

Ist $\lim h_m(x) = 0$, so gibt es ein m mit $h_m(x) < \epsilon$, d.h ein $(m, \rho) \in S$ mit $x \in J_{m\rho}$. Andernfalls ist $x \in N$, also enthalten in einem \tilde{J}_k . Daher ist

$$K \subset \left(\bigcup_S \tilde{J}_{m\rho} \right) \cup \left(\bigcup_{\mathbb{N}} \tilde{J}_k \right).$$

Weil K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge $S_0 \supset S$ und ein $l \in \mathbb{N}$, so dass

$$K \subset \left(\bigcup_{S_0} \tilde{J}_{m\rho} \right) \cup \left(\bigcup_{k \leq l} \tilde{J}_k \right) = \left(\bigcup_{S_0} J_{m\rho} \right) \cup \left(\bigcup_{S_0} \tilde{J}_{m\rho} \setminus J_{m\rho} \right) \cup \left(\bigcup_{k \leq l} \tilde{J}_k \right). \quad (5)$$

Sei m_0 das größte der in S_0 vorkommenden m 's und sei $x \in K$.

- Gibt es $(m, \rho) \in S_0$ mit $x \in J_{m\rho}$, so ist $h_{m_0}(x) \leq h_m(x) = \alpha_{m\rho} < \epsilon$.
- Ist x in einer der beiden letzten Teilmengen von (5), so ist jedenfalls $h_{m_0}(x) \leq M$.

Also ist

$$h_{m_0} \leq \underbrace{\epsilon \sum_{S_0} \chi_{J_{m\rho}}}_{\leq \chi_K} + M \sum_{S_0} \chi_{\tilde{J}_{m\rho} \setminus J_{m\rho}} + M \sum_{k \leq l} \chi_{\tilde{J}_k}$$

Mit der Monotonie des Integrals erhalten wir

$$\int h_{m_0} d\phi \leq \epsilon \phi(K) + M \left(\sum \epsilon_{m\rho} \right) \epsilon + M \epsilon < (\phi(K) + 2M) \epsilon.$$

□

Als Folgerung erhalten wir

Lemma 17. Für $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$I \text{ ist } \phi\text{-Nullmenge} \iff \phi(I) = 0.$$

Beweis. Zu (\Leftarrow). Trivial: Überdecke I durch sich selbst und eine Folge leerer Intervalle.

Zu (\Rightarrow). Die Folge $(h_m := \chi_I)_{m \in \mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Folge nicht-negativer Treppenfunktionen, die für alle $x \notin I$ gegen 0 konvergiert. Nach Voraussetzung ist sie also ϕ -konvergent gegen 0. Daher gilt

$$\phi(I) = \int h_m d\phi \rightarrow 0.$$

□

Lemma 18. Sind $f, g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ mit $f =_\phi g$, so ist für jedes Maß ϕ

$$\int f d\phi = \int g d\phi.$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass

$$f = \sum_{\mu} a_{\mu} \chi_{I_{\mu}}, \quad g = \sum_{\mu} b_{\mu} \chi_{I_{\mu}}$$

mit denselben paarweise disjunkten Intervallen. Dann ist

$$\int f d\phi = \sum_{\mu} a_{\mu} \phi(I_{\mu}), \quad \int g d\phi = \sum_{\mu} b_{\mu} \phi(I_{\mu}).$$

Aus $a_{\mu} \neq b_{\mu}$ folgt nach Voraussetzung, dass I_{μ} eine ϕ -Nullmenge ist, nach dem vorstehenden Lemma also $\phi(I_{\mu}) = 0$ gilt. Damit folgt die Behauptung. □

Im Zusammenhang mit der Monotonie werden wir es im folgenden häufig zu tun haben mit dem Supremum von zwei (oder mehr) Funktionen:

Definition 19. Wir definieren

$$\sup(f, g)(x) := \sup(f(x), g(x)).$$

(Man könnte das auch das *Maximum* nennen, ist aber nicht üblich).

Machen Sie sich klar, dass für reelle Zahlen (folgen) gilt

$$a > 0 \quad \implies \quad \sup(a + b, 0) \leq a + \sup(b, 0), \tag{6}$$

$$\sup(a, b) \leq \sup(a, 0) + \sup(b, 0), \tag{7}$$

$$\lim a_i = a \text{ und } \lim b_i = b \quad \implies \quad \lim \sup(a_i, b_i) = \sup(a, b). \tag{8}$$

Lemma 20. Das Lemma 16 gilt auch ohne die Voraussetzung (i).

Beweis. Definiere $g_m := \sup(h_m, 0)$. Die Treppenfunktion g_m entsteht also aus der Treppenfunktion h_m , indem man auf den Konstanzintervallen mit negativem Funktionswert diesen durch 0 ersetzt. Ist $h_m < 0$ auf einem Intervall $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$, so konvergiert $h_m(x)$ wegen der Monotonie für kein $x \in I$ gegen Null. Weil aber $\lim h_m =_\phi 0$, ist I eine ϕ -Nullmenge, d.h.

$$g_m =_\phi h_m$$

und

$$\int g_m d\phi = \int h_m d\phi.$$

Dann erfüllt $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ die Voraussetzungen (i)-(iii) des Lemma 16, und daher ist

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m d\phi = \lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m d\phi.$$

□

1.3 Das Integral auf $\mathcal{L}_+^1(\phi)$

- Wir erweitern nun den Integralbegriff auf Grenzwerte monoton wachsender Folgen von Treppenfunktionen. Weil die Integralfolge dann ebenfalls monoton wachsend ist, muss sie beschränkt sein um zu konvergieren.
- Die so erhaltene Klasse $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ von Funktionen ist sehr groß, sie umfasst insbesondere alle stetigen Funktionen mit kompaktem Träger und im Fall von $\phi = \mu_1$ alle Regelfunktionen.
- Wir untersuchen die elementaren Eigenschaften des Integrals auf der Klasse $\mathcal{L}_+^1(\phi)$.

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Definition 21. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgender Eigenschaft:

Es gibt eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit beschränkter Integralfolge $(\int f_i d\phi)_{i \in \mathbb{N}}$, so dass $\lim f_i =_\phi f$. (9)

Wegen der Monotonie des Integrals auf Treppenfunktionen ist die beschränkte Folge $(\int f_i d\phi)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergent. Wir zeigen, dass der Limes nur von f abhängt und bezeichnen ihn mit

$$\int f d\phi.$$

Wir nennen der Einfachheit halber $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine *(integral)definierende Treppenfunktionsfolge* zu f .

Lemma 22. Seien $(f_i), (g_i)$ monoton wachsende, ϕ -konvergente Folgen von Treppenfunktionen mit beschränkten Integralfolgen und

$$f := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i \leq_\phi \lim_{i \rightarrow \infty} g_i =: g.$$

Dann gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\phi \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \int g_i d\phi.$$

Steht links Gleichheit, so auch rechts, und daraus folgt die gewünschte Unabhängigkeit der Integraldefinition von der Wahl der definierenden Treppenfunktionsfolge.

Beweis. Wegen der Monotonie der Folgen ist

$$f_i \leq_\phi f, g_i \leq_\phi g,$$

Wir wählen $i \in \mathbb{N}$ und definieren

$$h_j = \sup(0, f_i - g_j).$$

Dann ist $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht negativer Treppenfunktionen, und weil $f_i \leq_\phi f \leq_\phi g$, ist

$$\lim_{j \rightarrow \infty} h_j =_\phi \sup(f_i - g, 0) =_\phi 0. \tag{10}$$

Nach Lemma 16 ist daher

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int h_j d\phi \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \int (f_i - g_j) d\phi = \int f_i d\phi - \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j d\phi.$$

Also ist für alle i

$$\int f_i d\phi \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int g_j d\phi.$$

Daraus folgt mit $i \rightarrow \infty$ die Behauptung. \square

Weiter gilt folgendes

Lemma 23. Ist $f \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und $g =_\phi f$, so ist $g \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und

$$\int g d\phi = \int f d\phi.$$

Beweis. Ist (f_i) eine definierende Treppenfunktionsfolge für f , so ist es auch eine solche für g . Daraus folgt die Behauptung. \square

Beispiel 24. Weil \mathbb{Q} eine μ_1 -Nullmenge ist, gilt für die charakteristische Funktion

$$f := \chi_{\mathbb{Q}} =_{\mu_1} 0 \in \mathcal{L}_+^1(\mu_1).$$

Also ist $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu_1)$ und $\int f d\mu_1 = 0$. Dagegen ist $f|_{[0,1]}$ keine Regelfunktion und nicht Riemann-integrierbar. \square

Satz 25. Seien $f, g \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und $a \geq 0$. Dann gilt

(i) $f + g \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und $\int (f + g) d\phi = \int f d\phi + \int g d\phi$.

(ii) $af \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und $\int af d\phi = a \int f d\phi$.

(iii) $f \leq_\phi g \implies \int f d\phi \leq \int g d\phi$.

(iv) $\sup(f, g) \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$.

Beweis. Zu (i) und (ii). Folgen sofort aus der Definition des Integrals für $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ und den entsprechenden Aussagen für Treppenfunktionen.

Zu (iii). Das ist Lemma 22.

Zu (iv). Sind $(f_i)_i$ und $(g_i)_i$ definierende Folgen von Treppenfunktionen zu f und g , so ist

$$\sup(f_0, g_0) \leq \sup(f_1, g_1) \leq \dots$$

eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen(!) mit

$$\lim_i (\sup(f_i, g_i)) =_\phi \sup(f, g).$$

Ist die Integralfolge beschränkt?

$$\begin{aligned} \sup(f_i, g_i) &\stackrel{(7)}{\leq} \sup(f_i, 0) + \sup(0, g_i) = \sup(\underbrace{f_i - f_0}_{\geq 0} + f_0, 0) + \sup(0, \underbrace{g_i - g_0}_{\geq 0} + g_0) \\ &\stackrel{(6)}{\leq} f_i - f_0 + \sup(f_0, 0) + g_i - g_0 + \sup(0, g_0) \\ &= f_i + g_i - \underbrace{(f_0 + g_0 - \sup(f_0, 0) - \sup(0, g_0))}_{=: h_0} = f_i + g_i - h_0. \end{aligned}$$

Daher gilt nach der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen

$$\int \sup(f_i, g_i) d\phi \leq \int f_i d\phi + \int g_i d\phi - \int h_0 d\phi,$$

und mit $(\int f_i d\phi)_i, (\int g_i d\phi)_i$ ist auch diese Integralfolge beschränkt. \square

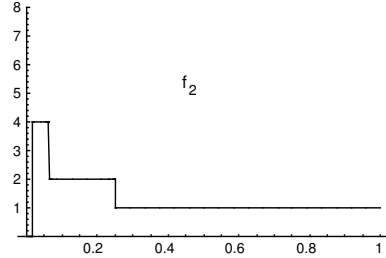
Beispiel 26. $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ ist kein Vektorraum:

Sei $I_j := [\frac{1}{4^{j+1}}, \frac{1}{4^j}[$. Dann definiert

$$f_k := \sum_{j=0}^k 2^j \chi_{I_j}$$

eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit beschränkter μ_1 -Integralfolge

$$\int f_k d\mu_1 = \sum_{j=0}^k 2^j \frac{3}{4^{j+1}} < \frac{3}{2}.$$



Also ist

$$f = \lim f_k = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \chi_{I_j} \in \mathcal{L}_+^1(\mu_1).$$

Dagegen ist $-f \notin \mathcal{L}_+^1(\mu_1)$, weil jede Treppenfunktion nach unten beschränkt und deshalb auf einem Intervall $]0, \frac{1}{4^k}[$ größer als f ist. Daher gibt es keine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, die μ_1 -fast-überall gegen f konvergiert. \square

Satz 27. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt mit kompaktem Träger². Ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f eine ϕ -Nullmenge, so ist $f \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$. Insbesondere sind stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ für jedes Maß ϕ .

Beweis. Sei $K = [-R, R]^n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ ein kompakter Würfel, der den Träger von f enthält, und sei $\text{diam}(K)$ der Durchmesser von K .

Durch i -fache Halbierung in jeder Koordinatenrichtung erhält man 2^{ni} Intervalle vom Durchmesser

$$\left(\frac{1}{2}\right)^i \text{diam}(K),$$

die sich an den Rändern überlappen. Durch Anwendung des Zerlegungslemmas auf die Intervalle der i -ten Stufe erhält man paarweise disjunkte Intervalle

$$J_{i0}, \dots, J_{i r_i}$$

mit folgenden Eigenschaften

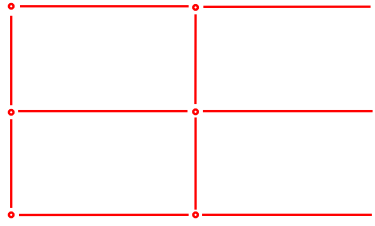
²Der Träger einer Funktion f ist die abgeschlossene Hülle der Punktmenge $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.

(i)

$$K = \bigcup_{j=0}^{r_i} J_{ij}$$

(ii) Für alle j ist

$$\text{diam } J_{ij} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^i \text{diam } K.$$



(iii) Jedes $J_{(i+1)j}$ ist enthalten in einem $J_{ij'}$.

Wir setzen

$$\alpha_{ij} := \inf \{f(x) \mid x \in J_{ij}\} \text{ und } f_i := \sum_{j=1}^{r_i} \alpha_{ij} \chi_{J_{ij}}.$$

Dann ist (f_i) eine Folge von Treppenfunktionen. Wegen (i) und (iii) ist die Folge monoton wachsend. Weiter gilt für alle i

$$f_i \leq \sup_x f(x) \chi_K.$$

Deshalb ist die Integralfolge $(\int f_i d\phi)$ beschränkt durch $\sup_x f(x) \phi(K)$.

Aus der ϵ - δ -Definition der Stetigkeit folgt schließlich mit (i), (ii), dass $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x)$ in allen Stetigkeitspunkten x von f . Also ist nach Voraussetzung $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i =_\phi f$ und $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine definierende Treppenfunktionsfolge für f . \square

Beispiel 28. Der Rand eines Intervalls $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ ist die Vereinigung von endlich vielen $(n-1)$ -dimensionalen Intervallen, also eine μ_n -Nullmenge. Ist daher $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, und setzt man

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in I \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist nach dem vorstehenden Satz $\tilde{f} \in \mathcal{L}_+^1(\mu_n)$.

In diesem Sinne sind also stetige Funktionen auf kompakten Intervallen in $\mathcal{L}_+^1(\mu_n)$. Vergleiche auch Beispiel 67. \square

Satz 29 (Regel- und Lebesgueintegral). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Wir setzen $f(x) := 0$ für $x \notin [a, b]$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu_1)$ und

$$\int f d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis. Sei $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine positive Nullfolge. Nach Definition der Regelfunktionen gibt es dazu eine Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, so dass

$$f_i - \epsilon_i \chi_{[a, b]} \leq f \leq f_i + \epsilon_i \chi_{[a, b]}.$$

Wir definieren Treppenfunktionen

$$g_i := f_i - \epsilon_i \chi_{[a, b]},$$
$$h_i := \sup(g_0, \dots, g_i).$$

Dann ist $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend, und offenbar

$$g_i \leq h_i \leq f \leq \sup(|f|) \chi_{[a, b]}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lim g_i(x) = \lim f_i(x) - \lim \epsilon_i \chi_{[a, b]} = f(x)$$

und daher

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_i(x) = f(x).$$

Die Integralfolge der h_i ist durch $\sup(|f|)(b-a)$ beschränkt. Also ist $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu_1)$, und nach Definition des Regel- und des Lebesgueintegrals ist

$$\int f d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

□

1.4 Das Integral auf $\mathcal{L}^1(\phi)$

- Die Klasse $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ ist zwar sehr groß, aber noch nicht groß genug: Sie ist, wie das Beispiel 26 gezeigt hat, nicht abgeschlossen bezüglich Differenzbildung. Dieses Manko ist leicht zu beheben. Damit ist dann die Definition des Lebesgueintegrals abgeschlossen.

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Definition 30. (i) Wir nennen

$$\mathcal{L}^1(\phi) := \{f - g \mid f, g \in \mathcal{L}_+^1(\phi)\}$$

die Menge der bezüglich ϕ (Lebesgue-)integrierbaren Funktionen.

(ii) Für $h \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und $f, g \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ mit $h = f - g$ definieren wir das Integral von h als

$$\int h d\phi := \int f d\phi - \int g d\phi.$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von (f, g) ist:

Sind $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und gilt

$$f - \tilde{f} \leq_\phi g - \tilde{g},$$

so folgt $f + \tilde{g} \leq_\phi \tilde{f} + g$. Nach Satz 25 ist dann $\int f d\phi + \int \tilde{g} d\phi \leq \int \tilde{f} d\phi + \int g d\phi$ und daher

$$\int f d\phi - \int g d\phi \leq \int \tilde{f} d\phi - \int \tilde{g} d\phi.$$

ϕ -Gleichheit der Funktionen impliziert die Gleichheit der Integrale.

Satz 31. (i) $\mathcal{L}^1(\phi)$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum und

$$\int \dots d\phi : \mathcal{L}^1(\phi) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist linear.

(ii) Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\phi)$ gilt

$$f \leq_\phi g \implies \int f d\phi \leq \int g d\phi.$$

(iii) Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\phi)$ gilt

$$\sup(f, g), \inf(f, g) \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

(iv) Mit $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ ist auch $|f| \in \mathcal{L}^1(\phi)$, und es gilt

$$\left| \int f d\phi \right| \leq \int |f| d\phi.$$

Beweis. Zu (i). dass $\mathcal{L}^1(\phi)$ ein Vektorraum ist, ist klar. Die Linearität ergibt sich leicht aus Satz 25.

Zu (ii). Siehe oben

Zu (iii). Für $f = f_1 - f_2$ mit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ zeigt man durch Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von $f_1 - f_2$:

$$\sup(f, 0) = \underbrace{\sup(f_1, f_2)}_{\in \mathcal{L}_+^1(\phi)} - \underbrace{f_2}_{\in \mathcal{L}_+^1(\phi)} .$$

Also ist $\sup(f, 0) \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Daraus folgt für $f, g \in \mathcal{L}^1(\phi)$

$$\sup(f, g) = \underbrace{\sup(f - g, 0)}_{\in \mathcal{L}^1(\phi)} + \underbrace{g}_{\in \mathcal{L}^1(\phi)} \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Weiter folgt

$$\inf(f, g) = -\sup(-f, -g) \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Zu (iv). Aus (iii) und

$$|f| = \sup(f, 0) + \sup(-f, 0)$$

folgt $|f| \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Aber $-|f| \leq f \leq |f|$, und die Monotonie liefert

$$-\int |f| d\phi \leq \int f d\phi \leq \int |f| d\phi.$$

□

Korollar 32. Seien $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und $g =_\phi f$. Dann gilt $g \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und

$$\int f d\phi = \int g d\phi.$$

Beweis. Sei $f = f_1 - f_2$ mit $f_i \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$. Dann folgt

$$\tilde{f}_1 := g + f_2 =_\phi f + f_2 = f_1.$$

Nach Lemma 23 ist $\tilde{f}_1 \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und daher

$$g = \tilde{f}_1 - f_2 \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Die Gleichheit der Integrale folgt dann aus Punkt (ii) im vorstehenden Satz.

□

2 Die Konvergenzsätze

Die meisten „in der Praxis“ vorkommenden Funktionen sind integrierbar bezüglich aller gängigen Integralbegriffe. Der Vorteil des Lebesgueschen Integrals gegenüber dem Riemannschen oder dem Regelintegral ist sein angenehmes Verhalten bei Grenzwertprozessen im Integranden. Das ist zum Beispiel wichtig, wenn es um die Konvergenz von Approximations- oder Iterationsverfahren geht.

2.1 Der Konvergenzsatz von Beppo Levi

- Der Satz von Beppo Levi über die Integration monotoner Funktionenfolgen ist die erste „Belohnung“ für die mühevollen Integraldefinition.
- Als Anwendungen erhalten wir ein Kriterium für Integrierbarkeit und den Beweis, dass alle Riemann-integrierbaren Funktionen auch Lebesgue-integrierbar sind.
- Das Lemma von Fatou ist ein Grenzwertsatz ohne Monotonievoraussetzung.

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Das folgende Lemma besagt, dass $\mathcal{L}^1(\phi)$ und $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ „nicht so stark von einander abweichen“. Wir werden später beweisen, dass bezüglich einer sehr natürlichen Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^1(\phi)$ der Unterraum $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ dicht ist: die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ ist $\mathcal{L}^1(\phi)$. Im Augenblick benötigen wir das Lemma, um Eigenschaft von $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ auf $\mathcal{L}^1(\phi)$ zu übertragen.

Lemma 33. *Seien $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es $g, h \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $f = g - h$,
- (ii) $h \geq 0$,
- (iii) $\int h d\phi < \epsilon$.

Beweis. Nach Definition von $\mathcal{L}^1(\phi)$ gibt es $g_1, h_1 \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ mit

$$f = g_1 - h_1.$$

Sei (s_i) eine definierende Folge von Treppenfunktionen zu h_1 und $k \in \mathbb{N}$, so dass für das im Lemma vorgegebene ϵ gilt:

$$0 \leq \int h_1 d\phi - \int s_k d\phi < \epsilon.$$

Dann gilt mit $h_2 = h_1 - s_k$, $g_2 = g_1 - s_k$:

$$h_2, g_2 \in \mathcal{L}_+^1(\phi), \quad f = g_2 - h_2, \quad \int h_2 d\phi < \epsilon.$$

Weil die Folge (s_i) monoton wachsend und $\lim s_i =_\phi h_1$, ist

$$h_2 \geq_\phi 0.$$

Das ist fast die Behauptung des Lemmas, nur ist h_2 möglicherweise auf einer ϕ -Nullmenge negativ. Wir setzen daher $h := \sup(h_2, 0) \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ und $g := f + h$. Da diese Funktionen nur

auf einer ϕ -Nullmenge von h_2 und g_2 abweichen, sind sie ebenfalls in $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ und erfüllen die Behauptung. \square

Satz 34 (von Beppo Levi über monotone Konvergenz). *Sei*

$$f_0 \leq_\phi f_1 \leq_\phi f_2 \leq_\phi \dots,$$

eine ϕ -monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}^1(\phi)$ mit beschränkter Integralfolge: Es gibt $A \in \mathbb{R}$ mit

$$\int f_i d\phi \leq A \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dann gibt es $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ mit

$$f =_\phi \lim_{i \rightarrow \infty} f_i,$$

$$\int f d\phi = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\phi.$$

Analoges gilt für ϕ -monoton fallende Folgen: Betrachte $(-f_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass

$$0 = f_0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$$

mit überall geltenden Ungleichungen. Die Folge

$$\tilde{f}_i := \sup(f_0 - f_0, f_1 - f_0, f_2 - f_0, \dots, f_i - f_0)$$

hat nämlich diese Eigenschaften, und es gilt $\tilde{f}_i =_\phi f_i - f_0$ für alle i .

Den Beweis führen wir entsprechend der Definition des Integrals in drei Schritten.

1. Schritt. Seien die f_i Treppenfunktionen. Weil monotone beschränkte Folgen konvergent sind, müssen wir nur zeigen:

$$N := \left\{ x \mid (f_i(x))_i \text{ unbeschränkt} \right\} \text{ ist eine } \phi\text{-Nullmenge.} \quad (11)$$

Dann ist $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ϕ -konvergent, und aus der Definition von $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ folgt der Rest der Behauptung.

Sei $\epsilon > 0$. Wir suchen eine Intervallfolge (I_j) , die N überdeckt und für die $\sum_{j=0}^{\infty} \phi(I_j) < \epsilon$.

Mit der oberen Schranke A für die Integralfolge setzen wir

$$E_i := \left\{ x \mid f_i(x) > \frac{2A}{\epsilon} \right\}.$$

Weil $f_0 = 0$, ist $E_0 = \emptyset$. Wegen der Monotonie von (f_i) ist

$$E_i \subset E_{i+1},$$

und nach Definition von N ist

$$N \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i.$$

Nun ist f_i eine Treppenfunktionen, und E_i deshalb Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle. Also sind die χ_{E_i} und damit die Funktionen $\chi_{E_i \setminus E_{i-1}} = \chi_{E_i} - \chi_{E_{i-1}}$ Treppenfunktionen. Daher gibt es eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und eine

Folge paarweise disjunkter Intervalle $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $I(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\chi_{E_i \setminus E_{i-1}} = \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \chi_{I_j}.$$

Es folgt

$$E_i = \bigcup_{0 \leq j \leq r_i} I_j \quad \text{und} \quad N \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j.$$

Weil $f_i \geq 0$, ist nach Definition von E_i

$$f_i \geq \frac{2A}{\epsilon} \chi_{E_i} = \frac{2A}{\epsilon} \sum_{j=0}^{r_i} \chi_{I_j},$$

und daher

$$A \geq \int f_i d\phi \geq \frac{2A}{\epsilon} \sum_{j=0}^{r_i} \phi(I_j)$$

oder

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi(I_j) \leq A \frac{\epsilon}{2A} < \epsilon.$$

Damit ist (11) bewiesen.

2. Schritt. Seien nun die $f_i \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ mit $f_i \leq f_{i+1}$. Nach Definition von $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ gibt es dann zu jedem i eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen $(s_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_{ij} =_\phi f_i \quad \text{und} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int s_{ij} d\phi = \int f_i d\phi.$$

Die Funktionen

$$s_k := \sup_{i, j \leq k} s_{ij}.$$

sind Treppenfunktion. Offenbar gilt

$$s_k \leq s_{k+1}.$$

Aus der Monotonie und ϕ -Konvergenz von $(s_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ sowie der Monotonie von $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ folgt

$$s_{ij} \leq_\phi f_i \leq f_k \quad \text{für alle } i, j \leq k,$$

und daher

$$s_k \leq_\phi f_k \quad \text{und} \quad \int s_k d\phi \leq \int f_k d\phi \leq A. \quad (12)$$

Nach dem 1. Schritt ist die Folge (s_k) daher ϕ -konvergent gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und $\lim \int s_k d\phi = \int f d\phi$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$f_k \leq_\phi f, \quad (13)$$

dann folgt aus (12) die Behauptung. Für $i \leq k$ ist

$$s_{ik} \leq s_k \leq_\phi f.$$

Für $k \rightarrow \infty$ geht die linke Seite aber fast überall gegen f_i , und damit folgt (13).

3. Schritt. Seien nun die $f_i \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Wir schreiben mit Hilfe von Lemma 33

$$f_i = \sum_{j=1}^i (f_j - f_{j-1}) = \sum_{j=1}^i (g_j - h_j) = \underbrace{\sum_{j=1}^i g_j}_{=: \tilde{g}_i} - \underbrace{\sum_{j=1}^i h_j}_{=: \tilde{h}_i}.$$

Dabei seien $g_j, h_j \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$ mit

$$f_j - f_{j-1} = g_j - h_j, \quad h_j \geq 0, \quad \int h_j d\phi \leq \frac{1}{2^{j+1}}.$$

Weil die $f_j - f_{j-1}$ wegen der vorausgesetzten Monotonie nicht negativ sind, sind mit den h_j auch die $g_j \geq 0$. Dann sind aber $(\tilde{g}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{h}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen von $\mathcal{L}_+^1(\phi)$ -Funktionen mit beschränkten Integralfolgen

$$\int \tilde{h}_i d\phi < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+1}} = 1, \quad \int \tilde{g}_i d\phi = \int \tilde{h}_i d\phi + \int f_i d\phi < 1 + A.$$

Nach dem 2. Schritt sind sie ϕ -konvergent gegen $g \in \mathcal{L}^1(\phi)$ bzw. $h \in \mathcal{L}^1(\phi)$, und die Integrale konvergieren gegen $\int g d\phi$ bzw. $\int h d\phi$.

Damit ist $f_i = \tilde{g}_i - \tilde{h}_i$ für $i \rightarrow \infty$ fast überall konvergent gegen $f := g - h \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und die Integrale konvergieren gegen $\int f d\phi$. \square

Korollar 35 (Integrierbarkeitskriterium). Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Intervallen mit folgenden Eigenschaften

(i) $f \geq_\phi 0$.

(ii) $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$ und $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j = \mathbb{R}^n$.

(iii) Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist

$$f \chi_{I_j} \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

(iv) Die Integralfolge $(\int f \chi_{I_j} d\phi)_{j \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und

$$\int f d\phi = \lim_{j \rightarrow \infty} \int f \chi_{I_j} d\phi.$$

Zusatz: Ist die Integralfolge unbeschränkt, so ist $f \notin \mathcal{L}^1(\phi)$.

Beweis. Die Folge $(f \chi_{I_j})_{j \in \mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen des Beppo Levi, und sie konvergiert überall gegen f . Daraus folgt die Behauptung. Den Zusatz beweisen Sie selbst. \square

Beispiel 36. Konkret betrachten wir

$$f = \frac{1}{x^2} \chi_{[1, \infty[} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

bezüglich $\phi = \mu_1$ und die Intervallfolge $I_j := [-j, j]$. Dann ist $f \chi_{I_j}$ eine Regelfunktion und nach Satz 29 ist

$$\int f \chi_{I_j} = \int_1^j \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^j = 1 - \frac{1}{j} < 1.$$

Es folgt $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$ und

$$\int f d\mu_1 = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1.$$

\square

Korollar 37. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$, $f \geq_\phi 0$ und $\int f d\phi = 0$. Dann ist $f =_\phi 0$.

Beweis. Die Folge $(if)_i$ ist wegen $f \geq_\phi 0$ monoton wachsend und hat eine beschränkte Integralfolge: $\int (if) d\phi = i \int (f) d\phi = 0$. Also ist (if) fast-überall konvergent. Das ist aber nur der Fall, wenn $f =_\phi 0$. \square

Beispiel 38 (Lebesgueintegral und Riemannintegral). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zu jedem $\epsilon > 0$ gebe es Treppenfunktionen g, h , so dass

$$g \leq f \leq h \quad \text{und} \quad \int (h - g) d\mu_1 < \epsilon.$$

Dann hat f kompakten Träger in einem Intervall $[a, b]$, und die vorstehende Bedingung bedeutet gerade, dass f über $[a, b]$ im Sinne von Riemann integrierbar ist.

Man findet (mittels sup- und inf-Bildung) Folgen $(g_i), (h_i)$ von Treppenfunktionen mit

$$g_i \leq g_{i+1} \leq f \leq h_{i+1} \leq h_i \quad \text{und} \quad \int (h_i - g_i) d\mu_1 < \frac{1}{i}.$$

Diese sind nach dem Satz von B. Levi μ_1 -konvergent gegen $g, h \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$ mit

$$g \leq_{\mu_1} f \leq_{\mu_1} h \quad \text{und} \quad \int (h - g) d\mu_1 = 0.$$

Nach dem Korollar ist $g =_{\mu_1} h$, also $f =_{\mu_1} g$ und daher $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$. Weiter folgt

$$\int f d\mu_1 = \int g d\mu_1 = \lim \int g_i d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx.$$

Folgerung: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar im Sinne von Riemann, so ist die außerhalb von $[a, b]$ mit 0 fortgesetzte Funktion \tilde{f} integrierbar bezüglich μ_1 . Kurz: Riemann-integrierbare Funktionen sind Lebesgue-integrierbar und ihr Riemannsches Integral ist gleich dem Lebesgueschen.

Das gilt mit derselben Argumentation auch auf dem \mathbb{R}^n . \square

Aber das Grenzwertverhalten für Folgen integrierbarer Funktionen ist in der Lebesgueschen Theorie viel besser als beim Regel- oder Riemannintegral:

Beispiel 39. Wir betrachten die Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_i := \chi_{[0, 1] \cap \frac{1}{i}\mathbb{Z}}.$$

Also ist $f_i(x) = 1$, wenn $0 \leq x \leq 1$ und $i!x \in \mathbb{Z}$, und sonst = 0. Offenbar gilt

$$f_i \leq f_{i+1} \leq \chi_{[0, 1]}$$

und

$$f := \lim_{i \rightarrow \infty} f_i = \chi_{[0, 1] \cap \mathbb{Q}}.$$

Die f_i sind Treppenfunktionen, insbesondere also Regel- und Riemann-integrierbar. Ihr Grenzwert f ist zwar beschränkt, aber keine Regelfunktion und nicht Riemann-integrierbar. Nach dem Satz von Beppo Levi (oder weil $f =_{\mu_1} 0$) ist f aber bezüglich μ_1 Lebesgue-integrierbar und $\int f d\mu_1 = \lim \int f_i d\mu_1 = 0$. \square

Wenn man im Satz von Beppo Levi auf die Voraussetzung der Monotonie verzichtet, wird die Behauptung falsch, wie das Beispiel der Folge $f_i = (-1)^i \chi_{[0, 1]} \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$ zeigt. Setzt man aber schon voraus, dass die Folge $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von $\mathcal{L}^1(\phi)$ -Funktionen fast überall gegen eine Funktion f konvergiert, so kann man fragen, unter welchen Voraussetzungen $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ ist und was man über $\int f d\phi$ weiß. Eine Antwort darauf gibt das folgende Lemma von Fatou, eine andere der Konvergenzsatz von Lebesgue im nächsten Abschnitt.

Um diesen Themenkreis aber wirklich gut zu verstehen, müßte man Beispiele haben, in denen die Grenzfunktion *nicht* integrierbar ist. Nichtintegrierbarkeit kann grob gesprochen drei Ursachen haben:

- Die Funktion ist “zu unbeschränkt”, ihre Werte werden zu groß.
- Die Funktionswerte für großes $\|x\|$ gehen nicht schnell genug gegen 0.
- Die Funktion ist zu “zappelig”, zu irregulär.

Die Folgen $(\frac{1}{x} \chi_{[\frac{1}{i+1}, 1]})_{i \in \mathbb{N}}$ oder $(\chi_{[-i, i]})_{i \in \mathbb{N}}$ liefern Grenzfunktionen, die aus dem ersten oder zweiten Grund nicht μ_1 -integrierbar sind. Nicht integrierbare Funktionen der dritten Art, also nicht integrierbare *beschränkte* reelle Funktionen *mit kompaktem Träger* sind außerordentlich schwierig zu finden. Vergleichen Sie dazu Beispiel 74.

Satz 40 (Lemma von Fatou). Sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge **nicht negativer** Funktionen in $\mathcal{L}^1(\phi)$ mit beschränkter Integralfolge

$$\int f_i d\phi \leq A.$$

Sie sei ϕ -konvergent gegen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und

$$\int f d\phi \leq \liminf \int f_i d\phi \leq A.$$

Beweis. Zunächst ist die Folge

$$g_i := \inf(f_0, f_1, \dots, f_i)$$

monoton fallend und $g_i \geq_\phi 0$. Also ist die Integralfolge beschränkt, und nach dem Satz von Beppo Levi ist die Folge ϕ -konvergent gegen die integrierbare Funktion

$$h_0 := \inf(f_0, f_1, \dots) \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Nach demselben Argument sind die Funktionen

$$h_i := \inf(f_i, f_{i+1}, \dots)$$

integrierbar, und sie bilden eine monoton wachsende Folge. Wegen $h_i \leq f_i$ ist die Integralfolge der h_i durch A nach oben beschränkt, und nach dem Satz von Beppo Levi ist h_i ϕ -konvergent gegen eine Funktion $h \in \mathcal{L}^1(\phi)$ mit $\int h d\phi \leq A$. Andererseits ist außerhalb einer ϕ -Nullmenge

$$f(x) = \lim f_i(x) = \liminf f_i(x) = h(x).$$

Also ist $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und $\int f d\phi \leq A$.

Ist weiter $B := \liminf \int f_i d\phi$, so gibt es eine Teilfolge (f_{i_k}) , für die $B = \lim_k \int f_{i_k} d\phi$. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Teilfolge (f_{i_k}) mit $\int f_{i_k} d\phi \leq B + \epsilon$ für alle k . Weil auch $\lim_k f_{i_k} =_\phi f$, folgt nach dem oben Bewiesenen

$$\int f d\phi \leq B + \epsilon$$

für jedes $\epsilon > 0$ und daraus

$$\int f d\phi \leq B = \liminf \int f_i d\phi.$$

□

Beispiel 41. Betrachten Sie $(f_i = \chi_{[i, i+1]})_{i \in \mathbb{N}}$ bezüglich μ_1 .

□

2.2 Der Konvergenzatz von Lebesgue

- Dieses ist neben Beppo Levi und Fatou der dritte wichtige Konvergenzatz der Lebesgueschen Theorie.
- Als Anwendung erhalten wir einen oft benutzten Satz über die Differentiation von Integralen nach einem Parameter im Integranden. Wir untersuchen auch die Notwendigkeit der dabei gemachten Voraussetzungen.
- Eine Anwendung des Differentiationssatzes ist die “Glättung” stetiger Funktionen durch Faltung mit einer geeigneten “Kernfunktion”. (Gleitender Mittelwert)

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Satz 42 (von Lebesgue über dominierte Konvergenz). Sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(\phi)$, die durch eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\phi)$ dominiert wird:

$$|f_i| \leq_\phi g \quad \text{für alle } i.$$

Weiter sei die Folge ϕ -konvergent gegen eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f =_\phi \lim_{i \rightarrow \infty} f_i.$$

Dann folgt

$$f \in \mathcal{L}^1(\phi) \quad \text{und} \quad \int f d\phi = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\phi.$$

Beweis. Die Folgen $(g + f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(g - f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\phi)$ erfüllen die Voraussetzungen des Lemmas 40 von Fatou (mit $A = 2 \int g d\phi$).

Nach dem Lemma ist $g \pm f \in \mathcal{L}^1(\phi)$, also auch $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$, und es gilt

$$\liminf \int (g + f_i) d\phi \geq \int (g + f) d\phi \quad \text{und} \quad \liminf \int (g - f_i) d\phi \geq \int (g - f) d\phi.$$

Daher ist

$$\liminf \int f_i d\phi \geq \int f d\phi \tag{14}$$

und

$$-\limsup \int f_i d\phi = \liminf \int (-f_i) d\phi \geq - \int f d\phi.$$

oder

$$\limsup \int f_i d\phi \leq \int f d\phi. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgt

$$\lim \int f_i d\phi = \int f d\phi.$$

□

Auf die Majorante kann man nicht verzichten:

Beispiel 43. Die Funktionenfolge $((i + 1)^2 \chi_{]0, \frac{1}{i+1}[})_{i \in \mathbb{N}}$ von μ_1 -integrierbaren Funktionen konvergiert überall gegen 0, die Grenzfunktion ist integrierbar, aber die Integralfolge konvergiert nicht. Die Funktionenfolge ist nicht $\mathcal{L}^1(\mu_1)$ -dominiert.

□

Satz 44 (Differentiation unter dem Integral). Sei

$$f : \mathbb{R}^n \times]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(x, t) =: f_t(x).$$

Es gelte:

- (i) Für alle $t \in]a, b[$ ist $f_t \in \mathcal{L}^1(\phi)$.
- (ii) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $t \mapsto f(x, t)$ differenzierbar.
- (iii) Es gibt $g \in \mathcal{L}^1(\phi)$, so dass $|\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)| \leq_\phi g$ für alle $t \in]a, b[$.³

Dann ist

$$F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int f_t d\phi \quad \text{differenzierbar,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\phi) \quad \text{für jedes } t \in]a, b[$$

und

$$\frac{d}{dt} \int f_t d\phi = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) d\phi.$$

Beweis. Wir setzen

$$F(t) := \int f_t d\phi.$$

Sei (t_i) eine gegen t konvergente Folge in $]a, b[\setminus \{t\}$. Dann ist

$$\frac{1}{t_i - t} (F(t_i) - F(t)) = \int \underbrace{\frac{f_{t_i} - f_t}{t_i - t}}_{\in \mathcal{L}^1(\phi)} d\phi \tag{16}$$

Nun ist für fast alle x

$$\left| \frac{f_{t_i} - f_t}{t_i - t}(x) \right| = \left| \frac{f(x, t_i) - f(x, t)}{t_i - t} \right| \stackrel{MWS}{=} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_i^*) \right| \leq g(x).$$

Also ist nach dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{f_{t_i} - f_t}{t_i - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\phi)$$

und

$$\frac{dF}{dt}(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \frac{f_{t_i} - f_t}{t_i - t} d\phi = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) d\phi.$$

□

Konvention. Wir schreiben

$$\int f \chi_{]a, b[} d\mu_1 = \int_a^b f(x) dx,$$

falls die linke Seite existiert. Das ist sinnvoll, weil das Lebesgueintegral das Riemannintegral erweitert.

³Das ist zum Beispiel erfüllt, wenn $|\frac{\partial f}{\partial t}| \leq M \chi_K$ für ein $M \in \mathbb{R}$ und kompaktes $K \in I(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 45. Wichtige Beispiele, in denen die Differentiation nach einem Parameter unter dem Integral eine Rolle spielen, liefern

- die Gammafunktion $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $x > 0$,
- die Laplacetransformation $F(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$.

(Beachten Sie hier die (traditionelle) Namensgebung für die Variablen.)

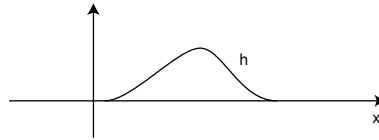
□

Aber nicht immer kann man die Ableitung nach einem Parameter in das Integral hineinziehen:

Beispiel 46 (Boris Springborn).

Wir betrachten eine stetig differenzierbare nicht negative Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und $c := \int h d\mu_1 > 0$. Dazu betrachten wir die “von rechts kommende Welle”

$$f(x, t) := th\left(x - \frac{1}{t}\right), \quad f(x, 0) := 0.$$



Dann existieren

$$\int f(\cdot, t) d\mu_1 = tc \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \begin{cases} h\left(x - \frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t} h'\left(x - \frac{1}{t}\right) & \text{für } t \neq 0, \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Für den zweiten Fall beachte, dass

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x, t) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} h\left(x - \frac{1}{t}\right) = 0,$$

weil h kompakten Träger hat. Die partielle Ableitung ist für alle t bezüglich x integrierbar, und es ist

$$\int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, 0) d\mu_1 = \int 0 d\mu_1 = 0 \neq c = \frac{d}{dt} \int f(\cdot, t) d\mu_1.$$

Also kann man die t -Ableitung nicht in das Integral hineinziehen.

□

Beispiel 47 (Glättungsoperator, Faltung). Sei $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-negativ, stetig differenzierbar mit Träger in einem (kleinen) Intervall $[-\delta, \delta]$ und $\int \rho d\mu_1 = 1$. (Vergleichen Sie den Abschnitt 4.3 im Skriptum zur Analysis I. Zum Beispiel kann man definieren

$$\rho(x) = \frac{\tau(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \tau d\mu_1}$$

wobei $\tau(x) := \exp\left(\frac{1}{x^2 - \delta^2}\right)$ für $x^2 < \delta^2$ und $\tau(x) = 0$ sonst.)

Der besseren Übersicht wegen benutzen wir im folgenden die oben gemachte Konvention

$$\int_a^b f(x) dx := \int f(x) \chi_{[a, b]} d\mu_1.$$

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$ definieren wir dann die *Faltung* mit ρ als

$$\tilde{f}(t) := f * \rho(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(t-x) dx = \int_{t-\delta}^{t+\delta} f(x)\rho(t-x) dx.$$

Wir erhalten also \tilde{f} aus f durch gleitende, gewichtete Mittelung der Funktionswerte um jede Stelle t .

Das setzt natürlich voraus, dass $x \mapsto f(x)\rho(t-x) \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$. Wir werden später sehen, dass das wahr ist, vgl. Beispiel 51 und Satz 54.

Offenbar ist $t \mapsto f(x)\rho(t-x)$ für jedes x differenzierbar und es gilt

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(x)\rho(t-x) \right| \leq (\sup_{t \in \mathbb{R}} |\rho'(t)|) |f(x)| \in \mathcal{L}^1(\mu_1).$$

Daher ist \tilde{f} nach dem Satz differenzierbar und

$$\tilde{f}'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho'(t-x) dx.$$

Bemerkung: Ist f gleichmäßig stetig und $\epsilon > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(t)| < \epsilon$, falls $|t - x| < \delta$. Wähle zu δ ein entsprechendes ρ . Dann hat man für alle t

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t-x) dx = 1, \text{ also } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\rho(t-x) dx.$$

Weil $\rho(t-x) = 0$ für $|t-x| \geq \delta$ gilt weiter, dass

$$\begin{aligned} |f(t) - \tilde{f}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\rho(t-x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho(t-x) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(x)|\rho(t-x) dx \\ &\leq \int_{t-\delta}^{t+\delta} |f(t) - f(x)|\rho(t-x) dx \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Gleichmäßig stetige Funktionen lassen sich also gleichmäßig durch differenzierbare Funktionen approximieren. □

3 Messbare Funktionen

- Wir lernen mit den messbaren Funktionen eine Klasse von Funktionen kennen, die gegenüber algebraischen Operationen wie gegenüber der ϕ -Konvergenz abgeschlossen ist, in der man also erstaunlich sorglos rechnen kann, die andererseits aber ganz nah an der Klasse der integrierbaren Funktionen liegt:
- Die Nichtintegrierbarkeit einer Funktion kann zwei Gründe haben: Die Funktion ist "zu groß", so dass das "Integral" unendlich wird. Oder die Funktion ist so "zappelig", dass das "Integral" völlig sinnlos ist. Messbare Funktionen sind solche, die nur aus dem ersten Grund nicht integrierbar sind. Wenn man sie geeignet "kupiert", werden sie integrierbar, vgl. Satz 57.

Definition 48. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ϕ -messbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die ϕ -konvergent gegen f ist.

Beispiel 49. $\mathcal{L}^1(\phi)$ -Funktionen sind ϕ -messbar. □

Im Gegensatz zur Integrierbarkeit ist Messbarkeit eine „lokale“ Eigenschaft:

Satz 50. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f \text{ messbar} \iff \forall I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \ f \chi_I \text{ messbar.}$$

Beweis. Zu (\Rightarrow). Ist $\lim s_j =_\phi f$, so folgt $\lim s_j \chi_I =_\phi f \chi_I$ für jedes $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$.

Zu (\Leftarrow). Sei $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter beschränkter Intervalle mit $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=0}^\infty I_j$. Weil $f \chi_{I_j}$ messbar ist, gibt es eine Folge $(s_{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen und eine ϕ -Nullmenge N_j mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{jk}(x) \chi_{I_j}(x) = f(x) \chi_{I_j}(x) \text{ für alle } x \notin N_j.$$

Definiere die ϕ -Nullmenge $N := \bigcup N_j$ und

$$s_k := \sum_{j=0}^k s_{jk} \chi_{I_j}.$$

Ist $x \in I_l \setminus N$ und $k \geq l$, so ist

$$s_k(x) = s_{lk}(x) \rightarrow f(x).$$

Damit ist f ϕ -meßbar. □

Beispiel 51. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Komplement einer ϕ -Nullmenge stetig, so ist f ϕ -messbar.

Beweis. Sei $W \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ ein beschränktes Intervall vom Durchmesser A . Nach Satz 50 müssen wir nur zeigen, dass $f \chi_W$ ϕ -messbar ist. Wir zerlegen W durch sukzessive Seitenhalbierung und Anwendung des Zerlegungslemmas in paarweise disjunkte Intervalle I_{k1}, \dots, I_{kr_k} vom Durchmesser $< \frac{A}{2^k}$ und wählen $x_{kj} \in I_{kj}$. Dann definiert

$$f_k := \sum_{j=1}^{r_k} f(x_{kj}) \chi_{I_{kj}}$$

eine Folge von Treppenfunktionen, die in allen Stetigkeitspunkten von f gegen f konvergiert. □

Beispiel 52. Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, so existieren in jedem Punkt der links- und der rechtsseitige Funktionslimes, d.h. alle Unstetigkeitsstellen sind Sprungstellen. In dem kompakten Intervall $[a, b]$ hat f höchstens n Sprungstellen mit Sprung $\geq \frac{|f(b)-f(a)|}{n}$, also in dem kompakten Intervall und dann auch auf ganz \mathbb{R} höchstens abzählbare viele Unstetigkeitsstellen. Also sind monotone Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich μ_1 messbar. □

Die folgenden Sätze 53 und 56 zeigen, dass der Begriff der *Messbarkeit* flexibler ist als der der *Integrierbarkeit*. Weil andererseits diese Begriff aber eng zusammenhängen (vgl. Sätze 54 und 57), sind die messbaren Funktionen ein hilfreiches Instrument in der Integrationstheorie.

Satz 53. (i) Die ϕ -messbaren Funktionen bilden einen \mathbb{R} -Vektorraum.

(ii) Der Raum der ϕ -messbaren Funktionen ist abgeschlossen bezüglich endlicher Produkte und endlicher inf- bzw. sup-Bildung.

(iii) Der Quotient von ϕ -messbaren Funktionen ist ϕ -messbar, wenn der Nenner nur auf einer ϕ -Nullmenge verschwindet.

(iv) Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ϕ -messbar und $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall J mit $f(\mathbb{R}^n) \subset J$, so ist $h \circ f$ ebenfalls ϕ -messbar.

Beweis. Zu (i) und (ii). Es ist klar, dass die Treppenfunktionen einen gegen Multiplikation, inf und sup abgeschlossenen Vektorraum bilden. Daraus folgt unmittelbar dasselbe für die ϕ -messbaren Funktionen.

Zu (iii). Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fast-überall $\neq 0$. Sei (s_i) eine Folge von Treppenfunktionen, die fast-überall gegen f konvergiert. Definiere

$$t_i(x) := \begin{cases} \frac{1}{s_i(x)}, & \text{falls } s_i(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, die fast-überall gegen $\frac{1}{f}$ konvergiert.

Zu (iv). Ich führe den Beweis nur für den Spezialfall

$$J = [a, b[\text{ mit } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Es ist dann klar, wie die anderen Fälle gehen. Sei also (s_i) eine Folge von Treppenfunktionen, die auf dem Komplement der ϕ -Nullmenge N gegen f konvergiert. Beachten Sie, dass zu jedem $x \notin N$ ein i_0 existiert, so dass $s_i(x) < b$ für alle $i \geq i_0$. Wir wählen ein $b' \in]a, b[$ und definieren

$$\tilde{s}_i(x) := \begin{cases} s_i(x), & \text{falls } s_i(x) \in J \\ b', & \text{falls } s_i(x) \geq b \\ a, & \text{falls } s_i(x) < a. \end{cases}$$

Das liefert eine Funktionsfolge, die ebenfalls auf $\mathbb{R}^n \setminus N$ gegen f konvergiert, und deren Werte in J liegen. Die Funktionen $h \circ \tilde{s}_i$ konvergieren wegen der Stetigkeit von h dann auf dem Komplement von N gegen $h \circ f$, und sie sind „beinahe“ Treppenfunktionen, nur haben sie im allgemeinen keinen kompakten Träger. Aber die Funktionen

$$f_i := \chi_{[-i, i]^n} h \circ \tilde{s}_i$$

bilden eine Folge von *Treppenfunktionen*, die überall dort gegen $h \circ f$ konvergiert, wo $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen f konvergiert. \square

Satz 54 (Messbarkeit und Integrierbarkeit 1). Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen. f sei ϕ -messbar und $g \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Dann gilt

$$(i) \quad |f| \leq_\phi g \implies f \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

$$(ii) \quad f \text{ beschränkt} \implies fg \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Beweis. Zu (i). Wir nehmen zunächst an, dass $f \geq 0$. Sei $f =_\phi \lim s_i$ für eine Folge von Treppenfunktionen (s_i) . Wir können o.E. annehmen, dass die $s_i \geq 0$. Dann ist

$$f =_\phi \lim(\inf(s_i, g)),$$

mit $\inf(s_i, g) \in \mathcal{L}^1(\phi)$, $0 \leq \inf(s_i, g) \leq g$. Also ist nach dem Satz von Lebesgue $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$.

Ist f beliebig, so gilt

$$f = \sup(f, 0) - \sup(-f, 0),$$

wobei beide Summanden durch g dominiert werden. Weil $\sup(f, 0)$, $\sup(-f, 0) \geq 0$ sind sie nach dem vorstehenden Beweis in $\mathcal{L}^1(\phi)$, also ist auch ihre Differenz ϕ -integrierbar.

Zu (ii). fg ist messbar und $|fg| \leq \underbrace{\sup |f|}_{< \infty} |g|$. Mit g ist auch $|g| \in \mathcal{L}^1(\phi)$, und deshalb folgt

die Behauptung aus Teil (i). \square

Beispiel 55. Die Aussage (ii) liefert ein hinreichendes Kriterium für die Integrierbarkeit des Produktes zweier integrierbarer Funktionen.

Beachten Sie dagegen, dass $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{]0,1]} \in \mathcal{L}^1(\mu_1)$, aber $f^2(x) = \frac{1}{x} \chi_{]0,1]} \notin \mathcal{L}^1(\mu_1)$.

\square

Satz 56. Seien (f_i) eine Folge ϕ -messbarer Funktionen und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(i) \quad f =_\phi \lim f_i \implies f \text{ ist } \phi\text{-messbar.}$$

$$(ii) \quad f = \sup(f_0, f_1, \dots) \implies f \text{ ist } \phi\text{-messbar.}$$

$$(iii) \quad f = \inf(f_0, f_1, \dots) \implies f \text{ ist } \phi\text{-messbar.}$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung (i) zu beweisen, weil z.B.

$$\inf(f_0, f_1, \dots) = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf(f_0, \dots, f_k)$$

Das Infimum endlich vieler messbarer Funktionen f_0, \dots, f_k ist aber nach Satz 53 messbar.

1. Fall: $|f_i| \leq 1$ für alle i . Wegen Satz 50 müssen wir nur zeigen, dass $f \chi_I$ für jedes $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ messbar ist.

Sei also $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 54 (ii) gilt für alle i

$$f_i \chi_I \in \mathcal{L}^1(\phi) \quad \text{und} \quad |f_i \chi_I| \leq \chi_I \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Nach dem Satz von Lebesgue ist daher

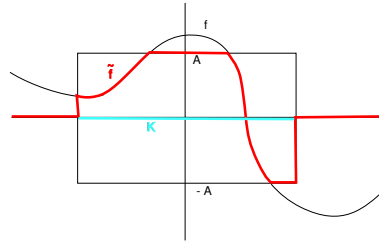
$$f \chi_I = \phi \lim_{i \rightarrow \infty} (f_i \chi_I) \in \mathcal{L}^1(\phi).$$

Insbesondere ist $f \chi_I$ messbar.

2.Fall: f_i beliebig. Nach Satz 53 ist $(\tanh f_i)$ eine Folge messbarer Funktionen, die ϕ -konvergent ist gegen $\tanh f$. Nach dem 1. Fall ist $\tanh f$ messbar. Dann ist aber auch $f = \tanh^{-1} \circ \tanh \circ f$ messbar. \square

Bemerkung. Langsam sehnt man sich nach einem Beispiel einer nicht messbaren Funktion. Solche sind sehr schwer anzugeben, vgl. Beispiel 74. Alle "halbwegs anständigen" Funktionen sind messbar.

Durch „vertikales und horizontales Stützen“ wird aus einer messbaren Funktion f eine integrierbare Funktion \tilde{f} , und das ist charakteristisch für messbare Funktionen:



Satz 57 (Messbarkeit und Integrierbarkeit 2). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann ϕ -messbar, wenn für jedes $A > 0$ und jedes $K \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ die „gestutzte“ Funktion

$$\tilde{f} = \inf(\sup(f, -A\chi_K), +A\chi_K)$$

in $\mathcal{L}^1(\phi)$ ist.

Beweis. Zu (\Rightarrow). Nach Satz 53 ist \tilde{f} ϕ -messbar. Weiter gilt

$$|\tilde{f}| \leq A\chi_K \in \mathcal{L}^1(\phi),$$

und daher ist $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(\phi)$ nach dem Satz 54.

Zu (\Leftarrow). Es gilt

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf(\sup(f, -k\chi_{[-k, k]^n}), +k\chi_{[-k, k]^n}).$$

Die Behauptung folgt daher aus Satz 56. \square

4 Sukzessive Integration: Fubini und Tonelli

- In diesem Abschnitt lernen wir, wie man mehrdimensionale Integrale auf niedrigerdimensionale reduzieren kann. Das ist insbesondere von Bedeutung für die Integration bezüglich des Lebesguemaßes $\mu_n = \mu_1 \times \dots \times \mu_1$.

Satz 58 (Fubini). Seien ϕ_1 und ϕ_2 Maße auf \mathbb{R}^{n_1} bzw. \mathbb{R}^{n_2} , und sei $\phi = \phi_1 \times \phi_2$ das Produktmaß auf $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$.

Dann gilt:

(i) Für ϕ_1 -fast alle x_1 ist $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$.

(ii) Die (für ϕ_1 -fast-alle x_1 definierte) Funktion

$$F : x_1 \mapsto \int f(x_1, \cdot) d\phi_2$$

ist in $\mathcal{L}^1(\phi_1)$ und

$$\int F d\phi_1 = \int f d\phi.$$

Die Rollen von ϕ_1 und ϕ_2 lassen sich dabei vertauschen.

Kurzform:

$$\int f d\phi = \int \left(\int f d\phi_2 \right) d\phi_1 = \int \left(\int f d\phi_1 \right) d\phi_2, \quad \text{falls die linke Seite existiert.}$$

Beweis. Vorbemerkung. Gilt der Satz für Funktionen f_1, \dots, f_k , so auch für deren Linearkombinationen. Das folgt unmittelbar aus der Linearität des Integrals.

Teil 1: Der Satz gilt für Treppenfunktionen.

Nach der Vorbemerkung können wir uns auf den Fall $f = \chi_I$ mit $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ beschränken. Sei $I = I_1 \times I_2$ die offensichtliche Zerlegung. Dann ist also für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$

$$f(x_1, x_2) = \chi_{I_1}(x_1) \chi_{I_2}(x_2).$$

Es folgt

$$f(x_1, \cdot) = \chi_{I_1}(x_1) \chi_{I_2} \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$$

und

$$F(x_1) = \int \chi_{I_1}(x_1) \chi_{I_2} d\phi_2 = \phi_2(I_2) \chi_{I_1}(x_1).$$

Damit ist F eine Treppenfunktion und $\in \mathcal{L}^1(\phi_1)$. Schließlich ist

$$\int F d\phi_1 = \phi_2(I_2) \int \chi_{I_1} d\phi_1 = \phi_2(I_2) \phi_1(I_1) = \phi(I) = \int f d\phi.$$

Teil 2: Ein Lemma. Zum weiteren Beweis brauchen wir das folgende

Lemma 59. Unter den Voraussetzungen des Satzes sei M eine ϕ -Nullmenge. Dann ist für ϕ_1 -fast alle x_1 die Menge

$$M_{x_1} = \{x_2 \mid (x_1, x_2) \in M\}$$

eine ϕ_2 -Nullmenge.

Beweis des Lemmas. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $(I_{kj})_j$ eine Folge von Intervallen mit

$$M \subset \cup_{j=0}^{\infty} I_{kj} \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \phi(I_{kj}) < \frac{1}{2^{k+1}}. \quad (17)$$

Definiere

$$g_l := \sum_{k,j \leq l} \chi_{I_{kj}}.$$

Offenbar ist $(g_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, und nach (17) ist die Integralfolge beschränkt:

$$\int g_l d\phi = \sum_{k,j \leq l} \phi(I_{kj}) \leq \sum_{k=0}^l \frac{1}{2^{k+1}} \leq 1.$$

Für $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ definieren wir

$$G_l(x_1) := \int g_l(x_1, \cdot) d\phi_2.$$

Dann ist $(G_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen auf dem \mathbb{R}^{n_1} , und nach dem Teil 1 unseres Beweises ist die Integralfolge beschränkt:

$$\int G_l d\phi_2 = \int g_l d\phi \leq 1.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi gibt es daher eine ϕ_1 -Nullmenge N_1 , so dass $(G_l(x_1))_{l \in \mathbb{N}}$ für alle $x_1 \notin N_1$ konvergiert. Wir wollen zeigen, dass M_{x_1} für $x_1 \notin N_1$ eine ϕ_2 -Nullmenge ist.

Sei also $x_1 \notin N_1$. Wir betrachten eine weitere monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, nämlich $(g_l(x_1, \cdot))_{l \in \mathbb{N}}$. Die zugehörige Integralfolge ist wegen

$$\int g_l(x_1, \cdot) d\phi_2 = G_l(x_1)$$

konvergent und damit beschränkt. Nach dem Satz von Beppo Levi gibt es also eine ϕ_2 -Nullmenge N_2 , so dass $(g_l(x_1, x_2))_{l \in \mathbb{N}}$ für alle $x_2 \notin N_2$ konvergiert.

Aber: Für $(x_1, x_2) \in M$, d.h. für $x_2 \in M_{x_1}$, gibt es zu jedem k ein j mit $(x_1, x_2) \in I_{kj}$. Daher liegt (x_1, x_2) in unendlich vielen der I_{kj} und $(g_l(x_1, x_2))_{l \in \mathbb{N}}$ ist divergent. Ist also $x_1 \notin N_1$, so ist $M_{x_1} \subset N_2$ und damit eine ϕ_2 -Nullmenge. \square

Teil 3: Der Satz gilt für $f \in \mathcal{L}_+^1(\phi)$. Für welche x_1 ist $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$?

Sei $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i =_{\phi} f, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int s_i d\phi = \int f d\phi.$$

Dann haben wir also eine ϕ -Nullmenge

$$M := \{(x_1, x_2) \mid (s_i(x_1, x_2))_{i \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert nicht gegen } f(x_1, x_2)\}.$$

Nach dem Lemma aus Teil 2 gibt es eine ϕ_1 -Nullmenge N_1 , so dass M_{x_1} für alle $x_1 \notin N_1$ eine ϕ_2 -Nullmenge ist. Das heißt, für alle $x_1 \notin N_1$ gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i(x_1, \cdot) =_{\phi_2} f(x_1, \cdot).$$

Nun ist $(s_i(x_1, \cdot))_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Treppenfunktionsfolge. Wir untersuchen für $x_1 \notin N_1$ die Integralfolge

$$S_i(x_1) = \int s_i(x_1, \cdot) d\phi_2.$$

Das ist aber (für beliebiges $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$) eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, für die nach Teil 1

$$\int S_i d\phi_1 = \int s_i d\phi \rightarrow \int f d\phi. \quad (18)$$

Die $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bilden also eine “Beppo-Levi-Folge”: Es gibt eine ϕ_1 -Nullmenge \tilde{N}_1 , so dass $(S_i(x_1))_{i \in \mathbb{N}}$ für alle $x_1 \notin N_1 \cup \tilde{N}_1$ konvergiert, also beschränkt ist.

Dann ist auch $(s_i(x_1, \cdot))_{i \in \mathbb{N}}$ eine “Beppo Levi-Folge”, ihr ϕ_2 -Grenzwert ist ϕ_2 -integrierbar und die Integrale konvergieren:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} s_i(x_1, \cdot) =_{\phi_2} f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$$

und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_i(x_1) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int s_i(x_1, \cdot) d\phi_2 = \int f(x_1, \cdot) = F(x_1).$$

Weiter liefert Beppo Levi für die Folge $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$, dass $F \in \mathcal{L}^1(\phi_1)$ und

$$\int F d\phi_1 = \lim_{i \rightarrow \infty} \int S_i d\phi_1 \stackrel{(18)}{=} \int f d\phi.$$

Teil 4: Schluss des Beweises: $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$. Die Behauptung folgt in diesem Falle aus Teil 3 und der Vorbemerkung. \square

Beispiel 60. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := (x^2 + y^2)\chi_{[0,1]^2}(x, y)$$

ist stetig auf einem kompakten Intervall, also nach Beispiel 28 μ_2 -integrierbar. Nach Fubini gilt

$$\int f d\mu_2 = \int \left(\int f(x, y) d\mu_1 \right) d\mu_1 = \int \left(\int (x^2 + y^2)\chi_{[0,1]}(y)\chi_{[0,1]}(x) d\mu_1 \right) d\mu_1.$$

Die μ_1 -Integrale sind aber nach Satz 29 dasselbe wie die entsprechenden Regelintegrale. Wir erhalten

$$\int f d\mu_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left(yx^2 + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \frac{2}{3}.$$

\square

Bemerkung. Oft ist es nicht so schwer, die Existenz eines oder beider iterierter Integrale $\int (\int f d\phi_1) d\phi_2$ und $\int (\int f d\phi_2) d\phi_1$ zu zeigen. Leider folgt daraus im allgemeinen aber nicht, dass $f \in \mathcal{L}^1(\phi_1 \times \phi_2)$, so dass man den Satz von Fubini nicht anwenden kann. (Ein Beispiel können Sie in den Übungen konstruieren.) Man muß dazu etwas mehr verlangen:

Satz 61 (Tonelli). Seien ϕ_1 und ϕ_2 Maße auf \mathbb{R}^{n_1} bzw. \mathbb{R}^{n_2} , und sei $\phi = \phi_1 \times \phi_2$ das Produktmaß auf $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Sei $f : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ ϕ -messbar. Ferner existiere eines der beiden folgenden Integrale:

$$\int \left(\int |f| d\phi_2 \right) d\phi_1 \quad \text{oder} \quad \int \left(\int |f| d\phi_1 \right) d\phi_2.$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$, also nach dem Satz von Fubini

$$\int f d\phi = \int \left(\int f d\phi_2 \right) d\phi_1 = \int \left(\int f d\phi_1 \right) d\phi_2.$$

Beweis. Sei $I_k := [-k, k]^n$ und

$$h_k := \inf(|f|\chi_{I_k}, k\chi_{I_k}).$$

Mit f sind nach Satz 53 auch $|f|$ und die h_k messbar. Die Funktion h_k wird durch die integrierbare Funktion $k\chi_{I_k}$ dominiert und ist deshalb nach Satz 54 integrierbar. Also können wir den Satz von Fubini darauf anwenden:

$$\int h_k d\phi = \int \left(\int h_k d\phi_2 \right) d\phi_1 = \int \left(\int h_k d\phi_1 \right) d\phi_2.$$

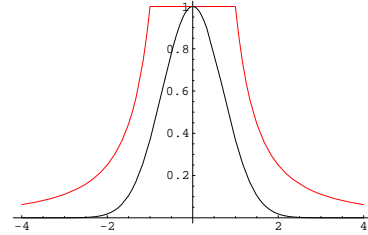
Wir nehmen o.E. an, dass $\int (|f| d\phi_2) d\phi_1$ existiert. Weil $0 \leq h_k(x_1, \cdot) \leq |f|(x_1, \cdot)$ und nach Voraussetzung $|f|(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\phi_2)$ für ϕ_1 -fast alle x_1 , erhalten wir

$$\int h_k d\phi \leq \int \left(\int |f| d\phi_2 \right) d\phi_1. \quad (19)$$

Die h_k bilden eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen, die überall gegen $|f|$ konvergieren. Die Integralfolge ist nach (19) beschränkt. Also ist $|f|$ nach dem Satz von B. Levi integrierbar. Nach Satz 54 ist damit auch f integrierbar. \square

Beispiel 62.

Die Funktion $g := \inf(1, \frac{1}{x^2})$ ist μ_1 -integrierbar (Satz von Beppo Levi und Regelintegral mit Stammfunktion). Sie dominiert die stetige und deshalb μ_1 -messbare Funktion e^{-x^2} , die daher nach Satz 54 ebenfalls in $\mathcal{L}^1(\mu_1)$ liegt.



Daher existiert das iterierte Integral

$$\begin{aligned} \int \left(\int e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx &= \int \left(e^{-x^2} \int e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \left(\int e^{-y^2} dy \right) \left(\int e^{-x^2} dx \right) = \left(\int e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

(Wir haben dx und dy anstelle von $d\mu_1$ geschrieben um anzudeuten, auf welche Variable sich die Integration bezieht.) Weiter ist $e^{-(x^2+y^2)}$ stetig, also μ_2 -messbar. Damit folgt aus dem Satz von Tonelli, dass

$$e^{-(x^2+y^2)} \in \mathcal{L}^1(\mu_2)$$

und

$$\int e^{-(x^2+y^2)} d\mu_2 = \left(\int e^{-x^2} dx \right)^2$$

ist.

Wir werden später sehen, dass mit Hilfe mehrdimensionaler Integration die linke Seite leicht zu berechnen ist. Das gibt dann eine Auswertung des in der Wahrscheinlichkeitstheorie wichtigen und eindimensional nicht so leicht zu berechnenden Integrals $\int e^{-x^2} d\mu_1$.

\square

5 Messbare und integrierbare Mengen

- Wir betrachten messbare Mengen und ihr Maß, und damit ein fundamentales Problem der Geometrie: Was *ist* eigentlich der Flächeninhalt einer Teilmenge des \mathbb{R}^2 , die “krummlinig begrenzt” oder noch komplizierter ist? Was das Volumen eines Körpers im \mathbb{R}^3 ? Und wie *berechnet* man das? (Beim axiomatischen Aufbau der Maß- und Integrationstheorie steht der Begriff *messbare Menge* ganz am Anfang.)
- Wir klären Zusammenhänge zwischen Messbarkeit und Topologie.
- Wir berechnen das Volumen der n -dimensionalen Vollkugel.
- Wir lernen ein Beispiel einer nicht-messbaren Menge kennen.

Sei ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n .

Definition 63. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$.

- (i) A heißt ϕ -messbar bzw. ϕ -integrierbar, wenn die charakteristische Funktion χ_A von A ϕ -messbar bzw. ϕ -integrierbar ist. Im letzteren Fall definiert man das Maß von A als

$$\phi(A) := \int \chi_A d\phi.$$

- (ii) Für $f : \mathbb{R}^n \supset B \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die triviale Erweiterung von f durch $\hat{f}(x) := 0$ für $x \notin B$.

Ist $A \subset B$ ϕ -messbar, so nennen wir f ϕ -messbar auf A bzw. ϕ -integrierbar über A , wenn $\hat{f}\chi_A$ ϕ -messbar bzw. ϕ -integrierbar ist. Im letzteren Fall schreibt man

$$f \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$$

und

$$\int_A f d\phi := \int \hat{f}\chi_A d\phi.$$

Beispiel 64. Jedes $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ ist ϕ -integrierbar, und die neue Definition von $\phi(I)$ ist mit der Maß-Definition verträglich.

□

Satz 65 (Die σ -Algebra der messbaren Mengen).

- (i) Komplement, abzählbare Vereinigungen und abzählbare Durchschnitte messbarer Mengen sind messbar. Die messbaren Mengen bilden eine sogenannte σ -Algebra oder ein Borelsystem.
- (ii) (σ -Additivität) Ist $(A_i)_i$ eine Folge ϕ -integrierbarer, paarweise disjunkter Mengen, so gilt

$$A := \dot{\bigcup} A_i \text{ ist } \phi\text{-integrierbar} \iff \sum_{i=0}^{\infty} \phi(A_i) < \infty.$$

In diesem Fall ist

$$\phi(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi(A_i).$$

Beweis. Zu (i). Für das Komplement $CA := \mathbb{R}^n \setminus A$ ist $\chi_{CA} = 1 - \chi_A$. Die 1-Funktion ist ϕ -messbar. Deshalb ist CA mit A messbar.

Weiter hat man für $U := \bigcup A_i$, $D := \bigcap A_i$

$$\chi_U = \sup_i \chi_{A_i} \quad \chi_D = \inf_i \chi_{A_i}.$$

Weil \inf und \sup abzählbar vieler messbarer Funktionen messbar sind, sind mit den A_i auch U und D messbar.

Zu (ii). Sei $f_k := \sum_{i=0}^k \chi_{A_i}$. Dann ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}^1(\phi)$ mit

$$\lim f_k = \chi_A, \quad \int f_k d\phi = \sum_{j=0}^k \phi(A_j).$$

Ist $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\phi)$, so gilt wegen $|f_k| \leq \chi_A$ nach dem Satz von Lebesgue

$$\phi(A) = \int \chi_A d\phi = \lim \int f_k d\phi = \sum_{j=0}^{\infty} \phi(A_j).$$

Ist umgekehrt die Reihe konvergent, so folgt aus dem Satz von Beppo Levi, dass $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\phi)$. □

Beispiel 66 (Messbarkeit von Borelmengen). Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen. Um zu zeigen, dass A bezüglich eines jeden Maßes ϕ messbar ist, genügt nach Satz 50 der Nachweis, dass $A \cap I$ für jedes $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ messbar ist. Durch fortgesetzte Halbierung in jeder Koordinatenrichtung erhält man zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine Familie $(I_{kj})_{0 \leq j \leq 2^k}$ beschränkter Intervalle mit

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} I_{kj} = I, \quad \text{diam}(I_{kj}) = \frac{\text{diam}(I)}{2^k}.$$

Zu $x \in A \cap I$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{\text{diam} I}{2^k}}(x) \subset A$ und ein j mit $x \in I_{kj}$. Dann ist aber $I_{kj} \subset A$, und wir haben gezeigt, dass

$$A \cap I = \bigcup_{I_{kj} \subset A} I_{kj}$$

die Vereinigung von abzählbar vielen beschränkten Intervallen ist. Also ist A bezüglich eines jeden Maßes ϕ messbar. Das gilt dann auch für alle Mengen, die man aus den offenen durch Komplementbildung, abzählbare Vereinigung und abzählbare Durchschnitte erhält, also für die sogenannten *Borelmengen*. □

Beispiel 67 (Kompakte Mengen). Kompakte Mengen sind integrierbar bezüglich eines jeden Maßes: Als abgeschlossene Mengen sind sie messbar, und ihre charakteristische Funktion wird dominiert durch eine Treppenfunktion.

Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es nach einem Satz der Topologie (Tietzescher Erweiterungssatz) eine stetige und beschränkte Erweiterung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von f . Nach Satz 54 ist dann $\tilde{f}\chi_K \in \mathcal{L}^1(\phi)$, also $f \in \mathcal{L}^1(P, \phi)$ für jedes Maß ϕ , stetige Funktionen auf kompakten Mengen sind integrierbar bezüglich eines jeden Maßes. □

Satz 68. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ϕ -messbar. Dann sind die Mengen

$$A := \{x \mid f(x) > 0\}$$

und

$$B := \{x \mid f(x) \geq 0\}$$

ϕ -messbar.

Beweis. Zunächst ist $g := \sup(f, 0)$ messbar. Weiter sind die Funktionen

$$h_j(x) := \inf(jg(x), 1)$$

messbar und konvergent gegen χ_A . Also ist A messbar. Folglich ist auch die Menge

$$\{x \mid -f(x) > 0\}$$

messbar. Schließlich ist dann aber auch B als deren Komplement messbar. \square

Satz 69. Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine ϕ -Nullmenge, wenn sie ϕ -integrierbar und $\phi(N) = 0$ ist.

Beweis. Ist N eine ϕ -Nullmenge, so ist $\chi_N =_\phi 0$. Daher ist N nach dem Korollar 32 integrierbar und $\phi(N) = \int \chi_N d\phi = \int 0 d\phi = 0$.

Ist umgekehrt χ_N ϕ -integrierbar mit Integral = 0, so folgt aus dem Korollar 37 zum Satz von B. Levi, dass $\chi_N =_\phi 0$, also N eine ϕ -Nullmenge. \square

Satz 70. Für $i = 1, 2$ seien ϕ_i ein Maß auf \mathbb{R}^{n_i} und $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht negativ. Wir definieren $\phi := \phi_1 \times \phi_2$ und $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1+n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) := f_1(x_1)f_2(x_2).$$

Dann gilt

(i) Ist $f_i \in \mathcal{L}^1(\phi_i)$ für $i = 1, 2$, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\phi)$ und

$$\int f d\phi = \int f_1 d\phi_1 \int f_2 d\phi_2.$$

(ii) Sind die f_i bezüglich ϕ_i messbar, so ist f bezüglich ϕ messbar.

Beweis. Vgl. Hausaufgaben. \square

Korollar 71. Seien ϕ_1, ϕ_2 und ϕ wie im Satz. Dann gilt

(i) Für ϕ_i -integrierbare Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ist $A_1 \times A_2$ ϕ -integrierbar und

$$\phi(A_1 \times A_2) = \phi_1(A_1)\phi_2(A_2).$$

(ii) Für ϕ_i -messbare Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ ist $A_1 \times A_2$ ϕ -messbar.

(iii) Ist N_1 eine ϕ_1 -Nullmenge, so ist $N_1 \times \mathbb{R}^{n_2}$ eine ϕ -Nullmenge.

Beweis. Vgl. Hausaufgaben. □

Satz 72. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-negative integrierbare Funktion und

$$G := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \mid 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

die Menge unter dem Graphen von f . Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(\mu_n) \iff \chi_G \in \mathcal{L}^1(\mu_{n+1}).$$

In diesem Falle gilt

$$\mu_{n+1}(G) = \int f d\mu_n.$$

Beweis. Zwei Vorbemerkungen: Setzen wir

$$g(x_1, \dots, x_{n+1}) := x_{n+1}(f(x_1, \dots, x_n) - x_{n+1})$$

so ist

$$G = \{x \mid g(x) \geq 0\}.$$

Nach den Sätzen 70 und 68 ist G daher messbar bezüglich $\mu_{n+1} = \mu_n \times \mu_1$.

Zum anderen ist

$$\begin{aligned} \chi_G(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \dots, x_n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \chi_{[0, f(x_1, \dots, x_n)]}(x_{n+1}) \end{aligned}$$

und

$$\int \chi_{[0, f(x_1, \dots, x_n)]} d\mu_1 = f(x_1, \dots, x_n).$$

Zu (\Leftarrow). Ist $\chi_G \in \mathcal{L}^1(\mu_{n+1})$, so liefert der Satz von Fubini

$$\mu_{n+1}(G) = \int \chi_G d\mu_{n+1} = \int \left(\int \chi_{[0, f(x_1, \dots, x_n)]}(x_{n+1}) d\mu_1 \right) d\mu_n = \int f d\mu_n. \quad (20)$$

Zu (\Rightarrow). Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$, so existiert die rechte Seite von (20). Wir können den Satz von Tonelli anwenden und erhalten die Integrierbarkeit von χ_G . □

Beispiel 73 (Das Volumen der n-dimensionalen Vollkugel). Sei

$$D_r^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq r^2 \right\}.$$

die n -dimensionale Vollkugel vom Radius r . D_r^n ist als kompakte Menge μ_n -integrierbar. Der Fall $n = 1$ ist trivial:

$$\mu_1(D_r^1) = \mu_1([-r, +r]) = 2r.$$

Für höheres n versuchen wir nun,

$$V_n(r) := \mu_n(D_r^n)$$

mit dem Satz von Fubini zu berechnen, indem wir die Identität

$$\chi_{D_r^n}(x_1, \dots, x_n) = \chi_{D_{\sqrt{r^2 - x_n^2}}^{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}) \chi_{[-r, +r]}(x_n)$$

benutzen. Wir schreiben wieder

$$d\mu_n = d(\mu_{n-1} \times \mu_1), \quad d\mu_1 =: dx_n,$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} V_n(r) &= \int \chi_{D_r^n} d\mu_n \\ &= \int \chi_{[-r, r]}(x_n) \left(\int \chi_{D_{\sqrt{r^2 - x_n^2}}^{n-1}} d\mu_{n-1} \right) dx_n \\ &= \int \chi_{[-r, r]}(x_n) V_{n-1}(\sqrt{r^2 - x_n^2}) dx_n. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, wir hätten schon gezeigt, dass das Volumen der $(n-1)$ -Kugel proportional zur $(n-1)$ -ten Potenz des Radius ist, also $V_{n-1}(r) = v_{n-1} r^{n-1}$ mit

$$v_k := V_k(1) \text{ für alle } k.$$

Für $n = 1$ stimmt das ja. Dann folgt weiter

$$\begin{aligned} V_n(r) &= \int \chi_{[-r, r]}(x_n) v_{n-1} \sqrt{r^2 - x_n^2}^{n-1} dx_n = v_{n-1} \int \chi_{[-r, r]}(x_n) \sqrt{r^2 - x_n^2}^{n-1} dx_n \\ &= v_{n-1} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - t^2}^{n-1} dt = v_{n-1} \int_{-r}^r r^{n-1} \sqrt{1 - (t/r)^2}^{n-1} dt \\ &= r^n v_{n-1} \int_{-r}^r \sqrt{1 - (t/r)^2}^{n-1} \frac{1}{r} dt = r^n v_{n-1} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \tau^2}^{n-1} d\tau. \end{aligned}$$

Also ist dann $V_n(r)$ proportional zu r^n

$$V_n(r) = v_n r^n.$$

Setzen wir

$$I_n := \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \tau^2}^{n-1} d\tau \stackrel{\text{Substitution}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt,$$

so haben wir weiter gefunden, dass

$$v_n = v_{n-1} I_n = v_{n-2} I_n I_{n-1}.$$

Durch partielle Integration folgt

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2,$$

mit $I_2 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 2$. Dann ist aber

$$\begin{aligned} I_n I_{n-1} &= \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} I_{n-2} I_{n-3} = \frac{n-2}{n} I_{n-2} I_{n-3} = \dots \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{n} I_2 I_1 & \text{für gerades } n \\ \frac{1}{n} I_1 I_0 & \text{für ungerades } n. \end{array} \right\} = \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$v_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad v_{2m+1} = \frac{2^{m+1} \pi^m}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m+1)}$$

Mit Hilfe der Gammafunktion (vgl. Beispiel 45) kann man das einheitlich so schreiben:

$$v_n = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Es ergeben sich die folgenden Volumina der Kugeln und daraus *durch Differentiation* die $(n-1)$ -dimensionalen Volumina der zugehörigen Sphären:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----------------------|----|-----------|-----------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|----------------------------|
| Volumen(D_r^n) | 2r | πr^2 | $\frac{4}{3} \pi r^3$ | $\frac{1}{2} \pi^2 r^4$ | $\frac{8}{15} \pi^2 r^5$ | $\frac{1}{6} \pi^3 r^6$ | $\frac{16}{105} \pi^3 r^7$ |
| Oberfläche(D_r^n) | | $2\pi r$ | $4\pi r^2$ | $2\pi^2 r^3$ | $\frac{8}{3} \pi^2 r^4$ | $\pi^3 r^5$ | $\frac{16}{15} \pi^3 r^6$ |

□

Nicht-messbare Mengen sind außerordentlich schwer zu finden:

Beispiel 74 (Nicht-messbare Menge). Durch $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ wird auf $]0, 1[$ eine Äquivalenzrelation definiert. Sei $M \subset]0, 1[$ eine Menge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Dann ist M nicht μ_1 -messbar.

Beweis. Ist $x \in]0, 1[$, so gibt es ein dazu äquivalentes $y \in M$. Dann ist $r := x - y$ rational und liegt offenbar in $] - 1, 1[$. Also ist

$$]0, 1[\subset \hat{M} := \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap]-1, 1[} (r + M) \subset]-1, 2[.$$

Weil M aus jeder Äquivalenzklasse nur ein Element enthält, sind die $r + M$ paarweise disjunkt.

Annahme: M ist μ_1 -messbar.

Wegen $0 \leq \chi_M \leq \chi_{]-1, 2[}$ ist M dann sogar μ_1 -integrierbar und (Beweis ?) auch $r + M$ für jedes $r \in \mathbb{Q} \cap]-1, 1[$ integrierbar mit

$$\mu_1(r + M) = \mu_1(M).$$

- Wäre $\mu_1(M) = 0$, d.h. M eine μ_1 -Nullmenge, so wäre auch die abzählbare Vereinigung \hat{M} eine μ_1 -Nullmenge im Widerspruch zu $]0, 1[\subset \hat{M}$.
- Wäre $\mu_1(M) > 0$, so wäre nach der σ -Additivität

$$\mu_1(] - 1, 2 [) \geq \mu_1(\hat{M}) = \sum_r \mu_n(r + M) = \infty.$$

Widerspruch!

Also war die Annahme der Messbarkeit falsch.

□

6 Der Transformationsatz

- Häufig hat man Integrationsprobleme mit gewissen Symmetrieeigenschaften des Integrationsbereiches. Dann sind andere als die Euklidischen Koordinaten sehr hilfreich. Wir lernen in den folgenden Abschnitten, wie man dafür die Integrale umschreibt. Der Kernpunkt ist die Volumenverzerrung durch die Koordinatenabbildung.

Wir betrachten in diesem Kapitel

das Lebesguemaß μ_n auf \mathbb{R}^n .

Integrierbarkeit, Messbarkeit und Nullmengen beziehen sich stets darauf. Wir wollen folgende Frage untersuchen:

Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar und $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wie verhalten sich $\mu_n(A)$ und $\mu_n(h(A))$ zueinander? Wie wird also das n -dimensionale Volumen einer Menge durch eine Abbildung h verzerrt?

6.1 Nullmengen und Verzerrung durch lineare Abbildungen

- Was passiert mit Nullmengen unter C^1 -Abbildungen?
- Lineare Abbildungen bilden Würfel oder Quader in Parallelotope ab. Die elementargeometrische Volumenverzerrung wird dabei durch die Determinante beschrieben. Wir lernen, dass das auch für die Volumenverzerrung messbarer Mengen zutrifft.

Zwei Vorbemerkungen:

1. Fast-disjunkte Intervalle. Der Rand eines Intervalls aus $I(\mathbb{R}^n)$ ist die Vereinigung von endlich vielen niedriger-dimensionalen Intervallen und deshalb eine μ_n -Nullmenge. Darum ist μ_n additiv (sogar σ -additiv) auch für nicht notwendig paarweise disjunkte Intervalle, wenn sie sich allenfalls an den Rändern überlappen. Das ist sehr angenehm zum Beispiel bei Argumenten mit Intervall-Halbierung. Wir geben dieser Situation der Einfachheit einen Namen:

Definition 75. Eine Familie $(I_j)_{j \in J}$ beschränkter Intervalle, die sich allenfalls am Rande überlappen, d.h. deren offene Kerne I_j^0 paarweise disjunkt sind, nennen wir *fast-disjunkt*.

Ist also $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine fast-disjunkte Folge in $I(\mathbb{R}^n)$ und $\bigcup I_j$ beschränkt, so gilt

$$\mu_n\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} I_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_n(I_j).$$

2. Würfel. Der Schrankensatz

$$\|h(y) - h(x)\| \leq (\sup \|Dh\|) \|y - x\|$$

gibt eine Abschätzung für die *lineare* Verzerrung und damit für die Verzerrung von Kugeln. Wenn wir

statt der üblichen Euklidischen Norm auf dem \mathbb{R}^n die sup-Norm $\|\cdot\|_\infty$ verwenden,

sind die Kugeln achsenparallele Würfel, d.h. spezielle beschränkte Intervalle in $I(\mathbb{R}^n)$. Die Methoden der Analysis II werden damit auch für unseren Aufbau der Integrationstheorie verfügbar.

Allerdings müssen wir uns erst noch klarmachen, dass es an vielen Stellen der Integrations-
theorie genügt, mit Würfeln statt mit Intervallen zu argumentieren. Dem ist ein Teil dieses
Abschnittes gewidmet.

Definition 76. Für $p \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ sei

$$W(p, r) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \|x - p\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - p_i| \leq r \right\}$$

die abgeschlossene Vollkugel um p vom Radius r in der sup-Norm.

Lemma 77 (Ausschöpfungslemma). Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $r > 0$. Dann gibt es eine
Folge fast-disjunkter, kompakter Würfel $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit Kantenlängen $\leq r$ und

$$G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i.$$

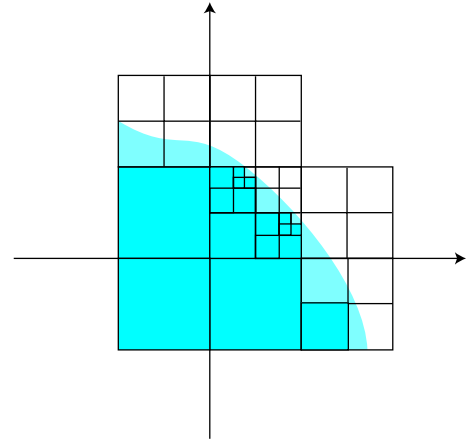
Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{W}_k = \left\{ W\left((x_1, \dots, x_n), \frac{r}{2^{k+1}}\right) \mid x_i = \frac{(2m_i + 1)r}{2^{k+1}} \text{ mit } m_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die Würfel aus \mathcal{W}_k bilden dann eine Zerlegung des \mathbb{R}^n in fast-disjunkte Würfel der Kantenlänge $\frac{r}{2^k}$, und zu jedem $W \in \mathcal{W}_{k+1}$ gibt es ein $\tilde{W} \in \mathcal{W}_k$ mit $W \subset \tilde{W}$. Die Würfel von \mathcal{W}_{k+1} erhält man, wenn man die Würfel von \mathcal{W}_k in jeder Koordinatenrichtung halbiert.

Sei $\mathcal{W}_{-1}^G := \emptyset$ und sei \mathcal{W}_k^G für $k \in \mathbb{N}$ die Menge aller $W \in \mathcal{W}_k$, die ganz in G liegen und die nicht schon in einem Würfel aus \mathcal{W}_{k-1}^G enthalten sind.

Dann ist $\mathcal{W}^G := \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{W}_k$ abzählbar, die $W \in \mathcal{W}^G$ sind fast-disjunkt und $\bigcup_{W \in \mathcal{W}^G} W = G$.



□

Lemma 78 (Nullmengen und Würfel). Seien $r > 0$ und $N \subset \mathbb{R}^n$.

N ist genau dann eine Nullmenge, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge $(W_i = W(p_i, r_i))_{i \in \mathbb{N}}$ von kompakten Würfeln gibt, so dass

$$N \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i, \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_n(W_i) < \epsilon, \quad \text{und für alle } i \quad r_i < r.$$

Beweis. Die Bedingung ist offenbar hinreichend.

Ist andererseits N eine μ_n -Nullmenge, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$ offener Intervalle aus $I(\mathbb{R}^n)$, die N überdeckt, und für die

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_n(I_j) < \epsilon.$$

Zu jedem I_j gibt es nach Lemma 77 eine Folge fast-disjunkter kompakter Würfel $(W_i^j)_{i \in \mathbb{N}}$ mit Kantenlängen $< r$ und Vereinigung I_j . Für diese gilt

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_n(W_i^j) = \mu_n(I_j).$$

Die als Folge numerierten W_i^j überdecken dann N und haben ein Gesamtmaß $< \epsilon$. \square

Lemma 79 (C^1 -Bilder von Nullmengen). Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $N \subset G$ eine Nullmenge. Dann ist auch $h(N)$ eine Nullmenge.

Bemerkung. Das gilt nicht für stetige Abbildungen. Peano hat 1890 ein Beispiel für eine stetige Abbildung der Nullmenge $\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ in den \mathbb{R}^2 gegeben, deren Bild das Einheitsquadrat ist. Vgl. z.B. *Barner-Flohr, Analysis II, p. 40*.

Beweis. Nach dem Ausschöpfungslemma gibt es eine Folge kompakter Würfel $(W_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} W_j$. Weil die abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge ist, genügt daher der Nachweis, dass $h(N \cap W)$ für jeden kompakten Würfel $W \subset G$ eine Nullmenge ist. Zu einem solchen $W = W(p, r)$ gibt es ein $R > r$ mit $\tilde{W} = W(p, R) \subset G$ (Beweis?). Weil f stetig auf dem kompakten \tilde{W} ist, existiert

$$M := \max \left\{ \|D_x h\| \mid x \in \tilde{W} \right\}.$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Nach Lemma 78 gibt es eine Folge von Würfeln $W_i = W(p_i, r_i)$ der Kantenlänge $< R - r$ mit $N \cap W \subset \bigcup W_i$ und $\sum \mu_n(W_i) < \epsilon$. Wir können o.E. annehmen, dass $(N \cap W) \cap W_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann liegen alle W_i in \tilde{W} . Daher ist nach dem Schrankensatz

$$h(W_i) = h(W(p_i, r_i)) \subset W(h(p_i), Mr_i).$$

Damit ist

$$h(N \cap W) \subset \bigcup W(h(p_i), Mr_i) \quad \text{und} \quad \sum \mu_n(W(h(p_i), Mr_i)) = M^n \sum \mu_n(W_i) \leq M^n \epsilon.$$

Also ist $h(N \cap W)$ eine μ_n -Nullmenge. \square

Wir betrachten jetzt das oben angesprochene Problem der Volumenverzerrung zunächst für (lineare) Isomorphismen $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Nach linearer Algebra (vgl. Fischer, p.94, Satz 2.7.3) ist jeder Automorphismus von \mathbb{R}^n das Produkt endlich-vieler elementarer Automorphismen. Dabei heißt ein Automorphismus h elementar, wenn er von einem der folgenden drei Typen ist:

- h multipliziert eine Komponente mit $\lambda \neq 0$.
- h vertauscht zwei Komponenten
- $h(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$.

Lemma 80 (Verzerrung durch elementare Isomorphismen). Sei $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein elementarer Automorphismus und W ein kompakter Würfel. Dann ist $h(W)$ kompakt, also integrierbar, und es gilt

$$\mu_n(h(W)) = |\det h| \mu_n(W). \quad (21)$$

Beweis. Für die beiden ersten Typen elementarer Isomorphismen ist die Behauptung klar, weil $h(W)$ ein Intervall ist, dessen Volumen sich elementar errechnet.

Sei also h vom dritten Typ und

$$W = W_1 \times \dots \times W_n.$$

Dann gilt

$$\chi_{h(W)}(x_1, \dots, x_n) = \chi_{(x_2 + W_1)}(x_1) \chi_{W_2 \times \dots \times W_n}(x_2, \dots, x_n).$$

Dabei bezeichnet $x_2 + W_1$ das um x_2 verschobene Intervall W_1 , für das offenbar

$$\mu_1(x_2 + W_1) = \mu_1(W_1).$$

Nach dem Satz von Fubini existiert

$$\begin{aligned} \int \chi_{(x_2 + W_1)}(\cdot) \chi_{W_2 \times \dots \times W_n}(x_2, \dots, x_n) d\mu_1 &= \mu_1(x_2 + W_1) \chi_{W_2 \times \dots \times W_n}(x_2, \dots, x_n) \\ &= \mu_1(W_1) \chi_{W_2 \times \dots \times W_n}(x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \mu_n(h(W)) &= \int \chi_{h(W)} d\mu_n = \int \mu_1(W_1) \chi_{W_2 \times \dots \times W_n} d\mu_{n-1} \\ &= \mu_1(W_1) \mu_{n-1}(W_2 \times \dots \times W_n) = \mu_n(W). \end{aligned}$$

Aus $\det(h) = 1$ folgt die Behauptung. □

Weil $\chi_{h(W)} \circ h = \chi_W$ ist, kann man die Formel (21) auch so schreiben:

$$\boxed{\int \chi_{h(W)} d\mu_n = \int (\chi_{h(W)} \circ h) |\det h| d\mu_n.} \quad (22)$$

Wir wollen diese Formel nun schrittweise verallgemeinern auf beliebige Automorphismen h und integrierbare Funktionen f anstelle von $\chi_{h(W)}$.

1. Schritt. Seien h ein elementarer Automorphismus und $f = \chi_A$ für eine offene und beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist auch $h^{-1}(A)$ offen und nach dem Ausschöpfungslemma 77 die Vereinigung abzählbar vieler fast-disjunkter kompakter Würfel: $h^{-1}(A) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_i$. Weil h injektiv und nullmengentreu ist, ist dann $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} h(W_i)$ mit fast-disjunkten $h(W_i)$, also

$$\chi_A = \mu_n \sum_{i=0}^{\infty} \chi_{h(W_i)}.$$

Weil A beschränkt ist, ist $\chi_A \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$, und wie im Beweis der σ -Additivität folgt mit (22)

$$\begin{aligned} \int \chi_A d\mu_n &= \sum_{i=0}^{\infty} \int \chi_{h(W_i)} d\mu_n = \sum_{i=0}^{\infty} \int (\chi_{h(W_i)} \circ h) |\det h| d\mu_n \\ &= \int (\chi_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} h(W_i)} \circ h) |\det h| d\mu_n = \int (\chi_A \circ h) |\det h| d\mu_n. \end{aligned}$$

2. Schritt. Sei h_1 ein beliebiger Automorphismus des \mathbb{R}^n , h_2 ein elementarer Automorphismus, $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und für $f = \chi_A$ gelte

$$\int f d\mu_n = \int (f \circ h_1) |\det h_1| d\mu_n.$$

Dann gilt nach dem 1. Schritt

$$\begin{aligned} \int f d\mu_n &= \int (f \circ h_1) |\det h_1| d\mu_n = \int \chi_{h_1^{-1}(A)} |\det h_1| d\mu_n = |\det h_1| \int \chi_{h_1^{-1}(A)} d\mu_n \\ &= |\det h_1| \int (\chi_{h_1^{-1}(A)} \circ h_2) |\det h_2| d\mu_n = \int (f \circ (h_1 \circ h_2)) |\det(h_1 \circ h_2)| d\mu_n. \end{aligned}$$

Weil aber jeder Automorphismus das endliche Produkt elementarer Automorphismen ist, erhalten wir mit den 1. Schritt: Ist $f = \chi_A$ für ein offenes und beschränktes $A \subset \mathbb{R}^n$, so gilt für jeden Automorphismus $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\int f d\mu_n = \int (f \circ h) |\det h| d\mu_n. \quad (23)$$

3. Schritt. Ist $f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$, so ist $f = \sum_{j=1}^k \lambda_j \chi_{I_j}$ mit *offenen* beschränkten Intervallen I_j . Wegen der Linearität des Integrals gilt (23) daher auch für Treppenfunktionen f .

4. Schritt. Ist $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Automorphismus, ist $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu_n)$ und ist $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit $f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i$, also $\int f d\mu_n = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i d\mu_n$, so ist $((f_i \circ h) |\det h|)_{i \in \mathbb{N}}$ nach dem 3. Schritt eine offenbar monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen mit beschränkter Integralfolge

$$\left(\int (f_i \circ h) |\det h| d\mu_n = \int f_i d\mu_n \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

Nach Beppo Levi ist $(f \circ h) |\det h| = \lim_{i \rightarrow \infty} (f_i \circ h) |\det h| \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ und (23) gilt auch für $f \in \mathcal{L}_+^1(\mu_n)$.

Schließlich gilt die Behauptung wegen der Linearität des Integrals dann auch für $f \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$, und wir erhalten den folgenden Satz:

Satz 81 (Transformationssatz für lineare Isomorphismen). Seien $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Automorphismus und $f \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$. Dann ist auch $f \circ h \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ und es gilt

$$\int f d\mu_n = \int (f \circ h) |\det h| d\mu_n. \quad (24)$$

Beispiel 82 (Ellipsenfläche). Der Isomorphismus $h : (x, y) \mapsto (ax, by)$ mit $a, b > 0$ bildet den Einheitskreis D auf die Ellipse mit den Halbachsen a und b ab. Deren Fläche ist deshalb gleich der Fläche π des Einheitskreises mal $|\det h| = ab$:

$$F = \int \chi_{h(D)} d\mu_2 = \int (\chi_{h(D)} \circ h) ab d\mu_2 = ab \int \chi_D d\mu_2 = ab\pi.$$

□

Wenn h kein Automorphismus, sondern ein Diffeomorphismus, also eine stetig differenzierbare Abbildung mit stetig differenzierbarem Inversen ist, liefert die allgemeine Philosophie der

Differentialrechnung sofort eine Vermutung, wie man diese Formel verallgemeinern sollte: Statt der Determinante von h sollte wohl die Determinante der Ableitung von h auftreten:

$$\int f d\mu_n = \int (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n.$$

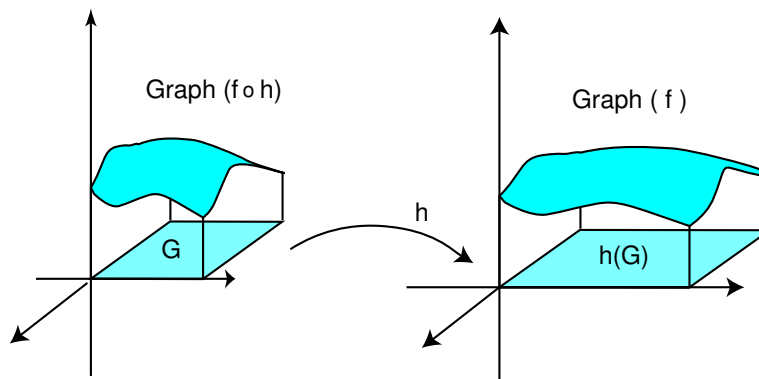
Der Beweis dieser Formel ist unser Ziel in den folgenden Abschnitten. Wenn wir f nur über einen Bereich $h(G)$ integrieren wollen, müssen wir f ersetzen durch $f\chi_{h(G)}$. Es ergibt sich

$$\int f\chi_{h(G)} d\mu_n = \int ((f\chi_{h(G)}) \circ h) |\det Dh| d\mu_n = \int (f \circ h)\chi_G |\det Dh| d\mu_n$$

oder, nach Seitenvertauschung,

$$\int_G (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n = \int_{h(G)} f d\mu_n.$$

Für das Verständnis des Transformationssatzes ist es überaus hilfreich, sich diese Formel an der folgenden Skizze klarzumachen. Die Determinante liefert die Verzerrung der Grundfläche, während die Ordinaten, also die Funktionswerte, bei der Transformation $f \mapsto f \circ h$ unverändert bleiben.



6.2 Verzerrung durch C^1 -Diffeomorphismen

- Die infinitesimale Volumenverzerrung eines Diffeomorphismus wird durch lineare Approximation berechnet und ist deshalb gegeben durch die Determinante der Funktionalmatrix.
- Die globale Volumenverzerrung eines Diffeomorphismus ergibt sich durch Integration der infinitesimalen Verzerrung.

Die beiden folgenden Lemmata beschreiben infinitesimal und global die Volumenverzerrung von Würfeln durch C^1 -Diffeomorphismen⁴:

Lemma 83 (Infinitesimale Würfelverzerrung). *Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $h : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $p \in G$ und $D_p h$ bijektiv. Sei (W_i) eine Folge kompakter, nicht entarteter⁵ Würfel in G mit*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam } W_i = 0 \quad \text{und} \quad p \in \bigcap W_i.$$

Dann sind die $h(W_i)$ kompakt, also integrierbar, und

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(h(W_i))}{\mu_n(W_i)} = |\det D_p h|.$$

Beweis. 1. Schritt. Wir können o.E. annehmen, dass $D_p h = \text{id}$.

Sonst setzen wir $g := (D_p h)^{-1}$. Dann ist

$$\frac{\mu_n(h(W_i))}{\mu_n(W_i)} = \frac{\mu_n(h(W_i))}{\mu_n(g \circ h(W_i))} \frac{\mu_n(g \circ h(W_i))}{\mu_n(W_i)} \stackrel{\text{Lemma 80}}{=} |\det D_p h| \frac{\mu_n(g \circ h(W_i))}{\mu_n(W_i)}$$

und $D_p(g \circ h) = \text{id}$.

2. Schritt. Sei also $D_p h = \text{id}$. Dann folgt aus der stetigen Differenzierbarkeit und dem Schrankensatz, dass es zu jedem $\epsilon \in]0, 1[$ eine Umgebung U von p gibt, so dass für alle $q, q' \in U$

$$\|h(q) - h(q')\| \leq (1 + \epsilon)\|q - q'\|.$$

Mit dem Umkehrsatz erhält man ebenso eine Umgebung, auf der

$$\|q - q'\| \leq \frac{1}{1 - \epsilon}\|h(q) - h(q')\|.$$

Nach eventueller Verkleinerung von U erhalten wir für alle $q, q' \in U$

$$(1 - \epsilon)\|q - q'\| \leq \|h(q) - h(q')\| \leq (1 + \epsilon)\|q - q'\|.$$

Weil wir mit der Supremumsnorm arbeiten, bedeutet das aber für alle Würfel $W(q, r) \subset U$, dass

$$W(h(q), (1 - \epsilon)r) \subset h(W(q, r)) \subset W(h(q), (1 + \epsilon)r).$$

⁴ Zur Erinnerung: C^1 -Diffeomorphismen sind bijektive, stetig differenzierbare Abbildungen mit stetig differenzierbarem Inversen.

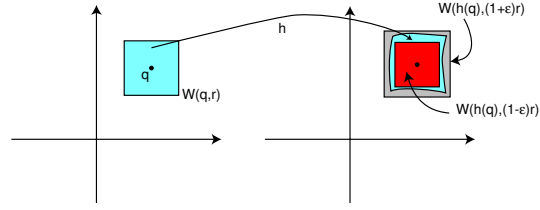
⁵D.h. mit positiver Kantenlänge, also $\mu_n(W_i) > 0$.

Also ist

$$(1-\epsilon)^n (2r)^n \leq \mu_n(h(W(q,r))) \leq (1+\epsilon)^n (2r)^n$$

und deshalb

$$(1-\epsilon)^n \leq \frac{\mu_n(h(W(p,r)))}{\mu_n(W(p,r))} \leq (1+\epsilon)^n.$$



Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 84 (Globale Würfelverzerrung). *Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Sei W ein kompakter Würfel in G . Dann ist $h(W)$ kompakt, also integrierbar, $|\det Dh| \in \mathcal{L}^1(W, \mu_n)$ und*

$$\mu_n(h(W)) = \int_W |\det Dh| d\mu_n. \quad (25)$$

Vergleichen Sie das mit Lemma 80.

Die Gleichung (25) können wir auch schreiben als

$$\int_{h(G)} \chi_{h(W)} d\mu_n = \int_G (\chi_{h(W)} \circ h) |\det Dh| d\mu_n. \quad (26)$$

Beweis von Lemma 84. Sei L die Kantenlänge von W . Wir unterteilen W durch fortgesetzte Halbierung. Zu jedem k erhalten wir so 2^{kn} kompakte fast-disjunkte Würfel $(W_{kj})_{1 \leq j \leq 2^{kn}}$ der Kantenlänge $L/2^k$, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$W = \bigcup_{j=1}^{2^{kn}} W_{kj} \quad \text{und} \quad \chi_W = \mu_n \sum_{j=1}^{2^{kn}} \chi_{W_{kj}}.$$

Weil h injektiv und nach Lemma 79 nullmengentreu ist, folgt

$$\chi_{h(W)} = \mu_n \sum_{j=1}^{2^{kn}} \chi_{h(W_{kj})}.$$

Wir definieren eine Folge von Treppenfunktionen

$$f_k := \sum_{j=1}^{2^{kn}} \frac{\mu_n(h(W_{kj}))}{\mu_n(W_{kj})} \chi_{W_{kj}}.$$

Zunächst wollen wir zeigen, dass diese Folge μ_n -konvergent ist. Die Vereinigung der Ränder aller W_{kj} bildet eine Nullmenge N . Für $x \in W \setminus N$ gibt es zu jedem k genau ein $j(k)$ mit $x \in W_{kj(k)}$. Dann ist also

$$f_k(x) = \frac{\mu_n(h(W_{kj(k)}))}{\mu_n(W_{kj(k)})}.$$

Für $x \in W \setminus N$ folgt aus Lemma 83, dass $\lim f_k(x) = |\det D_x h|$, also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \mu_n \chi_W |\det Dh|.$$

Weiter ist

$$\int f_k d\mu_n = \sum_{j=1}^{2^{kn}} \mu_n(h(W_{kj})) = \mu_n(h(W)) = \int \chi_{h(W)} d\mu_n.$$

Die Behauptung ergibt sich daher aus dem Satz von Lebesgue, falls die f_k von einer integrierbaren Funktion dominiert werden. Mit $M := \sup_{x \in W} \|D_x h\|$ liegt aber jedes $h(W_{kj})$ nach dem Schrankensatz in einem Würfel der M -fachen Kantenlänge, also des M^n -fachen Volumens, und es folgt

$$0 \leq f_k \leq M^n \chi_W \in \mathcal{L}^1(\mu_n).$$

□

Beispiel 85. Wie man einen Isomorphismus von \mathbb{R}^n auf einen Vektorraum deuten kann als ein *Koordinatensystem* in diesem Vektorraum, so kann man allgemeiner auch Diffeomorphismen als (sogenannte “krummlinige”) Koordinaten interpretieren. Wir betrachten ebene Polarkoordinaten.

Sei $h : \mathbb{R}^2 \supset]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ der Diffeomorphismus

$$h(\rho, \phi) := (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi).$$

ρ und ϕ heißen die *Polarkoordinaten* des Punktes $h(\rho, \phi)$. Die Funktionalmatrix im Punkt (ρ, ϕ) ist

$$h'(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{pmatrix}$$

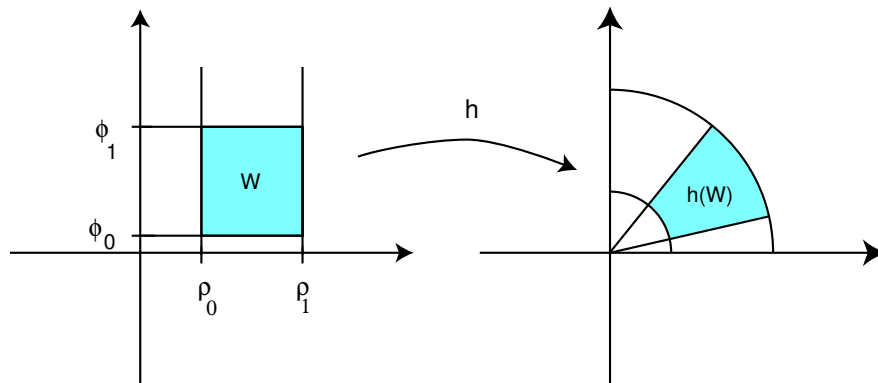
Die Funktionaldeterminante ist

$$|\det D_{(\rho, \phi)} h| = \det D_{(\rho, \phi)} h = \rho.$$

Nach Lemma 83 wird also ein kleines Quadrat an der Stelle (ρ, ϕ) durch h abgebildet auf eine Menge vom annähernd ρ -fachen Flächeninhalt.

Für große Quadrate erhält man die Flächenverzerrung nach Lemma 84 durch Integration, und mit dem Satz von Fubini ergibt sich für $0 < \rho_0 < \rho_1$ und $0 < \phi_0 < \phi_1 < 2\pi$

$$\mu_2(h([\rho_0, \rho_1] \times [\phi_0, \phi_1])) = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \int_{\rho_0}^{\rho_1} \rho d\rho d\phi = \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_0)(\rho_1^2 - \rho_0^2).$$



Schreibt man die linke Seite als μ_2 -Integral und (in Anlehnung an den Satz von Fubini) $d\mu_2 = dx dy$, so ergibt sich

$$\int_{h(W)} dx dy = \int_W \rho d\rho d\phi.$$

Das kodiert man gern in der Formel

$$dx dy = \rho d\rho d\phi.$$

Man sagt das *Flächenelement in Polarkoordinaten* sei $\rho d\rho d\phi$.

Beachten Sie: h ist *kein* Diffeomorphismus auf der abgeschlossenen Menge $[0, \infty[\times [0, 2\pi]$, und deshalb können wir nicht $\rho_0 = \phi_0 = 0$ und $\phi_1 = 2\pi$ setzen, um die Kreisfläche zu errechnen. Das ist ärgerlich und muss noch “repariert” werden. Vergleichen sie dazu den *Zusatz* in der folgenden endgültigen Version des Transformationsatzes und das Beispiel 88. □

Beispiel 86 (Allgemeine Kugelkoordinaten). Für die Funktionaldeterminante der verallgemeinerten Kugelkoordinaten

$$h_n : \mathbf{R}^n \supset [0, \infty[\times [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

mit

$$\begin{aligned} h_2(r, \phi) &:= r(\cos \phi, \sin \phi), \\ h_3(r, \theta_1, \phi) &:= r(\cos \phi \sin \theta_1, \sin \phi \sin \theta_1, \cos \theta_1) \\ &= r(h_2(1, \phi) \sin \theta_1, \cos \theta_1), \\ h_{n+1}(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}, \phi) &:= r(h_n(1, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi) \sin \theta_{n-1}, \cos \theta_{n-1}) \end{aligned}$$

gilt

$$|\det Dh_n| = r^{n-1} (\sin^1 \theta_1 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-2}).$$

Insbesondere gilt für die 3-dimensionalen Kugelkoordinaten $h_3(r, \theta, \phi)$

$$|\det Dh_3| = r^2 \sin \theta.$$

Beweis. Durch Induktion.

Induktionsanfang klar.

Induktionsschritt. Es ist

$$Dh_{n+1} = \begin{pmatrix} h_n(1, \dots) \sin \theta_{n-1} & r \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} \sin \theta_{n-1} & \dots & r \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_{n-2}} \sin \theta_{n-1} & r h_n(1, \dots) \cos \theta_{n-1} & r \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \phi} \sin \theta_{n-1} \\ \cos \theta_{n-1} & 0 & \dots & 0 & -r \sin \theta_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass in der ersten Zeile n -reihige Vektoren stehen, so dass diese Matrix “ordnungsgemäß” vom Format $(n+1) \times (n+1)$ ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} |\det Dh_{n+1}| &= \pm r^n \sin^{n-1} \theta_{n-1} \left| \begin{array}{cccccc} h_n(1, \dots) \sin \theta_{n-1} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} & \dots & h_n(1, \dots) \cos \theta_{n-1} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \phi} \\ \cos \theta_{n-1} & 0 & \dots & -\sin \theta_{n-1} & 0 \end{array} \right| \\ &= \pm \frac{r^n \sin^{n-2} \theta_{n-1}}{\cos \theta_{n-1}} \left| \begin{array}{cccccc} h_n(1, \dots) \sin^2 \theta_{n-1} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} & \dots & h_n(1, \dots) \cos^2 \theta_{n-1} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \phi} \\ \cos \theta_{n-1} \sin \theta_{n-1} & 0 & \dots & -\sin \theta_{n-1} \cos \theta_{n-1} & 0 \end{array} \right| \\ &= \pm \frac{r^n \sin^{n-1} \theta_{n-1}}{\cos \theta_{n-1}} \left| \begin{array}{cccccc} h_n(1, \dots) \sin \theta_{n-1} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} & \dots & h_n(1, \dots) & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \phi} \\ \cos \theta_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right| \\ &= \pm r^n \sin^{n-1} \theta_{n-1} \left| \begin{array}{cccc} h_n(1, \dots) & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_{n-2}} \\ \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \theta_{n-2}} & \frac{\partial h_n(1, \dots)}{\partial \phi} \end{array} \right| \\ &= \pm r^n (\sin^{n-1} \theta_{n-1}) |\det Dh_n(1, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \phi)| \\ &= r^n (\sin^{n-1} \theta_{n-1}) \dots (\sin^1 \theta_1). \end{aligned}$$

□

6.3 Der Transformationssatz

- Wir haben früher die Volumenverzerrung durch lineare Isomorphismen berechnet und daraus den Transformationssatz 81 für Integrale gewonnen.
- Nachdem die Volumenverzerrung durch Diffeomorphismen geklärt ist, können wir daraus ebenso den Transformationssatz für Integrale gewinnen, also Integrale in andere Koordinatensysteme umschreiben.

Wir verallgemeinern (26) auf beliebige Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ anstelle von $\chi_{h(W)}$.

Satz 87 (Transformationssatz). Sei $h : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv und stetig differenzierbar auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

(i) $h(G)$ ist μ_n -messbar.

(ii) Ist $f \in \mathcal{L}^1(h(G), \mu_n)$, so ist $(f \circ h)|\det Dh| \in \mathcal{L}^1(G, \mu_n)$ und

$$\int_{h(G)} f d\mu_n = \int_G (f \circ h)|\det Dh| d\mu_n.$$

Zusatz: Die Injektivitätsforderung darf h auf einer Nullmenge auch verletzen:

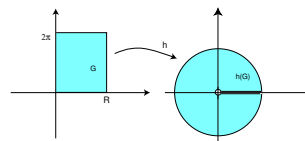
Ist h stetig differenzierbar auf einer offenen Umgebung der μ_n -messbaren (aber nicht notwendig offenen) Menge G , und ist $N \subset G$ eine μ_n -Nullmenge, so dass

$$G \setminus N \text{ offen und } h|_{G \setminus N} \text{ injektiv,}$$

so gelten ebenfalls die obigen Behauptungen.

Beispiel 88. Eine typische Situation, in der sich der Zusatz als nützlich erweist, sind die Polarkoordinaten, vgl. Beispiel 85:

$$\begin{aligned} h(\rho, \phi) &= (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) \text{ für } (\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2, \\ G &= [0, R] \times [0, 2\pi] \\ N &= \partial G = G \setminus (]0, R[\times]0, 2\pi[). \end{aligned}$$



h ist auf dem Inneren von G ein Diffeomorphismus, nicht aber auf ganz G . Aber wenn man mit der Idee aus Beispiel 85 die Kreisfläche berechnen will, möchte man $\rho_0 = \phi_0 = 0$, $\rho_1 = R$ und $\phi_1 = 2\pi$ setzen. Darf man auch, weil die Injektivität nur auf einer Nullmenge, nämlich dem Rand ∂G , verletzt ist.

□

Der Beweis des Transformationssatzes gliedert sich entsprechend den Voraussetzungen über h in drei Teile

Teil A: h ist ein C^1 -Diffeomorphismus der offenen Menge G .

Teil B: h ist eine injektive C^1 -Abbildung der offenen Menge G .

Teil C: h ist wie im Zusatz.

Beweis des Transformationssatzes: Teil A. Sei also G offen und

$$h : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow h(G) \subset \mathbb{R}^n$$

ein C^1 -Diffeomorphismus. Wir stellen zunächst fest, dass dann $h(G)$ offen und damit μ_n -messbar ist.

A.1 Sei $f = \chi_A$ für ein beschränktes, offenes $A \subset h(G)$. Dann läßt sich die offene Menge $h^{-1}(A) \subset G$ schreiben als Vereinigung einer fast-disjunkten Folge kompakter Würfel W_j in G . Dann gilt also

$$\chi_{h^{-1}(A)} =_{\mu_n} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{W_j}$$

und, weil h nullmengentreu ist,

$$\chi_A =_{\mu_n} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{h(W_j)}.$$

Nach Lemma 84 gilt für die Partialsummen

$$\int \left(\sum_{j=0}^k \chi_{h(W_j)} \right) d\mu_n = \int \left(\sum_{j=0}^k (\chi_{h(W_j)} \circ h) |\det Dh| \right) d\mu_n,$$

und weil $\sum_{j=0}^k \chi_{h(W_j)} \leq \chi_A$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, ist diese Integralfolge beschränkt. Anwendung des Satzes von Beppo Levi auf beide Seiten liefert daher

$$\int f d\mu_n = \int (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n,$$

und das ist dasselbe(!) wie

$$\int_{h(G)} f d\mu_n = \int_G (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n.$$

A.2 Nun sei $f = \chi_{h(G)} g$ für eine Treppenfunktion $g = \sum_{i=0}^k c_i \chi_{I_i}$. Dann ist

$$f =_{\mu_n} \sum c_i \chi_{I_i^0 \cap h(G)}$$

und die Behauptung folgt aus A.1 und der Linearität des Integrals.

A.3 Sei $f = \chi_{h(G)} g$ mit $g \in \mathcal{L}_+^1(\mu_n)$, und sei $(g_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit μ_n -Limes g . Dann ist $f =_{\mu_n} \lim \chi_{h(G)} g_j$, und wegen der Nullmengentreue von h^{-1} auch $f \circ h =_{\mu_n} \lim (\chi_{h(G)} g_j) \circ h$. Nach A.3 gilt für jedes $j \in \mathbb{N}$

$$\int \chi_{h(G)} g_j d\mu_n = \int ((\chi_{h(G)} g_j) \circ h) |\det Dh| d\mu_n.$$

Weil $\chi_{h(G)} g_j \leq_{\mu_n} \chi_{h(G)} g \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$, ist diese Integralfolge beschränkt, und nach Beppo Levi gilt

$$\int \chi_{h(G)} g d\mu_n = \int ((\chi_{h(G)} g) \circ h) |\det Dh| d\mu_n,$$

also

$$\int_{h(G)} f d\mu_n = \int_G (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n.$$

A.4 Ist schließlich $f \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ beliebig, so folgt die Behauptung aus A.3 und der Linearität des Integrals. \square

Beweis des Transformationssatzes: Teil B. Wir verlangen nun nicht mehr, dass h ein Diffeomorphismus ist, sondern nur eine injektive C^1 -Abbildung. Sei

$$K := \{x \mid D_x h \text{ nicht bijektiv}\}.$$

K ist abgeschlossen, also $G \setminus K$ offen und damit messbar. Wir zeigen später im Satz 93 (Lemma von Sard), dass

$$h(K) \text{ eine } \mu_n\text{-Nullmenge}$$

ist. Wegen $h(G \setminus K) \subset h(G) \subset h(G \setminus K) \cup h(K)$ ist dann

$$\chi_{h(G \setminus K)} \stackrel{=}{=}_{\mu_n} \chi_{h(G)}.$$

Ist also $f \in \mathcal{L}^1(h(G), \mu_n)$, so auch $f \in \mathcal{L}^1(h(G \setminus K), \mu_n)$ und

$$\begin{aligned} \int_{h(G)} f d\mu_n &= \int_{h(G \setminus K)} f d\mu_n \\ &= \int_{G \setminus K} (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n \\ &= \int_{G \setminus K} (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n + \underbrace{\int_K (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n}_{=0} \\ &= \int_G (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n. \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir verwendet, dass $\chi_{G \setminus K} + \chi_K = \chi_G$. \square

Beweis des Transformationssatzes: Teil C. Wir beweisen nun den Zusatz.

$G \setminus N$ ist offen, also messbar, und damit ist auch G messbar. Weiter ist

$$h(G \setminus N) \subset h(G) \subset h(G \setminus N) \cup h(N),$$

und $h(N)$ ist nach Lemma 79 eine Nullmenge. Nach Teil A und B ist $h(G \setminus N)$ messbar, also ist auch $h(G)$ messbar. Weiter ist

$$\int_{h(G)} f d\mu_n = \int_{h(G \setminus N)} f d\mu_n \stackrel{\text{Teil B}}{=} \int_{G \setminus N} (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n = \int_G (f \circ h) |\det Dh| d\mu_n.$$

\square

Beispiel 89. Für einen Diffeomorphismus $x : [a, b] \rightarrow x([a, b]) \subset \mathbb{R}$ und eine Regelfunktion $f : x([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ besagt die Substitutionsregel:

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \int_a^b f(x(t)) x'(t) dt.$$

Vergleichen Sie das mit dem Transformationssatz. Warum steht hier $x'(t)$ statt $|x'(t)|$?

\square

Beispiel 90 (Bewegungsinvarianz). Translationen und orthogonale Abbildungen des \mathbb{R}^n sind Diffeomorphismen mit Funktionaldeterminante vom Absolutbetrag 1. Also erhalten sie das Lebesguemaß integrierbarer Mengen. Das Lebesguemaß ist *bewegunsinvariant*.

□

Beispiel 91 (Gaußsches Fehlerintegral). Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$ ist stetig, und daher für jedes $R > 0$ integrierbar über den abgeschlossenen Kreis B_R vom Radius R . Anwendung des Transformationssatzes mit Polarkoordinaten liefert

$$\int_{B_R} f d\mu_2 = \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} e^{-\rho^2} \rho d\mu_2 = \int_{[0,R] \times [0,2\pi]} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi.$$

Darauf wenden wir den Fubini an und schreiben die 1-dimensionalen Lebesgueintegrale in Regelintegrale um

$$\int_{B_R} f d\mu_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\phi = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-R^2}}{2} \right).$$

Wir betrachten nun den Fall $R = n \in \mathbb{N}$ und wenden auf die Folge $(\chi_{B_n} f)_{n \in \mathbb{N}}$ den Satz von Beppo Levi an. Er liefert

$$\int f d\mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_n} f d\mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(1 - e^{-n^2}) = \pi.$$

Andrerseits wissen wir aus Beispiel 62

$$\int f d\mu_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2$$

und finden

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Dies ist das in der Statistik sehr wichtige Integral der Gaußschen Verteilung. Es läßt sich „eindimensional“ nicht leicht finden, e^{-t^2} hat keine elementare Stammfunktion.

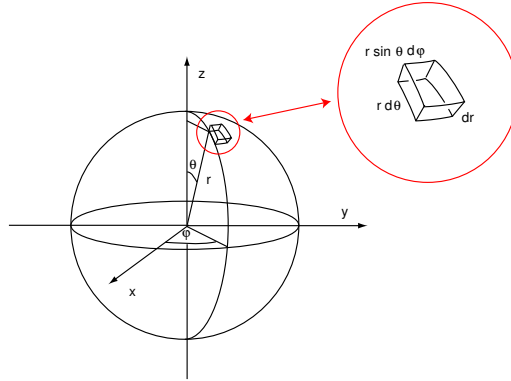


□

Beispiel 92 (Trägheitsmoment der homogenen Hohlkugel). Die Kugelkoordinaten oder sphärischen Polarkoordinaten $h : [0, \infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$h(r, \theta, \phi) := (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

sind ein Diffeomorphismus auf $]0, \infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$, und die Funktionaldeterminante ist nach Beispiel 86 gegeben durch $r^2 \sin \theta$.



Wir berechnen damit das Trägheitsmoment einer homogenen Hohlkugel K mit Radien $a < b$ und der Massendichte m bezüglich der z -Achse durch den Mittelpunkt, welches definiert ist durch

$$\Theta = \int_K m(x^2 + y^2) d\mu_3.$$

Anwendung des Transformationssatzes auf sphärische Polarkoordinaten und Fubini ergibt:

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} m r^2 \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} m r^4 \sin^3 \theta d\phi d\theta dr \\ &= 2\pi m \frac{b^5 - a^5}{5} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{8m\pi}{15} (b^5 - a^5). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Gesamtmasse $M = m \frac{4}{3}\pi(b^3 - a^3)$ erhält man

$$\Theta = \frac{2}{5} M \frac{b^5 - a^5}{b^3 - a^3}.$$

Rollt die Kugel auf einer schiefen Ebene der Neigung α , und bezeichnet ψ den Rotationswinkel, so ergibt sich die Bewegungsgleichung aus dem Energieerhaltungssatz:

$$\frac{M}{2}(b\dot{\psi})^2 + \frac{\Theta}{2}\dot{\psi}^2 = Mgb\psi \sin \alpha \quad \implies \quad \psi(t) = \frac{Mgb \sin \alpha}{2(Mb^2 + \Theta)} t^2.$$

Die Laufzeit T für die Strecke $S = b\psi(T)$ erfüllt dann

$$T^2 = \frac{2S}{g \sin \alpha} \left(1 + \frac{\Theta}{Mb^2}\right).$$

Durch ein Laufzeit-Experiment lassen sich also das Trägheitsmoment Θ und damit der innere Radius a aus den leicht zu messenden Hohlkugel-Parametern M und b bestimmen.

□

6.4 Das Lemma von Sard

- Es scheint plausibel, dass Mengen, auf denen der Rang einer differenzierbaren Abbildung $< n$ ist, auf Mengen einer Dimension $< n$ abgebildet werden, aber es ist natürlich gar nicht klar, was das eigentlich bedeuten soll. Das Lemma von Sard gibt eine Präzisierung, die wir im Beweis zum Transformationssatz bereits benutzt haben.

Satz 93 (Lemma von Sard). Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $h : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei

$$K := \{x \mid \det D_x h = 0\}.$$

Dann ist die Menge der kritischen Werte $h(K)$ von h eine μ_n -Nullmenge.

Beweis. Wir verwenden die Euklidische Norm auf \mathbb{R}^n , weil wir die Bewegungsinvarianz von μ_n brauchen werden.

Weil die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen eine Nullmenge ist, genügt es nach dem Ausschöpfungslemma 77 zu zeigen, dass $h(K \cap W)$ für jeden kompakten Würfel $W \subset G$ eine μ_n -Nullmenge ist. Sei W also ein solcher Würfel, sei

$$M := \sup_{x \in W} \|D_x h\|,$$

und sei

$$\epsilon > 0.$$

Die Funktion $\|Dh\|$ ist stetig auf der kompakten Menge W , also gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu dem gegebenen ϵ eine Zerlegung von W in k^n kompakte Würfel $W_j, j \in \{1, \dots, k^n\}$, mit

$$W = \bigcup_{j=1}^{k^n} W_j, \quad \text{diam } W_j = \frac{\text{diam } W}{k},$$

so dass für alle j gilt

$$x, y \in W_j \implies \|D_y h - D_x h\| < \epsilon. \quad (27)$$

Für alle Komponentenfunktionen h_i von h , alle $j \in \{1, \dots, k^n\}$ und alle x, y in W_j gilt nach dem Schrankensatz

$$|h_i(y) - h_i(x)| \leq \|h(y) - h(x)\| \leq M \|y - x\| \leq M \frac{\text{diam } W}{k}. \quad (28)$$

Nun sei $x \in K \cap W_j$, also $D_x h(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^n$, und wir nehmen zunächst an, dass

$$D_x h(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}. \quad (29)$$

Dann gilt für die letzte Komponente h_n und $y \in W_j$

$$\begin{aligned} |h_n(y) - h_n(x)| &= |h_n(y) - h_n(x) - \underbrace{D_x h_n(y-x)}_{=0}| \\ &\leq \|h(y) - h(x) - D_x h(y-x)\| \\ &= \|(h(y) - D_x h(y)) - (h(x) - D_x h(x))\|. \end{aligned}$$

Der Schrankensatz angewendet auf die Funktion $y \mapsto h(y) - D_x h(y)$ liefert dann

$$|h_n(y) - h_n(x)| \leq \sup_{q \in xy} \|D_q h - D_x h\| \|y - x\| \leq \epsilon \frac{\text{diam } W}{k}. \quad (30)$$

Nach (28) und (30) ist die kompakte Menge $h(W_j)$ also enthalten in einem Intervall vom Volumen

$$\left(M \frac{\text{diam } W}{k}\right)^{n-1} 2\epsilon \frac{\text{diam } W}{k} = 2\frac{\epsilon}{k^n} M^{n-1} (\text{diam } W)^n.$$

Ohne die Voraussetzung (29) ist $D_x h(\mathbb{R}^n)$ enthalten in einer anderen Hyperebene des \mathbb{R}^n , die man aus $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ durch eine Drehung erhalten kann. Wegen der Bewegungsinvarianz von μ_n , vergleiche Beispiel 90, gilt dann auch in diesem Fall

$$\mu_n(h(W_j)) \leq 2\frac{\epsilon}{k^n} M^{n-1} (\text{diam } W)^n.$$

Das gilt für alle j mit $K \cap W_j \neq \emptyset$, insgesamt aber für höchstens k^n Indizes.

Weil $h(K \cap W) \subset \bigcup_{K \cap W_j \neq \emptyset} h(W_j)$ und alle diese Mengen integrierbar sind, folgt

$$\mu_n(h(K \cap W)) \leq \mu_n\left(\bigcup_{K \cap W_j \neq \emptyset} h(W_j)\right) \leq 2\epsilon M^{n-1} (\text{diam } W)^n$$

für jedes $\epsilon > 0$. Also ist $\mu_n(h(K \cap W)) = 0$ und die Behauptung bewiesen. □

Bemerkung. Für differenzierbare Abbildungen auch zwischen Räumen verschiedener Dimension

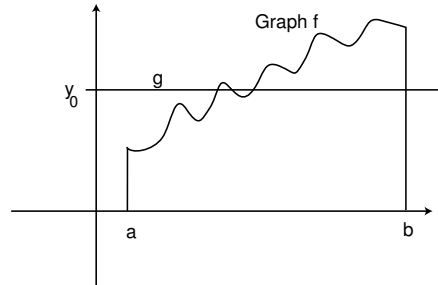
$$f : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^m$$

heißen Punkte, in denen das Differential nicht surjektiv ist, *kritische Punkte* und ihre Bilder *kritische Werte*. Das Lemma von Sard (1942) in seiner vollen Form besagt, dass auch in diesem Fall die Menge der kritischen Werte eine Lebesgue-Nullmenge ist, wobei man (merkwürdiger Weise) voraussetzen muss, dass die Abbildung f mehr als $\max(0, n - m)$ -mal stetig differenzierbar ist. (Vgl. z.B. Bröcker/Jänich, Einführung in die Differentialtopologie, Springer-Verlag).

Es gibt ein Beispiel (von H. Whitney 1935) für eine C^1 -Funktion von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} , deren kritische Wertemenge ein nicht-degeneriertes Intervall enthält. Für C^2 -Funktionen ist das unmöglich.

Beispiel 94 (Transversalität). Das Lemma von Sard spielt im Zusammenhang mit dem Begriff der *Transversalität* eine wichtige Rolle in der Differentialtopologie. Wir geben dafür ein einfachstes Beispiel.

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(a) < f(b)$. Nach dem Lemma von Sard ist $f(K) = \{f(t) \mid f'(t) = 0\}$ eine μ_1 -Nullmenge in \mathbb{R} und deshalb ist $[f(a), f(b)] \setminus f(K) \neq \emptyset$. Liegt y_0 in dieser Menge, so schneidet die Gerade $y = y_0$ den Graphen von f transversal: In keinem Schnittpunkt ist die Gerade tangential an den Graphen. Das Lemma von Sard liefert also die Existenz transversaler (horizontaler) Geraden.



□

7 Räume integrierbarer Funktionen

- Wir machen einen Ausflug in die Funktionalanalysis.

7.1 Die L^p -Räume

- Konvergenz von Folgen hatten wir in der Analysis II mittels Metrik, Topologie oder Norm erklärt. Die in den Konvergenzsätzen benutzte punktweise Konvergenz fast überall ist von etwas anderer Natur, nur die gleichmäßige Konvergenz ließ sich als Konvergenz in der Supremumsnorm verstehen.
- Wir definieren deshalb auf verschiedenen Räumen integrierbarer Funktionen, die für die Praxis der numerischen Mathematik oder der partiellen Differentialgleichungen von großer Wichtigkeit sind, auch Normen und damit neue Konvergenzbegriffe.
- Wir werden diese Konvergenz im Zusammenhang mit den Fourierreihen im nächsten Kapitel noch benötigen.

Im folgenden sei ϕ wieder ein beliebiges Maß auf \mathbb{R}^n . Weiter seien $A \subset \mathbb{R}^n$ eine ϕ -messbare Menge und $p \geq 1$.

Definition 95. (i) Wir setzen

$$\mathcal{L}^p(A, \phi) := \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \phi\text{-messbar und } |f|^p \text{ ist } \phi\text{-integrierbar über } A\}.$$

(ii) Für $f \in \mathcal{L}^p(A, \phi)$ definieren wir

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\phi \right)^{1/p}.$$

Die Definition stimmt für $p = 1$ mit der bisherigen überein: f ist genau dann integrierbar, wenn es messbar und $|f|$ integrierbar ist.

Die Menge $\mathcal{L}^p(A, \phi)$ ist ein Vektorunterraum vom Raum aller Abbildungen von A nach \mathbb{R} . Natürlich ist sie abgeschlossen unter der Multiplikation mit reellen Zahlen, also muss man nur zeigen, dass mit $f, g \in \mathcal{L}^p(A, \phi)$ auch $f + g \in \mathcal{L}^p(A, \phi)$. Aber $f + g$ und $|f + g|^p$ sind ϕ -messbar, und weil

$$|f + g|^p \leq (2 \sup(|f|, |g|))^p = 2^p \sup(|f|^p, |g|^p) \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$$

ist $|f + g|^p$ nach Satz 54 auch ϕ -integrierbar.

Wir erinnern an ein Resultat aus der Analysis I:

Für $a, b \geq 0$ und $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (31)$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung haben wir den folgenden Satz in einer diskreten Version bereits in der Analysis I bewiesen:

Satz 96 (Höldersche Ungleichung). Seien $p, q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Seien $f \in \mathcal{L}^p(A, \phi)$ und $g \in \mathcal{L}^q(A, \phi)$. Dann ist $fg \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$ und

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Beweis. Ist $\|f\|_p = 0$, so folgt $\int |f|^p d\phi = 0$, also $f =_\phi 0$. Entsprechend für g .

Also o.E. $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Für $x \in A$ gilt nach (31)

$$\underbrace{\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}}_{\phi\text{-messbar}} \leq \underbrace{\frac{1}{p} \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \right)^q}_{\phi\text{-integrierbar}}.$$

Nach Satz 54 folgt daraus $fg \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$. Durch Integration ergibt sich

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \|fg\|_1 \leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int |f|^p d\phi + \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int |g|^q d\phi = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

□

Satz 97 (Minkowskische Ungleichung). Für $p \geq 1$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(A, \phi)$ gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Beweis. Für $p = 1$ ist das trivial.

Sei also $p > 1$ und sei $q = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beachten Sie, dass dann $p-1 = \frac{p}{q}$.

Also gilt

$$f \in \mathcal{L}^p \implies |f|^{p-1} \in \mathcal{L}^q.$$

Für $f, g \in \mathcal{L}^p$ folgt

$$|f + g|^p = |f + g| |f + g|^{p-1} \leq \underbrace{|f|}_{\in \mathcal{L}^p} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\in \mathcal{L}^q} + \underbrace{|g|}_{\in \mathcal{L}^p} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{\in \mathcal{L}^q}$$

und nach der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_A |f + g|^p d\phi &\leq \|f\|_p \|(|f + g|^{p-1})\|_q + \|g\|_p \|(|f + g|^{p-1})\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_A |f + g|^p d\phi \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Falls $|f + g| =_\phi 0$ ist, ist die Behauptung trivial. Andernfalls folgt nach Division durch $\left(\int_A |f + g|^p d\phi \right)^{\frac{1}{q}}$ die Behauptung. □

Es sieht so aus, als sei $\|\dots\|_p$ für $p \geq 1$ eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^p(A, \phi)$. Offenbar gilt

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p,$$

und nach dem letzten Satz gilt die Dreiecksungleichung. Allerdings folgt aus $\|f\|_p = 0$ nach dem Korollar zum Satz von Beppo Levi nur $f =_\phi 0$ und nicht $f = 0$, wie sich das für eine Norm gehören würde. $\|\cdot\|_p$ ist also nur eine sogenannte *Halbnorm*.

Definition 98. Die Menge

$$\mathcal{N}(A, \phi) := \{f : A \rightarrow \mathbb{R} \mid f =_\phi 0\}$$

ist für jedes $p > 0$ ein Untervektorraum von $\mathcal{L}^p(A, \phi)$. Wir bezeichnen den Quotientenvektorraum nach diesem Unterraum mit

$$L^p(A, \phi) := \mathcal{L}^p(A, \phi) / \mathcal{N}(A, \phi).$$

Für $p \geq 1$ induziert dann $\|\dots\|_p$ auf $L^p(A, \phi)$ eine Norm.

Bemerkung. In der Praxis wird die Unterscheidung zwischen \mathcal{L}^p und L^p sehr großzügig gehandhabt. Man sagt oft „Sei $f \in L^p$ “ wenn man eigentlich meint „Sei $f \in \mathcal{L}^p$ “, wenn also f eine *Funktion* und nicht eine *Äquivalenzklasse von Funktionen* sein soll. Wir werden uns dieser (Un)sitte anschließen.

Beispiel 99 (Hilbertraum). Für $p = 2$ wird die Norm auf $\mathcal{L}^2(A, \phi)$ durch ein positiv definites Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int fg d\phi$$

geliefert. Der Raum $\mathcal{L}^2(A, \phi)$ heißt auch *der Hilbertraum der quadrat-integrierbaren Funktionen*.

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ ist in diesem Fall äquivalent zur Hölderschen Ungleichung.

Für $\phi = \delta_{\mathbb{N}}$ erhält man den Raum der quadrat-summierbaren Folgen, der üblicherweise mit l^2 bezeichnet und „Klein-l-zwei“ genannt wird.

□

Bemerkung zur Integration komplexwertiger Funktionen. Komplexwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{C}$ sind Paare reellwertiger Funktionen:

$$f = u + iv \text{ mit } u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f : \mathbb{R}^n \supset A \rightarrow \mathbb{R}.$$

Man definiert

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(A, \phi) = \{u + iv \mid u, v \in \mathcal{L}^1(A, \phi)\}$$

und für $f = u + iv \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(A, \phi)$

$$\int_A f d\phi := \int_A u d\phi + i \int_A v d\phi.$$

Dafür gelten die elementaren Rechenregeln der Integration. Insbesondere hat man für f wie oben

$$|f| \in \mathcal{L}^1(A, \phi) \quad \text{und} \quad \left| \int_A f d\phi \right| \leq \int_A |f| d\phi.$$

Beweis. Sind $u, v \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$, so ist $\sqrt{u^2 + v^2}$ messbar, und wegen

$$|f| = \sqrt{u^2 + v^2} \leq \sqrt{2} \sup(|u|, |v|) \in \mathcal{L}^1(A, \phi)$$

sogar integrierbar. Sei nun $I := \int_A f d\phi \neq 0$. Dann folgt mit einem schon aus der Analysis 1 bekannten Trick

$$1 = \operatorname{Re} \frac{\int_A f d\phi}{I} = \int_A \operatorname{Re} \frac{f}{I} d\phi \leq \int_A \frac{|f|}{|I|} d\phi,$$

also $|I| \leq \int_A |f| d\phi$. □

Man definiert $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p$ als Menge der komplexwertigen Funktionen mit messbarem Real- und Imaginärteil, für die $|f|^p$ integrierbar ist. Dazu definiert man analog $L_{\mathbb{C}}^p$ und insbesondere $L_{\mathbb{C}}^2$. Auf diesem Raum liefert

$$\langle f, g \rangle := \int f \bar{g} d\phi.$$

ein unitäres Skalarprodukt (=positiv definite Sesquilinearform).

7.2 Die Vollständigkeit der L^p -Räume

- Wir beweisen die Vollständigkeit der L^p -Räume.
- In diesem Zusammenhang beschäftigen wir uns noch einmal mit den verschiedenen Konvergenzbegriffen für Funktionenfolgen und mit den Unterschieden zwischen endlich-dimensionalen und unendlich-dimensionalen Banachräumen.

Im folgenden seien ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n und $A \subset \mathbb{R}^n$ eine ϕ -messbare Menge.

Satz 100 (Fischer-Riesz). Für $p \geq 1$ ist $(L^p(A, \phi), \|\dots\|_p)$ vollständig, also ein Banachraum.

Beweis. Ich schreibe \mathcal{L}^p statt $\mathcal{L}^p(A, \phi)$ und beschränke mich auf den Fall $p > 1$. Der Fall $p = 1$ geht sehr ähnlich, aber es ist eine gute Übung, sich die nötigen Änderungen klar zu machen.

Sei (f_k) eine Cauchyfolge in \mathcal{L}^p . Wir wollen zeigen, dass diese Folge konvergent ist, d.h. dass es eine Limesfunktion $f \in \mathcal{L}^p$ gibt, so dass

$$\lim \|f_k - f\| = 0.$$

1. Schritt. Wir konstruieren zunächst einen Kandidaten für f .

Wegen der Cauchy-Eigenschaft gibt es eine streng monoton wachsende Folge (m_k) mit

$$\|f_l - f_{m_k}\|_p < \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{für alle } l \geq m_k. \quad (32)$$

Wir wollen zeigen, dass $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ϕ -konvergent ist. Dazu schreiben wir

$$f_{m_k} = f_{m_0} + \sum_{j=1}^k (f_{m_j} - f_{m_{j-1}}).$$

Es genügt zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} (f_{m_j} - f_{m_{j-1}})$ fast überall absolut konvergent ist, es genügt sogar, das auf jedem beschränkten Intervall $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen. Dazu benutzen wir den Satz von Beppo Levi.

Weil $\chi_I \in \mathcal{L}^q$ für $q := \frac{p}{p-1}$ ist, ist nach der Hölderschen Ungleichung

$$|f_{m_j} - f_{m_{j-1}}| \chi_I \in \mathcal{L}^1.$$

und

$$\int \left(\sum_{j=1}^k |f_{m_j} - f_{m_{j-1}}| \chi_I \right) d\phi = \sum_{j=1}^k \int |f_{m_j} - f_{m_{j-1}}| \chi_I d\phi \leq \sum_{j=1}^k \| |f_{m_j} - f_{m_{j-1}}| \|_p \| \chi_I \|_q \stackrel{(32)}{\leq} \| \chi_I \|_q.$$

Nach dem Satz von Beppo Levi ist also die Reihe fast überall absolut konvergent, und $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast überall gegen eine Funktion f .

2. Schritt. Wir zeigen nun, dass $f \in \mathcal{L}^p$.

Als Grenzwert messbarer Funktionen ist f messbar, und die Folge $(|f_{m_k}|^p)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast-überall gegen $|f|^p$. Wir wenden auf diese Folge das Lemma von Fatou (Lemma 40) an.

Zunächst ist offenbar $|f_{m_k}|^p \geq 0$. Weil $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, ist auch $(\|f_{m_k}\|_p)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} und damit konvergent. Also ist

$$\left(\int |f_{m_k}|^p d\phi\right)_{k \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt.}$$

Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas von Fatou erfüllt, und es folgt

$$|f|^p =_\phi \lim_k |f_{m_k}|^p \in \mathcal{L}^1.$$

Also ist $f \in \mathcal{L}^p$.

3. Schritt. Wir wissen nun, dass $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ fast-überall konvergent gegen ein $f \in \mathcal{L}^p$ ist. Wir zeigen, dass $(f_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ auch bezüglich $\|\dots\|_p$ gegen f konvergiert.

Dazu sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die Folge

$$(|f_{m_l} - f_{m_k}|^p)_{l \geq k}$$

und wenden wieder das Lemma von Fatou an. Es gilt

$$\begin{aligned} |f_{m_l} - f_{m_k}|^p &\geq 0, \\ \int |f_{m_l} - f_{m_k}|^p d\phi &= \|f_{m_l} - f_{m_k}\|_p^p \leq \frac{1}{2^{(k+1)p}}, \\ \lim_{l \rightarrow \infty} |f_{m_l} - f_{m_k}|^p &=_\phi |f - f_{m_k}|. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma von Fatou folgt

$$\int |f - f_{m_k}|^p d\phi \leq \frac{1}{2^{(k+1)p}}.$$

Daraus folgt aber die Behauptung.

4. Schritt. Konvergiert eine Teilfolge einer Cauchyfolge, so konvergiert die ganze Folge gegen denselben Grenzwert. Darum konvergiert auch die Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ gegen f . \square

Bemerkung: Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen. Der vorstehende Beweis hat uns darauf aufmerksam gemacht, dass es für Funktionenfolgen sehr verschiedene Konvergenzbegriffe gibt:

- Gleichmäßige Konvergenz auf dem Definitionsbereich
- Punktweise Konvergenz
- Punktweise Konvergenz ϕ -fast überall
- Konvergenz im p -Mittel, d.h. $\lim \|f_k - f\|_p = 0$.

Die Beziehungen zwischen den drei ersten Begriffen sollten ziemlich klar sein, deren Beziehungen zum vierten sind allerdings nicht so einfach, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 101. Dass selbst gleichmäßige Konvergenz nicht die Konvergenz im p -Mittel impliziert, zeigt die Folge

$$(k^{-1/p} \chi_{[0, k]})_{k \in \mathbb{N}}$$

für $\phi = \mu_1$.

\square

Im Beweis des Fischer-Riesz haben wir gezeigt:

Satz 102. Eine im p -Mittel konvergente Folge in L^p besitzt eine fast-überall konvergente Teilfolge.

Die Folge selbst braucht aber nirgends punktweise konvergent zu sein:

Beispiel 103. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $n(k) \in \mathbb{N}$ die eindeutig bestimmte Zahl mit

$$2^{n(k)} \leq k < 2^{n(k)+1}.$$

Definiere

$$a_k := \frac{k - 2^{n(k)}}{2^{n(k)}}, \quad b_k := a_k + \frac{1}{2^{n(k)}}$$

und

$$f_k = \chi_{[a_k, b_k]}.$$

Läuft k von $2^{n(k)}$ bis $2^{n(k)+1} - 1$, so läuft a_k von 0 bis $1 - \frac{1}{2^{n(k)}}$ und

$$\mu_1([a_k, b_k]) = \frac{1}{2^{n(k)+1}}.$$

Die Folge $(f_k(x))$ konvergiert für kein $x \in [0, 1]$. Andererseits liegt sie in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu_1)$, und $\|f_k\|_1 = \frac{1}{2^{n(k)}}$, d.h. (f_k) konvergiert in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mu_1)$ gegen 0.

□

Bemerkung. Die L^p -Räume sind (für die meisten Maße) unendlich-dimensionale Banachräume, die L^2 - und $L^2_{\mathbb{C}}$ -Räume vollständige Räume mit positiv-definitem Skalarprodukt, sog. *Hilberträume*. Für solche gelten natürlich alle Ergebnisse der linearen Algebra, die nicht auf die Dimension Bezug nehmen, und alle Aussagen über (vollständige) metrische Räume. Insbesondere kann man von (endlichen) Linearkombinationen sprechen, und im L^2 hat man die Begriffe *orthogonal*, *orthonormal* etc. Man kann z.B. das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren anwenden, wohingegen die Frage nach der Existenz von Orthonormalbasen auf die Dimension Bezug nimmt und deshalb nicht a priori klar ist.

Auch manche der Ihnen bisher bekannten topologischen Aussagen über Banachräume beziehen sich vor allem auf den endlich-dimensionalen Fall und übertragen sich nicht auf den unendlich-dimensionalen.

- Untervektorräume sind zum Beispiel nicht notwendig abgeschlossen.
So ist $C^0([0, 1]) \subset L^1([0, 1])$ ein echter Untervektorraum, aber, wie wir später sehen werden, dicht in L^1 , d.h. die abgeschlossene Hülle von $C^0([0, 1])$ ist $L^1([0, 1])$.
- Die abgeschlossenen Kugeln sind nicht länger kompakt, vgl. Beispiel 104.
- Lineare Abbildungen sind nicht unbedingt stetig.

Beispiel 104 (Nicht-kompakte Einheitskugel). Die Funktionen $f_k := \chi_{[k, k+1]}$ liegen für jedes $p \geq 1$ im $\mathcal{L}^p(\mu_1)$ und erfüllen $\|f_k\|_p = 1$. Sie liegen also in der Einheitskugel des $\mathcal{L}^p(\mu_1)$. Weiter rechnet man sofort nach, dass $\|f_k - f_l\|_p = \sqrt[p]{2}$ für $k \neq l$. Deshalb ist *keine* Teilfolge von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und erst recht keine Teilfolge konvergent. Darum ist die Einheitskugel im $L^p(\mu_1)$ nicht kompakt.

□

Beispiel 105. Der Raum l^2 aus dem Beispiel 99 der quadrat-summierbaren Folgen enthält den Unterraum E aller Folgen mit nur endlich vielen von 0 verschiedenen Gliedern. Dieser wird aufgespannt von den Folgen $e_k := (\delta_{jk})_{j \in \mathbb{N}}$, die lauter Nullen und eine 1 haben. Durch

$$\alpha((x_j)_{j \in \mathbb{N}}) := \sum_{j=0}^{\infty} jx_j$$

wird eine lineare Abbildung $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die nicht stetig ist, weil

$$|\alpha(e_k)| = k = k\|e_k\|_2,$$

d.h. weil α nicht beschränkt ist. E ist ein dichter Teilraum von l^2 .

Eine unstetige lineare Funktion auf dem *ganzen* Banachraum l^2 findet man, indem man einen Unterraum $F \subset l^2$ wählt, so dass $l^2 = E \oplus F$ ist. Für den Beweis der Existenz eines solchen algebraischen Komplements benötigt man das Auswahlaxiom oder das Zornsche Lemma, also ein mengentheoretisches Argument. Dann definiert man eine Erweiterung $\tilde{\alpha} : l^2 \rightarrow \mathbb{R}$ von α auf den ganzen Raum durch $\tilde{\alpha}(e + f) := \alpha(e)$ für $e \in E, f \in F$.

□

8 Fourierreihen

Fourierreihen sind *das* Mittel zur Analyse periodischer Funktionen. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *T-periodisch*, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x).$$

In diesem Fall heißt $\omega := \frac{2\pi}{T}$ die zugehörige (*Kreis-*)*frequenz*.

Musterbeispiele sind die Funktionen $\cos(k\omega x)$ und $\sin(k\omega x)$ für beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Ein Ziel der Fourierschen Theorie ist es, *beliebige* *T*-periodische Funktionen als (unendliche) Linearkombination von diesen Musterfunktionen zu schreiben, also zum Beispiel - für *gerade* *T*-periodische Funktionen -, eine Darstellung der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x)$$

zu finden. Die Amplituden a_k geben dann an, mit welchem Gewicht der Baustein $\cos(k\omega t)$ an $f(t)$ beteiligt ist. Wir untersuchen, für welche Funktionen f eine solche Darstellung existiert, in welchem Sinne die Konvergenz der unendlichen Reihe gemeint ist und wann die Koeffizienten a_k eindeutig sind. Die Abbildung

$$f \mapsto (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

bezeichnet man auch als *Fouriertransformation* oder *Spektralanalyse*. Sie analysiert, welche Frequenzen $k\omega$ mit welchem Gewicht an f beteiligt sind.

Im menschlichen Ohr sind die Haarzellen des Cortischen Organs jeweils für bestimmte Frequenzen empfindlich. Das Ohr übermittelt dem Gehirn also die Fouriertransformierten der von ihm aufgenommenen akustischen Signale.

Rauschunterdrückungs- oder Kompressionsverfahren (etwa für MP3) zerlegen Signale mit der Fouriertransformation in ihr Frequenzspektrum, filtern die unerwünschten oder überflüssigen Frequenzen heraus und setzen das Signal dann wieder zusammen.

Wesentliche Anwendungen der Fourieranalyse etwa auf Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen betreffen die Darstellung von Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf kompakten Intervallen, die also sicher nicht periodisch sind, durch trigonometrische Funktionen. Dazu setzt man f einfach mit der Periode $b - a$ auf ganz \mathbb{R} fort. (Das klappt natürlich nur wenn $f(a) = f(b)$. Wenn μ_1 -Nullmengen keine Rolle spielen, ist das kein Problem, andernfalls muss man sich was anderes einfallen lassen. Was, zum Beispiel?)

8.1 Lineare Algebra und Geometrie im Hilbertraum

- Wir beginnen mit abstrakter Hilbertraumtheorie. Dabei haben wir den L^2 als Beispiel im Hinterkopf, er wird für uns *das* Beispiel eines Hilbertraums werden. Aber in diesem Abschnitt geht es nur um lineare Algebra und Geometrie, nicht um Analysis und Integralrechnung.

Wir verwenden folgende Definitionen für den Begriff *Skalarprodukt*. Vergleichen Sie dazu das Lineare-Algebra-Skriptum von Mehrmann.

- Ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine positiv-definite symmetrische Bilinearform. Ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt ein *Euklidischer Vektorraum*.
- Ein Skalarprodukt auf einem \mathbb{C} -Vektorraum V ist eine positiv-definite hermitesche Bilinearform. Ein \mathbb{C} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt ein *unitärer Vektorraum*.

Beispiele 106.

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &:= \sum_{k=1}^n v_k w_k \text{ auf } \mathbb{R}^n, & \langle f, g \rangle &:= \int_A f g d\phi \text{ auf } L^2(A, \phi), \\ \langle v, w \rangle &:= \sum_{k=1}^n v_k \bar{w}_k \text{ auf } \mathbb{C}^n. & \langle f, g \rangle &:= \int_A f \bar{g} d\phi \text{ auf } L^2_{\mathbb{C}}(A, \phi). \end{aligned}$$

□

Zur Erinnerung: Ist (e_0, \dots, e_n) eine Basis des (endlich-dimensionalen) Vektorraumes V , so läßt sich jeder Vektor $f \in V$ eindeutig schreiben als

$$f = \sum_{j=0}^n f_j e_j.$$

Die Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten f_j erfordert in der Regel das Lösen eines linearen Gleichungssystems und kann sehr aufwendig sein. Ist V aber ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und ist (e_0, \dots, e_n) eine *Orthonormalbasis*, so berechnen sich die Entwicklungskoeffizienten v_j ganz einfach als

$$f_j = \langle f, e_j \rangle.$$

Für die Norm von f gilt dann (nach Pythagoras)

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{j=0}^n |\langle f, e_j \rangle|^2.$$

Eine gebräuchliche Alternative bieten *orthogonale* Basen, für die also $c_j := \langle e_j, e_j \rangle$ nicht notwendig 1 ist. Dann gilt ebenfalls

$$f = \sum_{j=0}^n f_j e_j, \text{ jetzt aber mit } f_j = \frac{1}{c_j} \langle f, e_j \rangle. \quad (33)$$

Was passiert, wenn die e_j zwar orthonormal sind, aber keine Basis bilden?

Lemma 107. Seien e_0, \dots, e_n orthonormale Vektoren in einem reellen oder komplexen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Skalarprodukt und sei W der davon aufgespannte Untervektorraum. Definiere die Orthogonalprojektion auf W durch

$$P_W(f) := \sum_{j=0}^n \langle f, e_j \rangle e_j, \quad f \in V.$$

Dann gilt für alle $f \in V$

- (i) $f - P_W(f) \perp W$, d.h. $\langle f - P_W(f), g \rangle$ für alle $g \in W$.
- (ii) $\|f - P_W(f)\| = \min \{\|f - g\| \mid g \in W\}$ und $P_W(f)$ ist der einzige Punkt in W , in dem dieses Minimum angenommen wird.

Beweis. Zu (i). Das folgt unmittelbar aus $\langle f - \sum_{j=0}^n \langle f, e_j \rangle e_j, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle - \langle f, e_k \rangle = 0$.

Zu (ii). Für $g \in W$ gilt

$$f - g = \underbrace{f - P_W(f)}_{\in W^\perp} + \underbrace{P_W(f) - g}_{\in W}.$$

Also gilt

$$\|f - g\|^2 = \|f - P_W(f)\|^2 + \|P_W(f) - g\|^2.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beachten Sie, dass in diesem Lemma zwar die Endlichkeit von n nicht aber die der Dimension von V eine Rolle spielt.

Für den Rest dieses Abschnitts sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, d.h. ein Vektorraum über \mathbb{R} oder \mathbb{C} mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und davon induzierter Norm $\|\dots\|$, der bezüglich $d(x, y) := \|x - y\|$ vollständig ist.

Die Objekte unseres Interesses sind eigentlich die konkreten Hilberträume $L^2(A, \phi)$ und $L^2_{\mathbb{C}}(A, \phi)$ mit dem oben eingeführten Skalarprodukt. Aber die bei den Untersuchungen verwendete Sprache lehnt sich bewusst an die Situation im Euklidischen oder unitären Raum der linearen Algebra an, um die geometrische Anschauung (zum Beispiel den Begriff *Orthogonalprojektion*) zu provozieren und zu übertragen.

Definition 108. Seien J eine Indexmenge und $(e_j)_{j \in J}$ eine Familie in V . Die Familie heißt *orthonormal* oder ein *Orthonormalsystem*, wenn für alle $i, j \in J$ gilt

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 109 (Gram-Schmidt). Wir betrachten in einem Hilbertraum eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ linear unabhängiger Vektoren. Dann zeigt man leicht, dass

$$g_0 := f_0, \quad g_k := f_k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle f_k, g_j \rangle}{\|g_j\|^2} g_j$$

eine Folge *orthogonaler* Vektoren definiert und dass daher $\{\tilde{g}_k := \frac{1}{\|g_k\|} g_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem liefert.

Dieses Verfahren nennt man das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt. □

Konvention für Doppelreihen. Insbesondere im Hinblick auf den komplexen Hilbertraum $L^2_{\mathbb{C}}$ ist es nützlich, Orthonormalsysteme mit Indexmenge \mathbb{Z} zu betrachten, vgl. Beispiel 115 im nächsten Abschnitt. In diesem Zusammenhang treten unendliche Reihen der Form

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j \quad (34)$$

auf, und man muss erklären, was das sein soll und vor allem, wann eine solche Reihe konvergent heißen soll. Eine übliche Bedingung ist, dass die Reihen

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} c_{-j}$$

beide konvergent sein sollen. Der Grenzwert der Reihe (34) ist dann die Summe der beiden Grenzwerte. Wir vereinbaren aber für unsere Untersuchungen der Fourierreihen, dass (34) einfach die Folge

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j := \left(\sum_{j=-n}^n c_j \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

sein soll und nennen die Folgenglieder wie bei "normalen" unendlichen Reihen die *Partialsummen*. Konvergenz der *Reihe* heißt Konvergenz der *Folge der Partialsummen*. Für die in diesem Abschnitt untersuchte (*Norm-*)Konvergenz von Fourierreihen im Hilbertraum (später ist das *Konvergenz im quadratischen Mittel*) liefern beide Konventionen dasselbe, aber bei der *punktweisen Konvergenz* im Abschnitt 8.3 ist das nicht klar.

Definition 110 (Fourierreihe). Sei $(e_j)_{j \in J}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum V mit Indexmenge $J = \mathbb{N}$ bzw. $J = \mathbb{Z}$. Für $f \in V$ definiert man die *Fourierreihe* von f bezüglich $(e_j)_{j \in J}$ durch

$$\mathcal{F}(f) := \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Die $\langle f, e_j \rangle$ heißen die *Fourierkoeffizienten* von f . Im Falle der Konvergenz schreiben wir, wie bei unendlichen Reihen üblich, $\mathcal{F}(f)$ auch für den Grenzwert. Die Partialsummen bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_n(f)$.

Satz 111 (Besselsche Ungleichung und Parsevalsche Gleichung). Seien $J \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ und $(e_j)_{j \in J}$ ein ON-System im Hilbertraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Für $f \in V$ gilt dann

(i) *Besselsche Ungleichung:*

$$\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

(ii) *Die Fourierreihe $\mathcal{F}(f) = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j$ ist in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ konvergent.*

(iii) *Die Parsevalsche Gleichung*

$$\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|f\|^2$$

gilt genau dann, wenn

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{j \in J} \langle f, e_j \rangle e_j = f,$$

d.h. wenn die Fourierreihe von f in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gegen f konvergiert.

Beweis. Zu (i). Das folgt aus Lemma 107: Ist nämlich $W = \text{Spann} \{e_j \mid j \in J, |j| \leq n\}$, so ist $P_W(f) = \mathcal{F}_n(f)$ und

$$\|f\|^2 = \|\mathcal{F}_n(f)\|^2 + \|f - \mathcal{F}_n(f)\|^2. \quad (35)$$

Daher ist für jedes n

$$\sum_{j \in J, |j| \leq n} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|\mathcal{F}_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Zu (ii). Nach (i) ist $\sum_{j \in J} |\langle f, e_j \rangle|^2$ konvergent. Das Cauchy Kriterium liefert daher zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$

$$\epsilon > \sum_{m < |j| \leq n} |\langle f, e_j \rangle|^2 = \|\mathcal{F}_n(f) - \mathcal{F}_m(f)\|^2.$$

Die Partialsummen der Fourierreihe bilden also eine Cauchyfolge in V , und die ist wegen der Vollständigkeit des Hilbertraums konvergent.

Zu (iii). Folgt aus (35). □

Definition 112. Sei $(e_j)_{j \in J}$ ein Orthonormalsystem in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Nach Linearer Algebra ist

$$\text{Spann} \{e_j \mid j \in J\}$$

der Vektorunterraum bestehend aus allen endlichen(!) Linearkombinationen von Vektoren e_j . Das Orthonormalsystem heißt *vollständig* oder eine *ON-Basis* des Hilbertraums $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, wenn dieser Raum dicht in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist, d.h. wenn seine abgeschlossene Hülle ganz V ist:

$$V = \overline{\text{Spann} \{e_j \mid j \in J\}}.$$

Das bedeutet, dass es zu jedem $f \in V$ und zu jedem $\epsilon > 0$ eine *endliche* Indexmenge $J_0 \subset J$ gibt, für die

$$\|f - \sum_{j \in J_0} \lambda_j e_j\| < \epsilon.$$

Satz 113. Ist $J \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ und ist $(e_i)_{i \in J}$ eine ON-Basis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, so konvergiert für jedes $f \in V$ die Fourierreihe gegen f :

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Weil die e_j eine Basis bilden, gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und ein $g \in \text{Spann} \{e_j \mid j \in J, |j| \leq n\}$ mit $\|f - g\| < \epsilon$. Nach Lemma 107 folgt dann aber

$$\|f - \mathcal{F}_n(f)\| \leq \|f - g\| < \epsilon.$$

□

8.2 Orthonormalsysteme und Fourierreihen im L^2

- Wir kommen jetzt zur Analysis zurück und betrachten die L^2 -Räume als konkrete Beispiele von Hilberträumen.
- Wir geben darin drei Orthonormalsysteme an, von denen wir allerdings erst später zeigen können, dass sie sogar Orthonormalbasen sind.
- Und wir konkretisieren für diese Systeme die Berechnung der Fourierkoeffizienten.

Beispiel 114 (Legendrepolynome). Wir betrachten den Hilbertraum $L^2([-1, +1], \mu_1)$. Die auf $[-1, +1]$ eingeschränkten Monome $1, x, x^2, x^3, \dots$ sind linear unabhängig. Durch Orthonormalisieren erhält man die *normierten Legendrepolynome* $\tilde{P}_k(x)$. Die ersten dieser Polynome sind

$$\sqrt{1/2}, \sqrt{3/2}x, \sqrt{5/8}(3x^2 - 1), \sqrt{7/8}(5x^3 - 3x).$$

In den Anwendungen (vor allem in der Theorie physikalisch wichtiger partieller Differentialgleichungen wie der Wellengleichung oder der Diffusionsgleichung) benutzt man gern die nicht normierten Legendrepolynome

$$P_k(x) := \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \tilde{P}_k(x).$$

Für sie gibt es eine Fülle von Identitäten. Zum Beispiel ist

$$P_k(x) := \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

Damit schreibt sich die sogenannte *Fourier-Legendre-Reihe* einer Funktion $f \in L^2([-1, +1], \mu_1)$ als

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k, \quad a_k := \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x) dx,$$

vergleiche (33).

□

Beispiel 115 (Das komplexe trigonometrische System). Seien $T > 0$ und $\omega := \frac{2\pi}{T}$. Wir betrachten den komplexen Hilbertraum $L^2_{\mathbb{C}}([0, T], \frac{1}{T} \mu_1)$ mit dem unitären Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{[0, T]} f \bar{g} d\mu_1 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \bar{g}(x) dx.$$

und darin die Familie

$$(e^{ik\omega x})_{k \in \mathbb{Z}}.$$

Wegen

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\omega x} e^{-il\omega x} dx = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(k-l)\omega x} dx = \begin{cases} \frac{e^{i(k-l)\omega T} - 1}{T i(k-l)\omega} \Big|_0^T = 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ist dies ein orthonormales System, das *komplexe trigonometrische System zur Periode T*. Die Fourierreihe eines $f \in L^2_{\mathbb{C}}([0, T], \frac{1}{T} \mu_1) = L^2_{\mathbb{C}}([0, T], \mu_1)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-ik\omega x} dx.$$

□

Beispiel 116 (Das reelle trigonometrische Orthonormalsystem). Aus dem letzten Beispiel folgt für $k, l \geq 1$

$$\begin{aligned} \langle \sin k\omega x, \sin l\omega x \rangle &= \left\langle \frac{1}{2i}(e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x}), \frac{1}{2i}(e^{il\omega x} - e^{-il\omega x}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2i} \frac{1}{-2i} \langle e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x}, e^{il\omega x} - e^{-il\omega x} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \begin{cases} \langle e^{ik\omega x}, e^{ik\omega x} \rangle + \langle e^{-ik\omega x}, e^{-ik\omega x} \rangle = 2 & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin k\omega x \sin l\omega x dx = \delta_{kl}.$$

Analoges findet man für den Cosinus, während gemischte Skalarprodukte von Sinus und Cosinus 0 ergeben. Zusammen erhält man für $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ im reellen Hilbertraum $L^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)g(x)dx$$

ein Orthonormalsystem

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \cos 3\omega x, \dots,$$

das man als das *reelle trigonometrische Orthonormalsystem zur Periode T* bezeichnet. Die zugehörige Fourierreihe von $f \in L^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1)$ bezeichnet man auch als klassische Fourierreihe. Man notiert sie in der Form

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$$

mit

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(k\omega x) dx.$$

Dabei betrachtet man also eigentlich nur die geraden Partialsummen der Fourierreihe, aber das macht keinen Unterschied, wie man mit Hilfe der Besselschen Ungleichung nachweisen kann.

Der Term $\frac{a_0}{2}$ kommt so zustande:

$$\left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{2}{T} \int_0^T f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(0\omega x) dx \right).$$

□

Alle in den letzten drei Beispielen vorgestellten ONSysteme sind vollständig, d.h. die entsprechenden Fourierreihen $\mathcal{F}(f)$ konvergieren im quadratischen Mittel(!) gegen f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}_n(f) - f\|_2 = 0. \quad (36)$$

Das ist aber keine Aussage über punktweise Konvergenz, vergleichen Sie Beispiel 103.

Wenn man schreibt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

so suggeriert das diese Gleichung für alle oder doch fast alle x . Das ist aber nicht gemeint und im allgemeinen nicht richtig. Deshalb schreibt man (36) gern etwas nebulös als

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Periode T oder Periode 2π ? Häufig beschränkt man sich beim Studium klassischer Fourierreihen auf den Fall 2π -periodischer Funktionen, weil dann $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ ist und die Formeln etwas einfacher werden. Die Perioden lassen sich aber einfach umrechnen:

Mit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{T}{2\pi}x$ gilt

- Ist $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodisch mit Periode T , so ist $\tilde{g} = g \circ h$ periodisch mit Periode 2π und umgekehrt. Insbesondere wird zum Beispiel aus $g = \cos k\omega x$ die Funktion $\tilde{g} = \cos kx$.
- Sind $f, g \in \mathcal{L}^2([0, T], \mu_1)$, so sind nach dem Transformationssatz $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi], \mu_1)$ und umgekehrt. Es gilt

$$\frac{2}{T} \int_0^T fg \, d\mu_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}\tilde{g} \, d\mu_1.$$

8.3 Punktweise Konvergenz

- Wir betrachten in diesem und dem folgenden Abschnitt die Frage nach der punktweisen Konvergenz der L^2 -Fourierreihen. Das ist eine völlig andere Fragestellung, als die nach der Konvergenz im quadratischen Mittel.
- Trotzdem werden gerade diese Untersuchungen letztlich auch den noch ausstehenden Beweis für die Vollständigkeit der im letzten Abschnitt betrachteten L^2 -Orthonormalsysteme ermöglichen.

Wir betrachten hier klassische reelle Fourierreihen für periodische Funktionen, wobei wir der Einfachheit halber den Fall $T = 2\pi$, also $\omega = 1$ wählen. Die Funktionen seien quadratintegrierbar in dem Sinne, dass ihre Einschränkungen in $\mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \mu_1)$ liegen. Wir fragen nach punktweiser Konvergenz der Fourierreihe.

Wir bezeichnen die (geraden) Partialsummen der Fourierreihe mit

$$s_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

wobei die Fourierkoeffizienten a_k, b_k gegeben sind durch

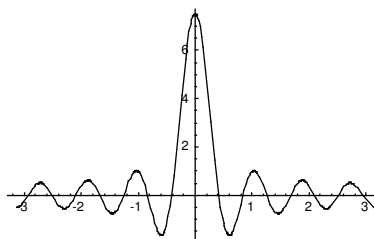
$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Lemma 117 (Dirichlet-Kern). Für den Dirichlet-Kern

$$D_n(x) = 1/2 + \sum_{k=1}^n \cos kx$$

gilt:

- (i) $D_n(x) = D_n(-x)$,
 $D_n(x + 2\pi) = D_n(x)$.
- (ii) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} D_n(x) dx = 1$.
- (iii) $D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$,
falls der Nenner $\neq 0$.



(Die Abbildung suggeriert vielleicht, dass D_n eine gedämpfte Schwingung ist. Aber D_n ist periodisch! In Wirklichkeit interessiert uns D_n auch nur auf $[-\pi, \pi]$, und da ist die Funktion „bei 0 konzentriert“.)

Beweis. (i) und (ii) sind trivial.

Zu (iii). Durch Induktion. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist ebenfalls trivial.

Für den Induktionsschritt verwendet man die Formel

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}.$$

Diese liefert

$$\frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin(n - \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \cos nx.$$

□

Lemma 118. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch und quadrat-integrierbar. Dann gilt

(i)

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t) dt. \quad (37)$$

(ii) Sind $\eta, x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \eta \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - \eta \right\} D_n(t) dt = 0.$$

Die Behauptung des Lemmas ist interessant: Bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten geht der Funktionsverlauf von f über die ganze Periode ein. Die Formel (37) zeigt zusammen mit einem Blick auf den Graphen von D_n , dass die (Partialsommen der) Fourierreihe in der Nähe von x im wesentlichen nur vom Verhalten von f in der Nähe von x abhängen.

Beweis. Zu (i).

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u) du \quad (\text{Integrand } 2\pi\text{-periodisch}). \end{aligned}$$

Das beweist die erste Gleichung. Mit der Substitution $t \rightarrow -t$ ergibt sich

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} D_n(-t) f(x-t) (-dt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt,$$

also auch

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t) dt.$$

Zu (ii). Nach dem vorangehenden Lemma ist

$$\eta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta D_n(t) dt$$

Damit folgt (ii) unmittelbar aus (i). □

Definition 119. Ist f eine reelle Funktion und existiert der rechtsseitige Limes

$$f(x_+) := \lim_{t \searrow 0} f(x+t),$$

so kann man

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}$$

betrachten. Wenn dieser Grenzwert existiert, heißt er die *rechtsseitige Ableitung* von f in x und wird mit $f'(x_+)$ bezeichnet.

Entsprechend definiert man die linksseitige Ableitung $f'(x_-)$.

Satz 120 (Punktweise Konvergenz). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -periodisch und auf $[0, T]$ quadrat-integrierbar. Sei $x \in \mathbb{R}$. Existieren der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert $f(x_+)$ bzw. $f(x_-)$ und die rechtsseitige und linksseitige Ableitung von f an der Stelle x , so folgt

$$\lim s_n(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

Ist f in x außerdem stetig, so gilt also

$$\lim s_n(x) = f(x).$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $T = 2\pi$. Wir setzen

$$\eta := \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} \quad \text{und} \quad \phi(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - \eta$$

und wollen Lemma 118 anwenden. Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) D_n(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \left(\cos nt + \sin nt \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos nt dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cot \frac{t}{2} \sin nt dt. \end{aligned} \quad (38)$$

Mit f ist auch $\phi \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \frac{1}{\pi} \mu_1)$, und das ist die einzige Eigenschaft von ϕ , die wir hier brauchen. Nach der Besselschen Ungleichung konvergieren dann die Fourierkoeffizienten $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos nt dt$ von ϕ gegen 0.

Dasselbe Argument gilt für das zweite Integral in (38), wenn wir gezeigt haben, dass

$$\psi(t) := \phi(t) \cot \frac{t}{2} \in \mathcal{L}^2([-\pi, \pi], \frac{1}{\pi} \mu_1). \quad (39)$$

Das Problem beim Nachweis von (39) ist der Pol von $\cot \frac{t}{2}$ in 0, und erst hier kommt die spezielle Definition von ϕ zum Tragen. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2\eta}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} \\ &= \frac{f(x+t) + f(x-t) - (f(x_+) + f(x_-))}{2 \sin \frac{t}{2}} \cos \frac{t}{2} \\ &= \left(\underbrace{\frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}}_{\rightarrow f'(x_+)} + \underbrace{\frac{f(x-t) - f(x_-)}{t}}_{\rightarrow f'(x_-)} \right) \underbrace{\frac{\frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}}_{\rightarrow 1} \\ &\rightarrow f'(x_+) + f'(x_-) \quad \text{für } t \searrow 0. \end{aligned}$$

Weil ψ eine ungerade Funktion ist, existiert auch $\psi(t_-)$. Also gibt es ein kompaktes Intervall $[-\delta, \delta] \subset [-\pi, +\pi]$, auf dem ψ messbar und beschränkt ist. Daher ist $\psi \chi_{[-\delta, \delta]} \in \mathcal{L}^2$. Andererseits ist mit ϕ auch ψ auf $[-\pi, +\pi] \setminus [-\delta, \delta]$ quadrat-integrierbar und (39) bewiesen. \square

Im Beweis haben wir gesehen, dass das Verhalten der Funktion ψ in der Nähe von 0, also das Verhalten von f in der Nähe von x entscheidend ist für das Konvergenzverhalten von $\mathcal{F}(f)(x)$. Das ergibt das

Korollar 121 (Riemannscher Lokalisationsatz). *Das (punktweise) Konvergenzverhalten und der Grenzwert der Fourierreihe einer quadrat-integrierbaren periodischen Funktion an der Stelle x hängt nur vom Verhalten von f auf einer beliebig kleinen Umgebung von x ab.*

Definition 122. Eine T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stückweise differenzierbar*, wenn es $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = T$ und differenzierbare Funktionen $f_k : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f|_{]x_{k-1}, x_k[} = f_k|_{]x_{k-1}, x_k[} \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Korollar 123. *Ist f 2π -periodisch und stückweise differenzierbar, so gilt für alle x*

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

Bemerkungen.

1. Es gibt stetige 2π -periodische Funktionen, für die die Fourierreihe in überabzählbar vielen Punkten divergiert (Du Bois-Reymond 1873). Andererseits hat man bei quadrat-integrierbaren Funktionen μ_1 -fast-überall Konvergenz gegen f (Carleson 1966).
2. Ist f eine gerade Funktion, d.h. gilt $f(-x) = f(x)$ für alle x , so gilt für alle k

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega t \, dt,$$

$$b_k = 0.$$

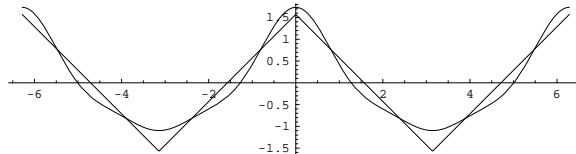
3. Ist f eine ungerade Funktion, so gilt für alle k

$$a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega t \, dt.$$

Die Bemerkungen 2 und 3 vereinfachen in den folgenden Beispielen (und auch sonst gelegentlich) die Berechnung der Fourierkoeffizienten.

Beispiel 124. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch mit $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ für $-\pi \leq x \leq \pi$.



Dann ist f gerade, also treten nur Cosinusterme auf. Es gilt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(kx) dx = \dots = \begin{cases} \frac{4}{k^2\pi} & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}.$$

Die Fourierreihe konvergiert nach dem Satz punktweise gegen f . Also ist

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right\}.$$

Daraus folgt mit $x = 0$

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

In der Abbildung sind f und $\mathcal{F}_{10}(f)$ dargestellt.

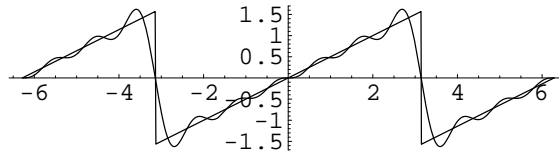
□

Beispiel 125. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodisch mit $f(x) = x/2$ für $-\pi < x \leq \pi$.

Dann gilt

$$f(x) = \left\{ \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - + \dots \right\}$$

für $x \neq (2k+1)\pi$.



In der Abbildung sind f und $\mathcal{F}_6(f)$ dargestellt.

Für $x = \pi/2$ erhält man die Leibnizsche Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Durch gliedweise Differentiation obiger Fourierreihe erhält man die Reihe

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - + \dots$$

Die Glieder dieser Reihe gehen für kein x gegen 0. Ist nämlich $x = 2\pi \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$, so ist für $k \in \mathbb{N}$

$$\cos(kqx) = \cos(2p\pi) = 1.$$

Ist andererseits $x = 2\pi y$ mit irrationalem y , so sind die Reste modulo 2π von $\{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$ dicht in $[0, 2\pi]$ und die Folge $(\cos(2kx))_{k \in \mathbb{N}}$ divergent. Also ist die differenzierte Reihe für kein x konvergent. Fourierreihen darf man i.a. nicht gliedweise differenzieren.

□

Die Fourierentwicklung von Funktionen in einem Raum $L^2(A, \phi)$ betrifft zunächst Funktionen, die eben auf der Menge A definiert sind. Weil aber das trigonometrische Orthonormalsystem eine natürliche periodische Erweiterung auf ganz \mathbb{R} besitzt, taugt die Fourieranalyse im $L^2([0, 2\pi], \frac{1}{\pi}\mu_1)$ zur Behandlung periodischer Funktionen auf \mathbb{R} , und ist historisch daraus entstanden. Aber auch die Fourieranalyse von Funktionen, die nur auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ (oder einem anderen kompakten Intervall) sinnvoll gegeben sind, ist ein wichtiges Anwendungsgebiet. Das demonstrieren wir im folgenden Beispiel.

Beispiel 126. Die Bewegung einer schwingenden Saite der Länge π wird gegeben durch die Gleichung

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} \{a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t\} \sin kx,$$

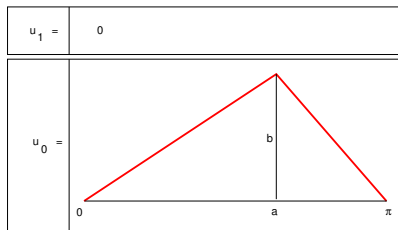
wobei $\omega_k = k\omega_1$ die k -te Oberschwingung ist. Beachten Sie, dass die Schwingung zwar in t periodisch ist, die Ortskoordinate x aber natürlich nur in dem Intervall $[0, \pi]$ eine sinnvolle Bedeutung hat! Die Grundschiwingung ω_1 wird durch die Physik der Saite bestimmt. Die Koeffizienten a_k, b_k hingegen sind durch die Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x)$$

bestimmt:

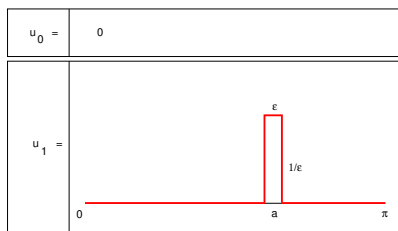
$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \sin kx \, dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi\omega_k} \int_0^{\pi} u_1(x) \sin kx \, dx.$$

Gezupfte Saite:



$$u(x, t) = \frac{2b}{a(\pi-a)} \sum \frac{\sin ka}{k^2} \cos \omega_k t \sin kx.$$

Angeschlagene Saite:



$$u(x, t) = \frac{2}{\pi\omega_1\epsilon} \sum \frac{\sin(ka) \sin(k\epsilon/2)}{k^2} \sin \omega_k t \sin kx.$$

Durch die Wahl der Stelle a kann man unerwünschte Obertöne minimieren, z.B. den 7. und 13. (Sexte+3/8 bzw. Sexte-1/4 Ton).

□

8.4 Cesàro-Konvergenz

- Die Fourierreihe selbst einer stetigen 2π -periodischen Funktion f ist im allgemeinen nicht punktweise gegen f konvergent⁶. Jetzt werden wir diesen Mißstand mit dem Cesàroschen Summierungsverfahren „reparieren“.
- Wir erhalten für die Cesàro-Mittel der Fourierreihe bei stetigen Funktionen sogar gleichmäßige Konvergenz und damit einen einfachen Beweis für den Weierstraßschen Approximationssatz: Jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall läßt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren.
- Die Vollständigkeit trigonometrischer und anderer ON-Systeme ist eine einfache Folgerung.

Definition 127. Eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *Cesàro-konvergent gegen a* , wenn die Folge ihrer arithmetischen Mittel $(\frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

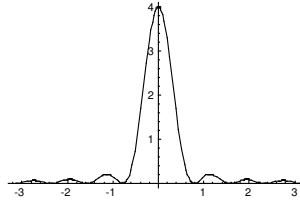
Ist $\lim a_k = a$, so ist die Folge auch Cesàro-konvergent gegen a , aber die Umkehrung gilt nicht, wie die Folge $a_n = (-1)^n$ zeigt.

Lemma 128. Für den Fejér-Kern

$$F_n(t) := \frac{D_0(t) + \dots + D_n(t)}{n+1}$$

gilt:

- (i) $F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\sin^2(n+1)t/2}{\sin^2 t/2}$,
- (ii) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$,
- (iii) $F_n(t) \leq \frac{1}{2(n+1) \sin^2(\delta/2)}$
für $0 < \delta \leq |t| \leq \pi$.



Beweis. Zu (i). Es gilt

$$(2 \sin \frac{t}{2})^2 D_k(t) = 2 \sin(k + \frac{1}{2})t \sin \frac{t}{2} = \cos kt - \cos(k+1)t.$$

Aufsummieren liefert

$$(2 \sin \frac{t}{2})^2 F_n(t) = \frac{1}{n+1} (1 - \cos(n+1)t) = \frac{2}{n+1} \sin^2(n+1) \frac{t}{2}.$$

Zu (ii). Aus Lemma 117 folgt $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) dt = 1$. Damit ergibt sich (ii).

Zu (iii). Das ist nach (i) trivial. □

⁶ Ein erstes Beispiel dafür stammt von du Bois-Reymond 1873

Satz 129 (Fejér). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und T -periodisch. Dann konvergieren die arithmetischen Mittel

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}$$

der Fourier-Partialsummen $s_k(x)$ von f gleichmäßig gegen f . Die Fourierreihe ist also insbesondere überall Cesàro-konvergent gegen f .

Beweis. Sei o.E. $T = 2\pi$. Zunächst ist die stetige Funktion f auf dem kompakten Intervall $[-\pi, \pi]$ beschränkt und gleichmäßig stetig. Wegen der Periodizität gibt es daher ein $M \in \mathbb{R}$ und zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq M, \\ |x - y| < \delta &\implies |f(x) - f(y)| < \epsilon. \end{aligned}$$

Sei o.E. $\delta < \pi$. Dann erhalten wir nach dem Lemma 118 und dem vorstehenden Lemma

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(x) - f(x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) F_n(t) dt. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} |\sigma_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{< \epsilon} F_n(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\delta < |t| < \pi} \underbrace{|f(x+t) - f(x)|}_{\leq 2M} F_n(t) dt \\ &\leq \underbrace{\epsilon \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt}_{=1} + \frac{1}{\pi} 2M 2\pi \frac{1}{2(n+1)2 \sin^2(\delta/2)} < 2\epsilon \end{aligned}$$

für hinreichend große n . □

Als erste Konsequenz erhalten wir:

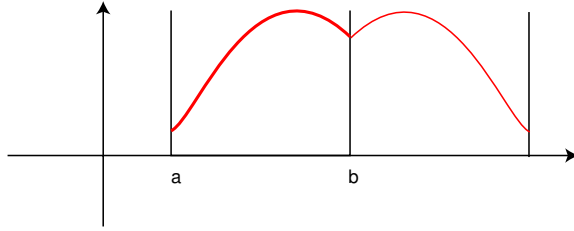
Satz 130 (Weierstraßscher Approximationssatz). Für jedes kompakte Intervall $[a, b]$ liegen die Polynome dicht in $(C^0[a, b], d^{sup})$.

Wir halten noch einmal fest: Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes X heißt *dicht* in X , wenn ihre abgeschlossene Hülle gleich X ist:

$$\bar{A} = X,$$

d.h. wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ und jedem $x \in X$ ein $a \in A$ gibt, für das $d(x, a) < \epsilon$.

Beweis. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ und sei $\epsilon > 0$. Wir suchen ein Polynom p mit $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ für alle $x \in [a, b]$. Wir setzen f auf ganz \mathbb{R} stetig mit Periode $T = 2(b - a)$ fort:



Die Cesàromittel der Fortsetzung seien mit σ_n bezeichnet. Dann gibt es nach dem Satz von Fejér ein n mit

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nun ist σ_n eine reelle Linearkombination von Termen $\cos k\omega x, \sin k\omega x$. Die Taylorreihen dieser Funktionen konvergieren auf $[0, T]$ gleichmäßig gegen $\cos k\omega x, \sin k\omega x$. Also gibt es ein Polynom p mit

$$|\sigma_n(x) - p(x)| < \epsilon/2 \text{ für alle } x \in [0, T].$$

Dann ist aber nach der Dreiecksungleichung

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon$$

für alle $x \in [0, \pi]$. □

Wo wir gerade bei dichten Teilräumen sind, beweisen wir noch einen Satz darüber:

Satz 131. Sei $p \geq 1$. Dann gilt:

(i) Ist ϕ ein Maß auf \mathbb{R}^n , so gibt es zu jedem $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \phi)$ und jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion s mit

$$\|f - s\|_p < \epsilon.$$

(ii) Zu jedem $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mu_n)$ und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

Mit anderen Worten:

- Die Treppenfunktionen sind dicht in $(L^p(\mathbb{R}^n, \phi), \|\dots\|_p)$ und
- die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger sind dicht in $(L^p(\mathbb{R}^n, \mu_n), \|\dots\|_p)$.

(Gemeint sind dabei natürlich die Mengen der Restklassen in L^p , welche wenigstens eine Treppenfunktion bzw. eine stetige Funktion mit kompaktem Träger enthalten.)

Beweis des Satzes. Zu (i). **A.** Wir betrachten zunächst den Fall, dass $|f|$ beschränkt durch $M \in \mathbb{R}$ ist, und sein Träger in einem kompakten Intervall K liegt.

Weil f messbar ist, gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} s_j =_\phi f.$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$|s_j| \leq M, \quad \text{Träger } s_j \subset K.$$

Dann gilt

$$|s_j - f|^p \leq (|s_j| + |f|)^p \leq (2M)^p \chi_K \in \mathcal{L}^1$$

und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int |s_j - f|^p d\phi = 0.$$

Nach dem Satz von Lebesgue gilt daher

$$\|s_j - f\|_p^p = \int |s_j - f|^p d\phi \rightarrow 0.$$

Zu jedem beschränkten $f \in L^p$ mit kompakten Träger und jedem $\epsilon > 0$ gibt es also eine Treppenfunktion s mit $\|s - f\|_p < \epsilon$.

B. Nun sei $f \in \mathcal{L}^p$ beliebig. Zu $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$f_k := \inf(\sup(f, -k), +k) \chi_{[-k, +k]^n}.$$

Dann ist f_k messbar und beschränkt mit kompaktem Träger, also in \mathcal{L}^p . Weiter gilt

$$|f - f_k|^p \leq |f|^p \in \mathcal{L}^1$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int |f - f_k|^p d\phi = 0$$

Nach dem Satz von Lebesgue gilt daher

$$\|f - f_k\|_p^p = \int |f - f_k|^p d\phi \rightarrow 0.$$

Zu jeder \mathcal{L}^p -Funktion f und jedem $\epsilon > 0$ gibt es also eine beschränkte \mathcal{L}^p -Funktion g mit kompaktem Träger, so dass

$$\|f - g\|_p < \epsilon.$$

Aus **A.** und **B.** folgt damit die Behauptung (i).

Zu (ii). Nach Teil (i) genügt es zu zeigen: Zu jeder Treppenfunktion s und jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger, so dass $\|s - g\|_2 < \epsilon$ ist. Wegen der Dreiecksungleichung kann man sich dabei beschränken auf den Fall $s = \chi_I$ für ein $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$. Und weil Intervalle mit leeren Inneren μ_n -Nullmengen sind, kann man sich weiterhin auf den Fall $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$ beschränken.

Sei also $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ ein solches Intervall und sei $\epsilon > 0$. Weil $\mu_n(I) = \mu_n(\bar{I})$ ist, gibt es nach dem Regularitätsaxiom ein offenes Intervall $J \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ mit $\bar{I} \subset J$ und

$$\mu_n(J) < \mu_n(I) + \epsilon.$$

Wir behaupten nun, dass es eine stetige Funktion $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$g|_I = 1, \quad g|_{\mathbb{R}^n \setminus J} = 0, \quad 0 \leq g - \chi_I \leq 1.$$

Für eine solche Funktion gilt

$$0 \leq g - \chi_I \leq \chi_J - \chi_I$$

und wegen $|g - \chi_I|^p \leq g - \chi_I$ dann

$$\|g - \chi_I\|_p^p \leq \int (\chi_J - \chi_I) \leq \epsilon,$$

und (ii) ist bewiesen.

Die Existenz einer Funktion g mit den angegebenen Eigenschaften sieht man vielleicht am einfachsten so ein: Man wählt eine lineare Transformation $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die \bar{I} auf den Würfel

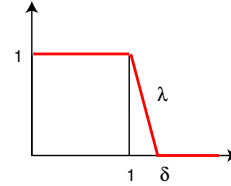
$$W := [-1, +1]^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{sup} \leq 1\}$$

abbildet. $F(J)$ ist dann eine offene Umgebung von W , und es gibt ein $\delta > 1$ mit

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{sup} \leq \delta\} \subset F(J).$$

Mit

$$\lambda(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - \frac{t-1}{\delta-1} & \text{für } 1 \leq t \leq \delta, \\ 0 & \text{für } t \geq \delta. \end{cases}$$



leistet dann

$$g(x) := \lambda(\|F(x)\|_{sup})$$

das Gewünschte. □

Damit können wir nun eine Lücke aus dem letzten Abschnitt schließen:

Satz 132 (Vollständigkeit des trigonometrischen ON-Systems). Seien $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann ist das Orthonormalsystem

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \dots$$

in $L^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1)$ vollständig.

Beweis. Seien $f \in \mathcal{L}^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1)$ und $\epsilon > 0$. Wir setzen $f(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus [0, T]$ fort. Nach Satz 131 gibt es dann eine stetige Funktion g mit kompaktem Träger, so dass

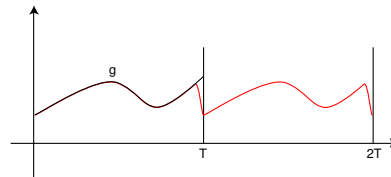
$$\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f - g|^2 d\mu_1} < \epsilon.$$

Durch Einschränkung erhalten wir eine stetige Funktion $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|f - g\|_2 < \epsilon. \tag{40}$$

wobei $\|\dots\|_2$ die Norm von $L^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1)$ bezeichnet.

Wir können g stetig so abändern, dass sich die \mathcal{L}^2 -Norm nicht wesentlich ändert, also (40) erhalten bleibt, und zusätzlich $g(0) = g(T)$ gilt. Dann kann man g mit Periode T stetig fortsetzen.



Wir bezeichnen die Cesàromittel der Partialsummen von g mit σ_n . Nach dem Satz von Fejér gibt es ein n mit

$$|\sigma_n(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Also ist

$$\|\sigma_n - g\|_2 = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T |\sigma_n - g|^2 d\mu_1} < \epsilon$$

und

$$\|f - \sigma_n\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - \sigma_n\|_2 < 2\epsilon.$$

Weil σ_n in dem vom trigonometrischen ONSystem aufgespannten Unterraum liegt, folgt die Behauptung. \square

Korollar 133. *Das Orthonormalsystem*

$$(e^{ik\omega x})_{k \in \mathbb{Z}}$$

ist in $L^2_{\mathbb{C}}([0, T], \frac{1}{T}\mu_1)$ vollständig.

Beweis. Die Orthonormalität haben wir früher schon gesehen. Sei $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}([0, T], \frac{1}{T}\mu_1)$. Dann folgt

$$u = \operatorname{Re}(f) \in \mathcal{L}^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1), \quad v = \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{L}^2([0, T], \frac{2}{T}\mu_1).$$

Beachten Sie, dass der Faktor $\frac{1}{T}$ oder $\frac{2}{T}$ für die Integrierbarkeit keine Rolle spielt. Allerdings macht er sich bei der Norm bemerkbar. Zum Beispiel ist

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{2}\|u\|_{L^2_{\mathbb{C}}}.$$

Nach dem letzten Korollar gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Linearkombinationen σ und τ von $\cos(k\omega x)$, $\sin(k\omega x)$, so dass

$$\|u - \sigma\|_{L^2} < \epsilon, \quad \|v - \tau\|_{L^2} < \epsilon.$$

Dann ist

$$\|f - (\sigma + i\tau)\|_{L^2_{\mathbb{C}}} \leq \|u - \sigma\|_{L^2_{\mathbb{C}}} + \|v - \tau\|_{L^2_{\mathbb{C}}} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}.$$

Schließlich sind aber $\cos(k\omega x)$ und $\sin(k\omega x)$ Linearkombinationen von $e^{ik\omega x}$ und $e^{-ik\omega x}$. \square

Korollar 134. *Die Polynome liegen für jedes $p \geq 1$ dicht in $L^p([a, b], \mu_1)$. Insbesondere sind die normierten Legendrepolynome eine ON-Basis von $L^2([-1, +1], \mu_1)$.*

Beweis. Jedes $f \in \mathcal{L}^p([a, b], \mu_1)$ läßt sich bezüglich der L^p -Norm durch stetige Funktionen auf $[a, b]$ approximieren. Stetige Funktionen lassen sich nach dem Satz von Weierstraß durch Polynome bezüglich d^{sup} approximieren. Dann lassen sie sich aber auch bezüglich der L^p -Norm approximieren, denn für stetiges f und g ist

$$\|f - g\|_p = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq d^{sup}(f, g) \sqrt[p]{b - a}.$$

\square

8.5 Rückblick auf das Lebesgueintegral

- Wir untersuchen, in wieweit das Lebesgueintegral die einzig sinnvolle Erweiterung des Integrals für Treppenfunktionen ist.

Für Treppenfunktionen gibt es zu unserer Definition des Integrals wohl kaum vernünftige Alternativen. Von dieser Definition ausgehend haben wir durch Approximation mit monotonen Folgen etc. das Integral zu einer linearen Abbildung auf \mathcal{L}^1 erweitert. Weil

$$\left| \int f d\phi - \int g d\phi \right| \leq \int |f - g| d\phi = \|f - g\|_1,$$

ist die induzierte lineare Abbildung $\int : L^1 \rightarrow \mathbb{R}$ auch stetig.

Nun gibt es (zum Beispiel im *Forster* oder *Barner/Flohr*) andere Konstruktionen für Integrale, die von den Autoren ebenfalls *Lebesgueintegral* genannt werden. Ist das Ergebnis mit dem unseren identisch?

Um das zu klären beweisen wir, dass sich ein normierter Vektorraum X

- e.g. der Raum $T(\mathbb{R}^n)$ der Restklassen von Treppenfunktionen mit der 1-Norm

auf höchstens *eine* Weise zu einem *vollständigen* normierten Vektorraum Y

- e.g. $(L^1, \|\dots\|_1)$

ergänzen läßt, in dem X dicht liegt. Genauer ist Y bis auf normtreue Isomorphie eindeutig bestimmt und heißt eine *Vervollständigung* von X . Wir zeigen auch (und das zuerst), dass sich eine stetige lineare Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$

- e.g. das Treppenfunktionsintegral

auf genau eine Weise zu einer stetigen linearen Abbildung $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen läßt. Also sind alle stetigen linearen Erweiterungen des Treppenfunktionsintegrals auf Vervollständigungen von $T(\mathbb{R}^n)$ eindeutig bis auf Isomorphie.

Satz 135. Seien $(Y, \|\dots\|_Y)$ und $(Z, \|\dots\|_Z)$ Banachräume und $X \subset Y$ ein dichter Unterraum. Sei $f : X \rightarrow Z$ linear und stetig. Dann gibt es genau eine lineare stetige Abbildung $F : Y \rightarrow Z$ mit $F|_X = f$.

Beweis. Einzigkeit von F . Ist $F : Y \rightarrow Z$ linear und stetig mit $F|_X = f$ und ist $y \in Y$, so gibt es wegen der Dichtheit von X eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X mit $\lim x_i = y$. Wegen der Stetigkeit folgt $F(y) = \lim F(x_i) = \lim f(x_i)$. Also ist $F(y)$ eindeutig bestimmt.

Konstruktion von F . Seien wieder $y \in Y$ und $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim x_i = y$. Dann ist

$$\lim \|x_k - y\|_Y = 0.$$

Also ist (x_k) eine Cauchyfolge in Y . Wegen $\|f(x_i) - f(x_j)\|_Z \leq \|f\| \|x_i - x_j\|_Z$ ist $(f(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ dann eine Cauchyfolge in Z und daher konvergent gegen ein $z \in Z$. Wir zeigen, dass z nicht von der Cauchyfolge (x_i) abhängt, und können dann definieren:

$$F(y) := z. \tag{41}$$

Ist nämlich $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine weitere gegen y konvergente Folge in $X \subset Y$, so definiert

$$\zeta_i := \begin{cases} x_i & \text{für } i \text{ gerade} \\ \xi_i & \text{für } i \text{ ungerade} \end{cases}$$

ebenfalls eine gegen y konvergente Cauchyfolge. Und weil Teilfolgen einer konvergenten Folge denselben Limes haben wie die Originalfolge, ist $\lim f(\zeta_i) = \lim f(\xi_i) = \lim f(x_i)$.

Eigenschaften von F . Ist $y \in X$, so kann man für (x_k) die konstante Folge wählen. Also ist

$$F|_X = f.$$

Der Nachweis der Linearität ist einfach (selber machen!). Schließlich ist mit den obigen Bezeichnungen

$$\|F(y)\|_Z = \lim \|f(x_i)\|_Z \leq \lim \|f\| \|x_i\|_X = \|f\| \|y\|_Y$$

Daher ist F stetig und $\|F\| \leq \|f\|$. □

Definition 136. Seien $(X, \|\dots\|_X)$ ein normierter \mathbb{R} -Vektorraum und $(Y, \|\dots\|_Y)$ ein Banachraum. Es gelte

- X ist Untervektorraum von Y ,
- $\|x\|_Y = \|x\|_X$ für alle $x \in X$,
- X ist dicht in Y .

Dann heißt $(Y, \|\dots\|_Y)$ eine *Vervollständigung* von $(X, \|\dots\|_X)$.

Bis auf normtreue Isomorphie gibt es zu gegebenem $(X, \|\dots\|)$ höchstens *eine* Vervollständigung:

Korollar 137. Seien $(Y_1, \|\dots\|_1)$ und $(Y_2, \|\dots\|_2)$ zwei Vervollständigungen von $(X, \|\dots\|_X)$. Dann gibt es genau einen stetigen Isomorphismus $F : Y_1 \rightarrow Y_2$ mit $F|_X = \text{id}$. Es gilt

$$\|F(y_1)\|_2 = \|y_1\|_1 \tag{42}$$

für alle $y_1 \in Y_1$.

Beweis. Der Beweis ist eine rein formale Konsequenz des Satzes 135. Wir wenden diesen Satz viermal an:

1. $Y = Y_1, Z = Y_2, f : X \rightarrow Z, x \mapsto x$.
Das liefert eine eindeutig bestimmte stetige lineare Abbildung $F_1 : Y_1 \rightarrow Y_2$ mit $F_1|_X = \text{id}$.
2. $Y = Y_2, Z = Y_1, f : X \rightarrow Z, x \mapsto x$.
Das liefert eine eindeutig bestimmte stetige lineare Abbildung $F_2 : Y_2 \rightarrow Y_1$ mit $F_2|_X = \text{id}$.
3. $Y = Y_1, Z = Y_1, f : X \rightarrow Z, x \mapsto x$.
Das liefert eine *eindeutig bestimmte* stetige lineare Abbildung $E : Y_1 \rightarrow Y_1$ mit

$$E|_X = \text{id}.$$

Wir kennen aber zwei Abbildungen, die dies leisten: $E = F_2 \circ F_1$ und $E = \text{id} : Y_1 \rightarrow Y_1$. Wegen der Eindeutigkeit ist also

$$F_2 \circ F_1 = \text{id}.$$

4. Analog finden wir $F_1 \circ F_2 = \text{id} : Y_2 \rightarrow Y_2$.

Damit erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit des stetigen Isomorphismus $F = F_1$. Aus $F|_X = \text{id}$ folgt mit der Stetigkeit auch (42). \square

Zu einem normierten \mathbb{R} -Vektorraum $(X, \|\dots\|)$ konstruiert man eine Vervollständigung ganz ähnlich, wie man die reellen Zahlen aus den rationalen konstruiert: Die Menge der Cauchyfolgen in X bildet einen Vektorraum \tilde{Y} . Der Quotient von \tilde{Y} nach den Nullfolgen ist ein Vektorraum Y , der X in Gestalt der konstanten Folgen enthält. Wird $y \in Y$ repräsentiert durch die Cauchyfolge (x_i) , so ist $(\|x_i\|)$ konvergent und man definiert $\|y\| := \lim \|x_i\|$. Das liefert dann eine Vervollständigung von $(X, \|\dots\|)$.

Diese Konstruktionsverfahren kann man natürlich konkret auf die Integration anwenden. Man beginnt mit dem Raum der Treppenfunktionen $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n)$ und dem darauf definierten Integral. Dann zeigt man, dass

$$\|f\| := \int |f| d\phi$$

eine Norm definiert, wenn man den Raum der ϕ -fast überall verschwindenden Treppenfunktionen herausdividiert. Das liefert einen normierten Vektorraum $(\mathcal{T}(\mathbb{R}^n), \|\dots\|)$. Den vervollständigt man durch Adjunktion der Cauchyfolgen und erhält $(L^1(\phi), \|\dots\|_1)$. Das klingt einfach, die Probleme kommen aber beim Umgang mit konkreten Funktionen. Wir haben zum Beispiel gesehen, dass L^1 -Konvergenz ziemlich kompliziert mit punktweiser Konvergenz zusammenhängt.

9 Der Satz von Stokes

Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung sagt, dass für eine stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{[a,b]} f' d\mu_1 = f|_a^b.$$

Der Satz von Stokes ist eine in jeder Beziehung sehr starke Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes. An die Stelle des Intervalls und seiner Endpunkte treten eine k -dimensionale kompakte *Mannigfaltigkeit* M und ihr Rand ∂M , der eine $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Stellen Sie sich M als Fläche im \mathbb{R}^3 (zum Beispiel als Halbsphäre) und ∂M als deren Randkurve vor. Man bekommt also

$$\int_M ?' = \int_{\partial M} ?$$

Aber was wird da integriert? Die n -reihige Determinante dient in der Linearen Algebra zur Berechnung n -dimensionaler Volumina, sie ist so etwas wie ein n -dimensionales Maß. *Differentialformen von Grad k* sind Verallgemeinerungen der Determinante und so etwas wie k -dimensionale Maße. Sie sind die "natürlichen" Integranden auf k -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Für sie gibt es eine Verallgemeinerung der Ableitung, die sogenannte *Cartansche Ableitung*. Sie macht aus einer Differentialform ω vom Grad $k-1$ eine Differentialform $d\omega$ vom Grad k . Funktionen sind 0-Formen, die Cartansche Ableitung der Funktion f ist die Differentialform vom Grad 1 gegeben durch $Df = f'dx$.

Der Satz von Stokes besagt dann, dass

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dieser Satz hat viele Anwendungen und Facetten, deren wichtigste sicher seine Funktion als Bindeglied zwischen Analysis (Integration, Ableitung) und Geometrie (Mannigfaltigkeit, Rand) ist. In dieser Gestalt spielt der Satz eine zentrale Rolle für die Entwicklung der Differentialtopologie und der algebraischen Topologie.

Er hat aber auch viele physikalische Anwendungen: Er erklärt zum Beispiel das Phänomen der Induktion in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld. Oder er besagt, dass die Flussbilanz einer physikalischen Größe durch die Oberfläche eines Gebietes gerade das Integral über die Quelledichte dieser Größe im Inneren liefert. Damit spielt er unter verschiedenen Namen und in sehr verschiedenen Schreibweisen eine zentrale Rolle in der Elektrodynamik, in der Hydrodynamik, in der Wärmelehre, in der Verfahrenstechnik usw. usw.

Um den Satz richtig verstehen zu können, müssen wir mit berandeten Mannigfaltigkeiten und mit Differentialformen umgehen können. Wir beginnen mit den letzteren. Dazu bedarf es einer gewissen Vorbereitung in linearer Algebra, mit der wir jetzt anfangen.

9.1 Alternierende multilineare Algebra

- Wir definieren *alternierende k-Formen* in einem n -dimensionalen Vektorraum und lernen verschiedene Beispiele dafür kennen, die sich später als *die* typischen Beispiele herausstellen werden.
- Wir lernen, warum alternierende Formen so heißen.
- Wir bestimmen die Dimension des Raumes der k -Formen.
- Wir definieren das *Zurückholen* von Formen mit linearen Abbildungen und benutzen n -Formen im n -dimensionalen Raum zur Definition einer *Orientierung*.

Zur Bezeichnung: Wir werden häufiger Permutationen benötigen. Wir bezeichnen mit \mathcal{S}_n die *Gruppe der Permutationen von* $\{1, \dots, n\}$ und mit

$$\text{sign}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \det(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

das *Signum* der Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und V^* sein Dualraum.

Definition 138. Sei $k \in \mathbb{N}$.

Eine *alternierende k -Form* auf V ist eine k -lineare Abbildung

$$\omega : \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = 0, \text{ falls zwei der } v_i \text{ gleich sind.}$$

Der Vektorraum der alternierenden k -Formen wird mit $\Lambda^k V^*$ bezeichnet. Wir setzen

$$\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}.$$

Das typische Beispiel einer alternierenden Form ist die Determinante.

Beispiel 139 (Determinantenform). Für $V = \mathbb{R}^n$ definiert

$$\omega(v_1, \dots, v_n) := \det(v_1, \dots, v_n)$$

eine alternierende n -Form, und Sie wissen aus der linearen Algebra, dass die Determinanten bis auf einen skalaren Faktor die einzige alternierende n -Form auf dem \mathbb{R}^n ist, d.h. $\dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* = 1$.

□

Beispiel 140 (1-Formen). Es gilt $\Lambda^1 V^* = V^*$. Alternierende 1-Formen sind also einfach *Linearformen*. In einem Euklidischen Vektorraum oder allgemeiner in einem reellen Vektorraum mit einem nicht degenerierten inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hat man einen Isomorphismus

$$V \rightarrow \Lambda^1 V^*, \quad v \mapsto \omega^v := \langle \cdot, v \rangle.$$

□

Satz 141. Für $\omega \in \Lambda^k V^*$ und jede Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ gilt

$$\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k).$$

Darum heißen die alternierenden Formen *alternierend*.

Beweis. Vgl. Determinantentheorie in der linearen Algebra. Die Idee ist diese:

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(v_1 + v_2, v_1 + v_2, v_3, \dots, v_k) \\ &= \underbrace{\omega(v_1, v_1, v_3, \dots, v_k)}_{=0} + \omega(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k) + \omega(v_2, v_1, v_3, \dots, v_k) + \underbrace{\omega(v_2, v_2, v_3, \dots, v_k)}_{=0} \\ &= \omega(v_1, v_2, v_3, \dots, v_k) + \omega(v_2, v_1, v_3, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

Aus der Determinantenform auf dem \mathbb{R}^n kann man neue Formen gewinnen, wie wir in den beiden nächsten Beispielen zeigen:

Beispiel 142 (Flussform). Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist

$$*\omega^v := \det(v, \dots)$$

eine alternierende $(n-1)$ -Form, und

$$V \rightarrow \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*, \quad v \mapsto *\omega^v$$

ist ein Isomorphismus. (Beweis?) Den Namen “Flussform” erklären wir später.

□

Beispiel 143. Seien $k \in \{1, \dots, n\}$ und $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Dann definiert

$$\omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k) := \det(e_1, \dots, \overset{i_1}{\downarrow} v_1, \dots, \overset{i_k}{\downarrow} v_k, \dots, e_n)$$

eine alternierende k -Form auf dem \mathbb{R}^n . Zum Beispiel ist $\omega^{2 \dots n} = *\omega^{e_1}$.

Anschaulich kann man sich $\omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k)$ so vorstellen: Die Vektoren v_1, \dots, v_k spannen im \mathbb{R}^n ein k -dimensionales Parallelotop Π auf. $\omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k)$ ist bis aufs Vorzeichen das k -dimensionale Volumen der orthogonalen Projektion von Π in den von e_{i_1}, \dots, e_{i_k} aufgespannten Unterraum.

Schreibt man $v_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} e_i$, so erhält man

$$\begin{aligned} \omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k) &= \det \left(e_1, \dots, \overset{i_1}{\downarrow} \sum_{m_1=1}^n v_{m_1 1}, \dots, \overset{i_k}{\downarrow} \sum_{m_k=1}^n v_{m_k k}, \dots, e_n \right) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_k=1}^n v_{m_1 1} \dots v_{m_k k} \det(e_1, \dots, \overset{i_1}{\downarrow} e_{m_1}, \dots, \overset{i_k}{\downarrow} e_{m_k}, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Nur die Summanden sind $\neq 0$, für die (m_1, \dots, m_k) eine Permutation von (i_1, \dots, i_k) ist. Für diese liefert die Determinante gerade das Signum der Permutation:

$$\omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) v_{i_{\sigma(1)} 1} \dots v_{i_{\sigma(k)} k}.$$

Wir halten fest, dass für $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ gilt

$$\omega^{i_1 \dots i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (j_1, \dots, j_k) = (i_1, \dots, i_k), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (43)$$

□

Die Rechnung aus dem vorstehenden Beispiel angewendet nicht auf $\omega^{i_1 \dots i_k}$, sondern auf ein beliebiges $\omega \in \Lambda^k V^*$, liefert mit Satz 141

Satz 144. Für $\omega \in \Lambda^k V^*$, eine Basis (e_1, \dots, e_n) von V und $v_j = \sum_{i=1}^n v_{ij} e_i$ gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) v_{i_{\sigma(1)}} \dots v_{i_{\sigma(k)}}.$$

Inbesondere ist ω durch seine Werte auf den (monotonen k -tupeln von) Basisvektoren eindeutig bestimmt.

Satz 145. Sei $n := \dim V$. Dann ist

$$\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}.$$

Beweis. Wir beweisen das zunächst nur für $V = \mathbb{R}^n$, den allgemeinen Fall erledigen wir im Anschluss an die Definition 147.

Für $k > n$ sind je k Vektoren im \mathbb{R}^n linear abhängig, und deshalb ist jede alternierende k -Form $\omega = 0$:

$$\dim \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* = 0 = \binom{n}{k}, \quad \text{falls } k > n.$$

Sei nun $k \leq n$. Nach Beispiel 143 und Satz 144 gilt für jedes $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$

$$\begin{aligned} \omega(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) v_{i_{\sigma(1)}} \dots v_{i_{\sigma(k)}} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega^{i_1 \dots i_k}(v_1, \dots, v_k), \end{aligned}$$

also

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega^{i_1 \dots i_k}.$$

Nach (43) sind die $\omega^{i_1 \dots i_k}$ linear unabhängig, und daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 146. Mit dem Euklidischen Raum \mathbb{R}^n kommen zwei weitere Räume, die nach dem vorstehenden Satz auf kanonische Weise isomorph zu \mathbb{R}^n sind:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*, & u &\mapsto \omega^u := \langle \cdot, u \rangle, \\ \mathbb{R}^n &\rightarrow \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*, & u &\mapsto * \omega^u := \det(u, \dots). \end{aligned}$$

Es stellt sich heraus, dass manche physikalische Größen (zum Beispiel *Impuls* oder *Magnetfeld*), die üblicherweise als Vektoren interpretiert werden, mathematisch besser zu „verstehen“ sind, wenn man sie als 1-Formen oder $(n-1)$ -Form interpretiert. Vgl. die Beispiele 159 und 255.

□

Definition 147 (Zurückholen von Formen). Ist $f : W \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und $\omega \in \Lambda^k V^*$, so definiert

$$f^* \omega(w_1, \dots, w_k) := \omega(f(w_1), \dots, f(w_k))$$

eine alternierende k -Form auf W , die mit f zurückgeholte Form. Die Abbildung

$$f^* : \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^k W^*, \quad \omega \mapsto f^* \omega$$

ist linear.

Das Zurückholen von Formen erfüllt offenbar

$$(h \circ f)^* = f^* \circ h^* \quad \text{und} \quad \text{id}^* = \text{id}.$$

Deshalb liefert ein Isomorphismus $f : V \rightarrow W$ für jedes k eine Isomorphie $\Lambda^k W^* \cong \Lambda^k V^*$.

Das beweist den Satz 145 für beliebiges V .

Satz 148. Für $f \in \text{End}(V)$ und $\mu \in \Lambda^n V^*$ mit $n = \dim V$ ist

$$f^* \mu = (\det f) \mu.$$

Beweis. Falls $\mu = 0$ ist nichts zu zeigen.

Andernfalls ist μ eine Basis des $\binom{n}{n} = 1$ -dimensionalen Vektorraums $\Lambda^n V^*$, und

$$f^* \mu = c \mu$$

für eine Konstante c , die wir nun bestimmen. Sei (e_i) eine Basis von V und $f(e_j) = \sum_i f_{ij} e_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} c \mu(e_1, \dots, e_n) &= f^* \mu(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} f_{i_1 1} \dots f_{i_n n} \mu(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} f_{\sigma(1)1} \dots f_{\sigma(n)n} \mu(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sign}(\sigma) f_{\sigma(1)1} \dots f_{\sigma(n)n} \mu(e_1, \dots, e_n) \\ &= (\det f) \mu(e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

Weil $\mu(e_1, \dots, e_n) \neq 0$ folgt die Behauptung.

□

Definition 149 (Orientierung, Volumenform). Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum.

- (i) $\Lambda^n V^*$ ist ein 1-dimensionaler Vektorraum, $\Lambda^n V^* \setminus \{0\}$ besteht also aus zwei Zusammenhangskomponenten. Jede von diesen heißt *eine Orientierung* von V und V zusammen mit einer solchen *ein orientierter Vektorraum*. Eine Orientierung ist also gegeben durch eine alternierende n -Form $\mu \neq 0$, und $\lambda\mu$ mit $\lambda \neq 0$ liefert dieselbe Orientierung genau dann, wenn $\lambda > 0$.

Eine Basis (v_1, \dots, v_n) in einem orientierten Vektorraum V heißt *positiv orientiert*, wenn für ein und dann für alle μ aus der Orientierung

$$\mu(v_1, \dots, v_n) > 0.$$

Umgekehrt bestimmt jede Basis (v_1, \dots, v_n) eine Orientierung

$$\{\mu \in \Lambda^n V^* \mid \mu(v_1, \dots, v_n) > 0\}.$$

- (ii) Ist V ein orientierter *Euklidischer* Vektorraum, so gibt es in der Orientierung genau ein $\mu \in \Lambda^n V^*$, welches auf einer und nach Satz 148 dann auf jeder positiv orientierten Orthonormalbasis den Wert 1 annimmt. Dieses μ heißt die *Volumenform* des orientierten Euklidischen Vektorraums V .

Bemerkungen. 1. In der Linearen Algebra definiert man die Orientierung eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraumes häufig als eine Äquivalenzklasse von Basen, wobei zwei Basen äquivalent oder gleich-orientiert heißen, wenn sie durch einen Automorphismus mit positiver Determinante ineinander überführt werden. Überlegen Sie, dass das mit der obigen Definition übereinstimmt.

2. Für $V = \{0\}$ ist nach Definition $\Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$. Die beiden Komponenten von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ lassen sich charakterisieren durch die Zahlen $+1$ und -1 , und unter einer Orientierung von $V = \{0\}$ versteht man die Wahl einer dieser Zahlen.

9.1.1 Äußeres Produkt

- Wir definieren ein assoziatives Produkt zwischen alternierenden Formen und benutzen dieses, um k -Formen mit Hilfe von 1-Formen darzustellen.

Multilinearformen, die nicht alternieren, kann man mit Gewalt dazu bringen:

Definition 150 (Alternierung). Ist $T : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine k -lineare Abbildung, so ist $\text{Alt}(T)$ mit

$$\text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

eine alternierende k -Form, die *Alternierung von T* .

Ist T bereits alternierend, so ist $\text{Alt}(T) = T$.

Beweis, dass $\text{Alt}(T)$ alternierend ist. Sei $\tau \in \mathcal{S}_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Alt}(T)(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) T(v_{\sigma(\tau(1))}, \dots, v_{\sigma(\tau(k))}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\rho \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\rho\tau^{-1}) T(v_{\rho(1)}, \dots, v_{\rho(k)}) \\ &= \text{sign}(\tau) \text{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

□

Wir benutzen das, um für alternierende Formen ein Produkt zu erklären.

Definition 151. Seien $\omega \in \Lambda^k V^*$, $\theta \in \Lambda^l V^*$.

- (i) Das *Tensorprodukt* $\omega \otimes \theta$ von ω und θ ist definiert durch

$$(\omega \otimes \theta)(v_1, \dots, v_{k+l}) := \omega(v_1, \dots, v_k) \theta(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}).$$

- (ii) Das *äußere Produkt* $\omega \wedge \theta \in \Lambda^{k+l} V^*$ von ω und θ ist definiert durch

$$\omega \wedge \theta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \theta).$$

Satz 152. Seien $\omega, \omega_i \in \Lambda^k V^*$, $\theta \in \Lambda^l V^*$, $\eta \in \Lambda^m V^*$ und $f : W \rightarrow V$ linear. Dann gelten folgende Regeln

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2) \wedge \theta &= \omega_1 \wedge \theta + \omega_2 \wedge \theta, \\ (a\omega) \wedge \theta &= a(\omega \wedge \theta), \\ f^*(\omega \wedge \theta) &= f^*\omega \wedge f^*\theta, \\ \omega \wedge \theta &= (-1)^{kl} \theta \wedge \omega, \\ (\omega \wedge \theta) \wedge \eta &= \omega \wedge (\theta \wedge \eta). \end{aligned}$$

Beweis. Bis auf die letzten zwei Aussagen ist das leicht zu beweisen. Für diese vgl. Spivak p. 80/81 oder Agricola/Friedrich p. 2. □

Beispiel 153. Für $\phi \in \Lambda^0 V^* = \mathbb{R}$ und $\omega \in \Lambda^k V^*$ ist offenbar $\phi \otimes \omega = \phi\omega$, und weil das eine alternierende k -Form ist, folgt

$$\phi \wedge \omega = \phi\omega.$$

□

Beispiel 154. Für $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^1 V^*$ und $v_1, v_2 \in V$ ist

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) &= \frac{2!}{1!1!} \frac{1}{2!} (\omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1)) \\ &= \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1). \end{aligned}$$

□

Beispiel 155. Vgl. Beispiel 146. Für $u, v \in \mathbb{R}^3$ findet man mit der Formel aus dem letzten Beispiel wegen $\omega^u(e_i) = \langle e_i, u \rangle = u_i$

$$(\omega^u \wedge \omega^v)(e_i, e_j) = u_i v_j - u_j v_i$$

Das sieht so aus, wie die Komponenten des Vektorproduktes $u \times v$. Zeigen Sie

$$\boxed{\omega^u \wedge \omega^v = * \omega^{u \times v}.}$$

Das Dachprodukt kann man also auffassen als eine Verallgemeinerung des Vektorproduktes auf beliebig-dimensionale Räume. Die spezielle Situation im dreidimensionalen kommt dadurch zustande, dass $1 + 1 = 3 - 1$ ist.

□

Lemma 156. Seien $\omega \in \Lambda^{k-1} V^*$, $\theta \in \Lambda^1 V^*$ und $v_1, \dots, v_k \in V$. Dann gilt

$$\boxed{(\omega \wedge \theta)(v_1, \dots, v_k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k) \theta(v_j).} \quad (44)$$

Beweis. Nach Definition ist

$$(\omega \wedge \theta)(v_1, \dots, v_k) = \frac{k!}{(k-1)!1!} \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} \text{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k-1)}) \theta(v_{\sigma(k)}).$$

Ist $j := \sigma(k)$, so ist der ω -Term in der Summe

$$\pm \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k),$$

wobei \widehat{v}_j bedeutet, dass v_j ausgelassen wird.

Das Vorzeichen bestimmt sich durch die Permutation, die $v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k-1)}$ in die monotone Reihenfolge $v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k$ bringt:

$$(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k-1)}, v_{\sigma(k)}) \xrightarrow{\text{sign}(\sigma)} (v_1, \dots, v_j, \dots, v_k) \xrightarrow{(-1)^{k-j}} (v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k, v_j)$$

Also folgt

$$(\omega \wedge \theta)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_k \\ \sigma(k) = j}} \underbrace{\text{sign}(\sigma)^2}_{=1} (-1)^{k-j} \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k) \theta(v_j).$$

Weil es in \mathcal{S}_k gerade $(k-1)!$ Permutationen mit $\sigma(k) = j$ gibt, erhalten wir daraus (44). \square

Statt $(-1)^{k-j}$ kann man in (44) natürlich auch $(-1)^{k+j}$ schreiben. Dann hat die Formel (44) Ähnlichkeit mit dem Laplaceschen Determinantenentwicklungssatz. Das ist kein Zufall, wie der Beweis zum nächsten Satz zeigt.

Satz 157. Seien $v_1, \dots, v_k \in V$ und $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1 V^* = V^*$. Dann gilt

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega_i(v_j))_{i,j=1, \dots, k}. \quad (45)$$

Die Formel (45) ist der Grund für den merkwürdigen Koeffizienten bei der Definition von \wedge .

Beweis. Vollständige Induktion über k .

Der Fall $k = 1$ ist trivial.

$(k-1) \rightarrow k$.

$$\begin{aligned} & (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{k-1}) \wedge \omega_k(v_1, \dots, v_k) \\ & \stackrel{(44)}{=} \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{k-1}(v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_k) \omega_k(v_j) \\ & = \sum_{j=1}^k (-1)^{k+j} \begin{bmatrix} \omega_1(v_1) & \dots & \widehat{\omega_1(v_j)} & \dots & \omega_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega_{k-1}(v_1) & \dots & \widehat{\omega_{k-1}(v_j)} & \dots & \omega_{k-1}(v_k) \end{bmatrix} \omega_k(v_j) \\ & = \det(\omega_i(v_j)), \end{aligned}$$

wobei der Entwicklungssatz von Laplace nach der letzten Zeile benutzt wurde. \square

Satz 158. Seien (e_1, \dots, e_n) eine Basis von V und $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die duale Basis von V^* . Dann gilt für $\omega \in \Lambda^k V^*$:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}.$$

$(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$ ist eine Basis für $\Lambda^k V^*$, und die $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \in \mathbb{R}$ sind die Entwicklungskoeffizienten von ω bezüglich dieser Basis.

Dieser Satz erklärt die Notation $\Lambda^k V^*$: Das ist der Raum der von den k -fachen Produkten von Formen aus V^* erzeugt wird, die k -te "äußere Potenz" von V^* .

Beweis. Sei $j_1 < \dots < j_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) (\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\ & = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \underbrace{\det(\omega_{i_\alpha}(e_{j_\beta}))}_{=0, \text{ falls } (j_1, \dots, j_k) \neq (i_1, \dots, i_k)} \\ & = \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}). \end{aligned}$$

Aus dem Satz 144 folgt daher die Behauptung. \square

Beispiel 159 (Basisdarstellung in $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$). Sei $V = \mathbb{R}^n$. Die duale Basis zur Standardbasis bezeichnen wir mit x_1, \dots, x_n . Das sind gerade die Projektionen auf die Koordinatenachsen. Dann gilt also

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k}.$$

In diesem Fall ist $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_k} = \omega^{i_1 \dots i_k}$, vgl. Beispiel 143. □

Beispiel 160. Seien etwa $\omega = \sum a_i x_i$, $\theta = \sum b_i x_i$. Dann ist

$$\omega \wedge \theta = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i) x_i \wedge x_j.$$

□

Bemerkung. Man bezeichnet die Räume $\Lambda^k V^*$ mit dem äußeren Produkt, oder, formal genauer, die direkte Vektorraumsumme

$$\Lambda^* V^* := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V^*$$

mit der darauf durch \wedge induzierten Multiplikation als die *Graßmannalgebra* von V^* .⁷

Hermann Graßmann (1809-1877) war nicht nur der Erfinder dieser Operation, man kann ihn als den Erfinder der abstrakten Linearen Algebra im heutigen Sinne ansehen. Er war seinen Zeitgenossen damit weit voraus, konnte sich aber als Autodidakt kaum verständlich machen und wurde deshalb lange Zeit seines Lebens von der etablierten Mathematik nicht gewürdigt, ja kaum wahrgenommen. Außer zur Mathematik hat er bedeutende Beiträge auch zur Physik und zur Sprachwissenschaft geleistet.

Zum Wirken und zur Person von Hermann Graßmann sei der entsprechende Abschnitt in Felix Kleins "Mathematik im 19. Jahrhundert" empfohlen.

⁷ Die Graßmannalgebra $\Lambda^k V$ des endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraumes V "selbst", also ohne Sternchen, kann man im Rahmen unserer Behandlung mit Hilfe der kanonischen Isomorphie $(V^*)^* \cong V$ definieren.

9.2 Differentialformen

- Ein Vektorfeld ist eine Abbildung

$$X : V \supset G \rightarrow V,$$

die jedem Punkt $p \in G$ einen Vektor $X(p)$ zuordnet.

Ebenso ist eine Differentialform vom Grad k ein Feld alternierender k -Formen, also eine Abbildung

$$\omega : V \supset G \rightarrow \Lambda^k V^*,$$

die jedem Punkt $p \in G$ eine alternierende k -Form ω_p zuordnet.

- Wir übertragen unsere Kenntnisse der alternierenden k -Formen auf k -Formenfelder.
- Insbesondere lernen wir die Basisdarstellung von Differentialformen kennen. Eine Klippe ist dabei die gängige Praxis, konstante Abbildungen mit demselben Symbol zu bezeichnen wie ihren Wert.

Seien V ein endlich-dimensionaler normierter \mathbb{R} -Vektorraum, $G \subset V$ eine offene Menge und $k \in \mathbb{N}$.

Definition 161. Eine C^∞ -Abbildung

$$\omega : G \rightarrow \Lambda^k V^*, p \mapsto \omega_p.$$

heißt eine *Differentialform vom Grad (oder Rang) k auf G* .

Die Addition und Skalarmultiplikation sowie das Dachprodukt von alternierenden Multilinearformen übertragen sich „wertweise“ auf Differentialformen. Außerdem kann man Differentialformen wertweise mit reellwertigen C^∞ -Funktionen multiplizieren.

Auf diese Weise bilden die Differentialformen vom Grad k einen Modul

$$\Omega^k(G) := C^\infty(G, \Lambda^k V^*)$$

über dem Ring $C^\infty(G, \mathbb{R})$ der reellwertigen C^∞ -Funktionen.

Bemerkung. Natürlich kann man auch Differentialformen mit niedrigerer Differenzierbarkeitsordnung definieren. Aber bei der Differentiation von Differentialformen endlicher Differenzierbarkeitsordnung verliert man jeweils eine Ordnung. Das führt dazu, dass man neben dem Grad ständig auch noch die Differenzierbarkeitsordnung kontrollieren muss. Wir vermeiden dieses Problem, indem wir uns auf den C^∞ -Fall beschränken.

Beispiel 162. $\Omega^0(G) = C^\infty(G, \mathbb{R})$ sind die C^∞ -Funktionen auf G .

□

Beispiel 163. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion, so ist

$$Df : G \rightarrow L(V, \mathbb{R}) = V^* \in \Omega^1(G).$$

Im Zusammenhang mit Differentialformen schreiben wir meistens df statt Df , vgl. Abschnitt 9.3.

□

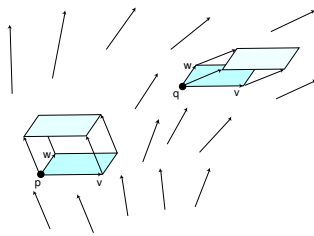
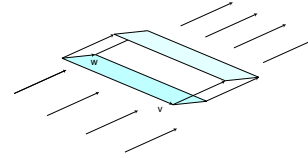
Beispiel 164. Alternierende k -Formen kann man als konstante Differentialformen auffassen. Dann ist also

$$\Lambda^k V^* \subset \Omega^k(V).$$

□

Beispiel 165 (Zur anschaulichen Vorstellung). Eine alternierende 2-Form $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ kann man sich als Strömung einer Flüssigkeit im \mathbb{R}^3 vorstellen: $\omega(v, w)$ gibt an, wieviel davon pro Zeiteinheit durch das von den Vektoren v und w aufgespannte Parallelogramm hindurchfließt.⁸

Dabei ist kommentarlos unterstellt, dass die Strömung stationär ist, d.h. dass es nicht darauf ankommt, wann die Zeiteinheit gewählt ist, und es ist unterstellt, dass die Strömung homogen ist, d.h. dass es nicht darauf ankommt, wo im \mathbb{R}^3 das Parallelogramm liegt (Translationsinvarianz).



Differentialformen ermöglichen es, wenigstens die zweite Spezialisierung aufzugeben, also eine stationäre inhomogene Strömung zu modellieren und zwar durch eine *Differentialform* $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Für (hinreichend kleine) Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ gibt

$$\omega_p(v, w)$$

an, wieviel Flüssigkeit pro Zeiteinheit durch das von v und w an der Stelle $p \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte Parallelogramm fließt.

Genauer liefert

$$\omega_p(v, w) = \lim_{h \searrow 0} \frac{\text{Fluss durch das von } (hv, hw) \text{ aufgespannte Parallelogramm}}{h^2}$$

die Flussdichte durch das von v und w bestimmte infinitesimal kleine Parallelogramm im Punkte p .

□

Beispiel 166 (Die Flussform). Sei $F : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^∞ -Vektorfeld. Dann definiert

$$\boxed{* \omega_p^F(v_1, \dots, v_{n-1}) := \det(F(p), v_1, \dots, v_{n-1})} \quad (46)$$

eine Differentialform $*\omega^F \in \Omega^{n-1}(G)$, die den „Fluss“ des Vektorfeldes F durch die von $n-1$ Vektoren aufgespannten infinitesimalen Hyperflächenstücke misst, und die wir die *Flussform* zu F nennen.

Ist V nicht der \mathbb{R}^n , sondern ein *orientierter Euklidischer Vektorraum* und $\mu \in \Lambda^n V^*$ seine Volumenform, vgl. die Definition 149, so kann man auch in diesem Fall zu jedem Vektorfeld $F : V \supset G \rightarrow V$ eine Flussform

$$*\omega^F := \mu(F, \dots)$$

definieren.

□

Definition 167. Ist $h : G \rightarrow H \subset W$ eine C^∞ -Abbildung in die offene Teilmenge H des Vektorraumes W , und ist $\omega \in \Omega^k(H)$, so definiert

$$(h^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_{h(p)}(D_p h(v_1), \dots, D_p h(v_k))$$

eine k -Form $h^* \omega \in \Omega^k(G)$, die mit h zurückgeholte Form.

⁸ Ist u der Geschwindigkeitsvektor der Strömung, so ist $\omega = *\omega^u$. Das ist ein Beispiel dafür, dass man Strömungen bequem durch 2-Formen modelliert.

Beispiel 168. Sind V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum, $\mu \in \Omega^{n-1}(V)$ und $h : V \supset G \rightarrow V$ eine C^∞ -Abbildung, so gilt nach Satz 148

$$h^*\mu = \det(Dh)\mu.$$

□

Satz 169. Für die Komposition $f \circ g$ von C^∞ -Abbildungen gilt

$$(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega). \quad (47)$$

Beweis.

$$(g^*(f^*\omega))_p(v_1, \dots) = (f^*\omega)_{g(p)}(D_p g(v_1), \dots) = \omega_{f(g(p))}(D_{g(p)} f(D_p g(v_1)), \dots).$$

□

Die Formel (47) ist also im wesentlichen die Kettenregel. Direkt aus der Definition folgt

Satz 170. Es gilt

$$f^*(\omega \wedge \theta) = f^*\omega \wedge f^*\theta$$

und

$$f^*(\phi\omega) = (\phi \circ f)f^*\omega.$$

Basisdarstellung von Differentialformen. Für das weitere Verständnis ist es ungeheuer wichtig, dass Sie sich folgende Sachverhalte klarmachen:

1. Eine (beliebige) Abbildung $f : V \supset G \rightarrow W$ in einen Vektorraum W mit Basis (w_1, \dots, w_m) kann man nach dieser Basis entwickeln:

$$f = \sum_{i=1}^m f_i w_i.$$

Die f_i sind die Komponentenfunktionen.

Insbesondere ist $f \in C^\infty$ genau dann, wenn alle $f_i \in C^\infty$.

Die duale Basis $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ zu einer Basis (e_1, \dots, e_n) von V liefert eine Basis

$$(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$$

für den Vektorraum $\Lambda^k V^*$. Infolgedessen hat man für $\omega \in \Omega^k(G)$ eine Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k} \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \quad (48)$$

mit C^∞ -Funktionen $\phi_{i_1 \dots i_k}$. Für $p \in G$ ist

$$\omega_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k}(p) \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \in \Lambda^k V^*.$$

Nach Satz 158 sind die Funktionen $\phi_{i_1 \dots i_k}$ gegeben durch

$$\phi_{i_1 \dots i_k}(p) = \omega_p(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

2. Ist $V = \mathbb{R}^n$, $k = 1$ und $\omega = df$, so hat man in $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*$ die kanonische duale Basis (x_1, \dots, x_n) und zum Beispiel

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i. \quad (49)$$

Aber so schreibt man das nicht. Stattdessen finden Sie

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i. \quad (50)$$

Der Unterschied (besser: der fehlende Unterschied) zwischen beiden Notationen ist folgender. Sind f eine reellwertige Abbildung und g eine konstante Abbildung in den Vektorraum W mit Wert w , so beschreiben

$$f w : p \mapsto f(p)w$$

und

$$f g : p \mapsto f(p)g(p) = f(p)w$$

dieselbe Abbildung. Wegen der Linearität der x_i ist nun $dx_i : p \mapsto d_p x_i = x_i$ eine konstante Abbildung. Die rechte Seite von (50) ist also zu lesen als:

$$p \mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) d_p x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) x_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*.$$

Die vorstehenden Überlegungen gelten nicht nur für 1-Formen und die kanonische Basis des \mathbb{R}^n , sondern ganz allgemein. Wir formulieren das noch einmal als Satz.

Satz 171. Sei $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ die duale Basis zu (e_1, \dots, e_n) .

(i) Sind $\phi_{i_1 \dots i_k} : G \rightarrow \mathbb{R}$ gegebene C^∞ -Funktionen, so ist

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k} d\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge d\omega_{i_k} \in \Omega^k(G).$$

(ii) Jedes $\omega \in \Omega^k(G)$ läßt sich eindeutig so darstellen, nämlich mit

$$\phi_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}).$$

(iii) Insbesondere ist jede Differentialform vom Grad k auf dem \mathbb{R}^n von der Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

mit C^∞ -Funktionen $\phi_{i_1 \dots i_k}$.

Beispiel 172. Für die Determinantenform des \mathbb{R}^n gilt

$$\det = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n).$$

Vergleiche Satz 157.

□

Beispiel 173. Für die Flussform $*\omega^F \in \Omega^{n-1}(G)$ zu einem $F : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}^n$ findet man

$$\begin{aligned}
 *\omega^F &= \sum_{i=1}^n *\omega^F(\mathbf{e}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\
 &= \sum_{i=1}^n \det(F, \mathbf{e}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \det(\mathbf{e}_1, \dots, F, \dots, \mathbf{e}_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.
 \end{aligned}$$

□

9.3 Die Cartansche oder äußere Ableitung

- Eine Differentialform ω vom Grad k ist insbesondere eine differenzierbare Abbildung $\omega : V \supset G \rightarrow L^k(V, \mathbb{R})$. Ihre Ableitung an einer Stelle $p \in G$ ist deshalb eine lineare Abbildung in $L(V, L^k(V, \mathbb{R})) = L^{k+1}(V, \mathbb{R})$, die aber im allgemeinen nicht alternierend ist. Wir machen sie “mit Gewalt” alternierend und erhalten auf diese Weise die Cartansche Ableitung.
- Wir lernen Rechenregeln für die Cartansche Ableitung kennen. Weil nach dem Schwarzschen Lemma die höheren Ableitungen *symmetrisch* sind, überrascht es nicht sehr, dass die zweifache Cartansche Ableitung verschwindet: Man macht sie ja gerade antisymmetrisch.

Definition 174 (Cartansche oder äußere Ableitung). Sei $\omega \in \Omega^k(G)$. Für jedes $j \in \{1, \dots, k+1\}$ und für $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$ ist dann

$$p \mapsto \omega_p(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1})$$

eine C^∞ -Funktion auf G (der Vektor v_j ausgelassen). Die Richtungsableitung dieser Funktion nach v_j sei mit

$$p \mapsto \partial_{v_j} \omega(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1})|_p$$

bezeichnet. Dann definiert

$$d_p \omega(v_1, \dots, v_{k+1}) := \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \partial_{v_j} \omega(v_1, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_{k+1})|_p.$$

eine Differentialform $d\omega \in \Omega^{k+1}(G)$. Sie heißt die *Cartansche* oder *äußere Ableitung* von ω .

(Man schreibt $d_p \omega$ statt $(d\omega)_p$. Die Formeln gewinnen an Übersichtlichkeit, wenn man das Argument p überhaupt unterdrückt, wie in den folgenden Beispielen.)

Dass $d_p \omega$ wirklich alternierend ist, ergibt sich aus dem nachstehenden Lemma.

Für $\omega \in \Omega^k(G) = C^\infty(G, \Lambda^k V^*)$ und $p \in G$ ist $D_p \omega \in L(V, \Lambda^k V^*) \subset L^{k+1}(V, \mathbb{R})$ eine $(k+1)$ -Linearform auf V

$$D_p \omega(v_1, \dots, v_{k+1}) := D_p \omega(v_1)(v_2, \dots, v_{k+1}) = \partial_{v_1} \omega(v_2, \dots, v_{k+1})|_p.$$

Das ist wegen der asymmetrischen Rolle des ersten Arguments nicht alternierend. Aber wir können darauf die Alternierung aus Definition 150 anwenden und erhalten:

Lemma 175. Für $\omega \in \Omega^k(G)$ und $p \in G$ ist

$$d_p \omega = (k+1) \text{Alt } D_p \omega.$$

Beweis. Für $j \in \{1, \dots, k+1\}$ bezeichne $\tau_j \in \mathcal{S}_{k+1}$ die Transposition von 1 und j . Dann gilt für $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$

$$\begin{aligned}
(k+1) \text{ Alt } D_p \omega(v_1, \dots, v_{k+1}) &= \frac{k+1}{(k+1)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1}} \text{sign}(\sigma) D_p \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k+1)}) \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1}} \text{sign}(\sigma) \partial_{v_{\sigma(1)}} \omega(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)})|_p \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1} \\ \sigma(1)=1}} \text{sign}(\tau_j \circ \sigma) \partial_{v_{\tau_j \circ \sigma(1)}} \omega(v_{\tau_j \circ \sigma(2)}, \dots, v_{\tau_j \circ \sigma(k+1)})|_p \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1} \\ \sigma(1)=1}} \text{sign}(\tau_j \circ \sigma) \partial_{v_j} \omega(v_{\tau_j \circ \sigma(2)}, \dots, v_{\tau_j \circ \sigma(k+1)})|_p \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1} \\ \sigma(1)=1}} \text{sign}(\tau_1 \circ \sigma) \partial_{v_1} \omega(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)})|_p \\
&\quad - \frac{1}{k!} \sum_{j=2}^{k+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1} \\ \sigma(1)=1}} \text{sign}(\sigma) \partial_{v_j} \omega(v_{\tau_j \circ \sigma(2)}, \dots, v_{\tau_j \circ \sigma(k+1)})|_p \\
&= \partial_{v_1} \omega(v_2, \dots, v_{k+1})|_p - \frac{1}{k!} \sum_{j=2}^{k+1} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{k+1} \\ \sigma(1)=1}} \partial_{v_j} \omega(v_{\tau_j(2)}, \dots, v_{\tau_j(k+1)})|_p \\
&= \partial_{v_1} \omega(v_2, \dots, v_{k+1})|_p - \sum_{j=2}^{k+1} \partial_{v_j} \omega(v_2, \dots, v_{j-1}, v_1, v_{j+1}, \dots, v_{k+1})|_p \\
&= \partial_{v_1} \omega(v_2, \dots, v_{k+1})|_p - \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j-2} \partial_{v_j} \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1})|_p \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \partial_{v_j} \omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1})|_p.
\end{aligned}$$

□

Beispiel 176.

$$\omega \in \Omega^1(G) \implies d\omega(v, w) = \partial_v \omega(w) - \partial_w \omega(v).$$

□

Beispiel 177. Für die Flussform $*\omega^F = \det(F, \dots) \in \Omega^{n-1}(G)$ auf dem \mathbb{R}^n ergibt sich

$$d*\omega^F(e_1, \dots, e_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \partial_{e_j} \underbrace{\det(F, e_1, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_n)}_{=(-1)^{j-1} F_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j} = \text{div } F.$$

Also

$$d*\omega^F = (\text{div } F) \det = (\text{div } F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

□

Lemma 178. Seien $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Abbildung auf der offenen Menge $G \subset V$ und $\omega_0 \in \Lambda^k V^*$. Dann gilt

$$d(\phi \omega_0) = d\phi \wedge \omega_0.$$

Beweis. Nach Lemma 156 und der vorletzten Formel aus Satz 152 gilt für $\theta \in \Lambda^1 V^*$, $\omega_0 \in \Lambda^k V^*$ und $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$

$$(\theta \wedge \omega_0)(v_1, \dots, v_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \theta(v_j) \omega_0(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1}).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} ((d\phi) \wedge \omega_0)(v_1, \dots, v_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} d\phi(v_j) \omega_0(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \partial_{v_j} \phi \omega_0(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{k+1}) \\ &= d(\phi \omega_0)(v_1, \dots, v_{k+1}). \end{aligned}$$

□

Lemma 179. *Die Cartansche Ableitung*

$$d : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^{k+1}(G)$$

ist \mathbb{R} -linear.

Beweis. Trivial

□

Satz 180. *Mit den Bezeichnungen von Satz 171 sei*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k} d\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge d\omega_{i_k} \in \Omega^k(G).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\phi_{i_1 \dots i_k} \wedge d\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge d\omega_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \partial_{e_j} \phi_{i_1 \dots i_k} d\omega_j \wedge d\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge d\omega_{i_k}. \end{aligned}$$

Im Fall der kanonischen Basis des \mathbb{R}^n hat man für

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \phi_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

also

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Beweis. Triviale Folge aus den Lemmas 178 und 179 in Verbindung mit

$$d\phi = \sum_j \partial_{e_j} \phi d\omega_j.$$

Beachten Sie, dass die $d\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge d\omega_{i_k}$ konstante Differentialformen sind.

□

Beispiel 181. Bezeichnen wir die Koordinatenfunktionen auf dem \mathbb{R}^2 mit x, y statt mit x_1, x_2 , so ist

$$\omega := x dy - y dx \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$$

und

$$d\omega = dx \wedge dy - dy \wedge dx = 2 dx \wedge dy.$$

□

Beispiel 182. Wir berechnen noch einmal, und zwar jetzt in Koordinaten, die Cartansche Ableitung der Flussform

$$*\omega^F = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Wir erhalten wie früher

$$\begin{aligned} d*\omega^F &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \underbrace{dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n}_{=0 \text{ für } j \neq i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = (\operatorname{div} F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

□

Satz 183. Für die Cartansche Ableitung gelten die folgenden Rechenregeln:

- (i) $d : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^{k+1}(G)$ ist \mathbb{R} -linear.
- (ii) $d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge (d\theta)$, wenn $\omega \in \Omega^k(G), \theta \in \Omega^l(G)$.
- (iii) $d(d\omega) = 0$.
- (iv) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, wenn $(f : V \supset G \rightarrow H \subset W) \in C^\infty(G, W)$ und $\omega \in \Omega^k(H)$.

Beweis. Zu (i). Das war Lemma 179.

Zu (ii). Weil d linear ist, können wir o.E. annehmen, dass

$$\omega = \phi \omega_0, \quad \theta = \psi \theta_0.$$

mit $\phi, \psi \in C^\infty(G, \mathbb{R})$ und $\omega_0 \in \Lambda^k V^*, \theta_0 \in \Lambda^l V^*$. Dann gilt

$$\omega \wedge \theta = \phi \psi \underbrace{\omega_0 \wedge \theta_0}_{\text{konstant}}$$

und nach Lemma 178 ist

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \theta) &= d(\phi \psi) \wedge (\omega_0 \wedge \theta_0) = (d\phi)\psi \wedge (\omega_0 \wedge \theta_0) + \phi(d\psi) \wedge \omega_0 \wedge \theta_0 \\ &= (d\phi \wedge \omega_0) \wedge \psi \theta_0 + (-1)^k (\phi \omega_0) \wedge (d\psi \wedge \theta_0) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Zu (iii). Wieder genügt es, den Fall

$$\omega = \phi \omega_0$$

mit ϕ und ω_0 wie oben zu betrachten. Dafür gilt $d\omega = d\phi \wedge \omega_0$ und nach (ii)

$$d^2\omega = (d^2\phi) \wedge \omega_0.$$

Also genügt es zu zeigen, dass $d^2\phi = 0$ für C^∞ -Funktionen ϕ . Aber

$$d(d\phi)(v, w) = \partial_v d\phi(w) - \partial_w d\phi(v) = \partial_v \partial_w \phi - \partial_w \partial_v \phi = 0$$

nach dem Satz von Schwarz.

Zu (iv). Für Funktionen $\phi \in C^\infty(H, \mathbb{R}) = \Omega^0(H)$ gilt

$$d(f^*\phi) = d(\phi \circ f) = d\phi \circ Df = f^*d\phi.$$

Für eine konstante 1-Form $\omega_0 \in \Lambda^1 W^*$ und $u, v \in V$ gilt

$$d(f^*\omega_0)(u, v) = \partial_u \omega_0(Df(v)) - \partial_v \omega_0(Df(u)) = \omega_0(\partial_u \partial_v f) - \omega_0(\partial_v \partial_u f) = 0$$

nach dem Satz von Schwarz. Nach (ii) ist dann aber auch

$$d(f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)) = 0$$

für beliebige $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Lambda^1 W^*$, also ist

$$d(f^*\omega_0) = 0$$

für jede konstante k -Form $\omega_0 \in \Lambda^k W^*$.

Schließlich folgt für $\omega = \phi \omega_0$ mit $\phi \in C^\infty(H, \mathbb{R})$ und $\omega_0 \in \Lambda^k W^*$

$$\begin{aligned} d(f^*\omega) &= d(f^*(\phi\omega_0)) = d((f^*\phi)f^*\omega_0) = (d(f^*\phi)) \wedge (f^*\omega_0) \\ &= f^*(d\phi) \wedge (f^*\omega_0) = f^*(d(\phi\omega_0)) = f^*(d\omega). \end{aligned}$$

Mit der Linearität von d und f^* folgt daraus die Behauptung. \square

Ein Rätsel. Im obigen Beweis haben wir gezeigt, dass für C^∞ -Abbildungen $f : V \rightarrow W$ und $\omega_0 \in \Lambda^1 W^*$

$$d(f^*\omega_0) = 0.$$

Andrerseits ist für die lineare Abbildung $\omega_0 : W \rightarrow \mathbb{R}$ doch

$$d_p \omega_0 = \omega_0, \text{ für alle } p \in W,$$

und nach Teil (iv) des vorstehenden Satzes ist daher

$$d(f^*\omega_0) = f^*(d\omega_0) = f^*\omega_0.$$

Aber sicher ist das für "die meisten" Abbildungen f und $\omega_0 \in \Lambda^1 W^*$ nicht = 0.

Was ist da los?

9.4 Potentiale von Differentialformen

- Ein Potential einer Differentialform ω ist eine “Stammfunktion”, genauer eine Differentialform θ mit $\omega = d\theta$.
- Im Gegensatz zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besitzt aber nicht jede Differentialform ein Potential. $d\omega = 0$ ist eine offensichtlich notwendige Bedingung, und Sie finden leicht Formen, die das nicht erfüllen.
- Wir lernen, dass diese Bedingung im allgemeinen nicht hinreichend ist, und finden im Lemma von Poincaré eine hinreichende Zusatzbedingung.
- Das Lemma kann man in der Sprache der *Kohomologietheorie* formulieren, und wir lernen bei der Gelegenheit, was die Kohomologiegruppen einer offenen Mengen $G \subset V$ sind, und was man sich darunter vorstellen soll.

Sei G eine offene Teilmenge eines endlich-dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraums V .

Definition 184. Sei $\omega \in \Omega^k(G)$.

- (i) ω heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$.
- (ii) ω heißt *exakt*, wenn es ein $\theta \in \Omega^{k-1}(G)$ gibt, für das

$$d\theta = \omega.$$

Jedes solche θ heißt ein *Potential* für ω .

Beispiel 185. Im Fall $\omega \in \Omega^1(G)$ ist ein Potential also eine Funktion θ mit $d\theta = \omega$. Für $V = \mathbb{R}^n$ und $\omega = \sum_{i=1}^n \phi_i dx_i$ bedeutet das

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \phi_i.$$

In der Physik bezeichnet man üblicherweise $-\theta$ und nicht θ als das Potential von ϕ .

Eine 0-Form $\omega \in \Omega^0(G)$, d.h. eine Funktion $\omega \in C^\infty(G, \mathbb{R})$, kann zwar geschlossen sein (was bedeutet das?), sie kann aber nicht exakt sein, weil $\Omega^{-1}(G)$ nicht definiert ist.

□

Satz 186. *Notwendig für die Existenz eines Potentials zu $\omega \in \Omega^k(G)$ ist $d\omega = 0$. Nur geschlossene Formen können ein Potential besitzen.*

Müssen sie aber nicht. Wir zeigen gleich, dass die Geschlossenheit im allgemeinen nicht hinreichend ist. Zuvor betrachten wir noch kurz die Frage der **Eindeutigkeit** von Potentialen.

Wenn $\theta \in \Omega^{k-1}(G)$ ein Potential von $\omega \in \Omega^k(G)$ und $\theta_0 \in \Omega^{k-1}(G)$ ist, dann ist $\theta + \theta_0$ genau dann ebenfalls ein Potential von ω , wenn $d\theta_0 = 0$. Das ist sicher der Fall, wenn θ_0 selber ein Potential $\eta \in \Omega^{k-2}(G)$ besitzt, aber weil die Exaktheit von θ_0 im allgemeinen nicht notwendig für die Geschlossenheit ist, gibt es vielleicht noch mehr Potentiale zu ω .

Beispiel 187 (Wichtig: Sphärenvolumenform). Mit $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\sum x_i^2}$ definieren wir das Vektorfeld $X : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$X(x) = \frac{x}{r^n}$$

und betrachten die zugehörige Flussform $*\omega^X$. Diese Form, also

$$*\omega^X = \det\left(\frac{x}{\|x\|^n}, \dots\right) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

nennen wir aus später erläuterten Gründen *die Sphärenvolumenform* des \mathbb{R}^n .

Für sie gilt nach den Beispielen 177 und 182

$$d*\omega^X = \operatorname{div} X \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = 0,$$

weil

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^n \partial_i \frac{x_i}{r^n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r^n} - x_i \frac{nx_i}{r^{n+2}} \right) = \frac{n}{r^n} - \frac{n \sum_i x_i^2}{r^{n+2}} = 0.$$

Also ist $*\omega^X$ geschlossen.

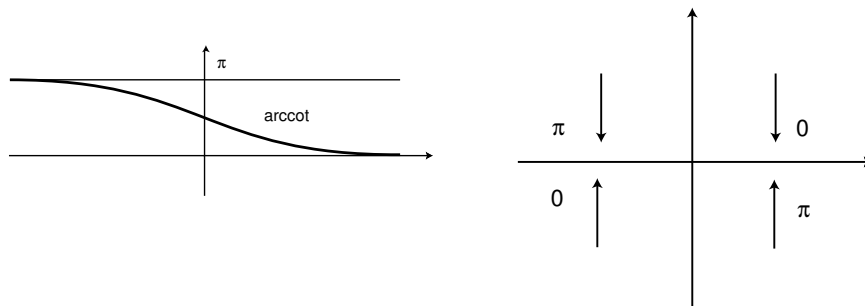
Für $n = 2$ ist

$$*\omega^X = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx.$$

Gibt es dazu ein Potential, also eine Funktion $\theta : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} ?$$

Offenbar hat $\operatorname{arccot} \frac{x}{y}$ die richtigen partiellen Ableitungen, ist aber nur auf dem Komplement der x -Achse definiert und nicht auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Das Grenzwertverhalten bei Annäherung an die Achse ist hier dargestellt:

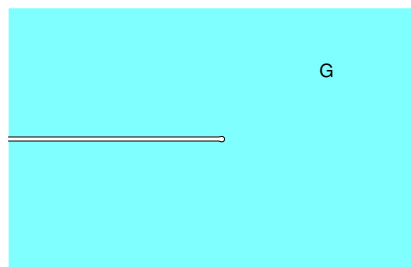


Die Winkelfunktion

$$\phi(x, y) := \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{x}{y} & \text{für } y > 0, \\ 0 & \text{für } x > 0 \text{ und } y = 0, \\ -\pi + \operatorname{arccot} \frac{x}{y} & \text{für } y < 0, \end{cases}$$

ist dann ein C^∞ -Funktion (Beweis?) auf dem „Schlitzgebiet“

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ oder } y \neq 0\},$$



also auf der Ebene ohne die nicht-positive x -Achse. Dort hat sie einen Sprung der Größe 2π . Gäbe es ein Potential θ für $*\omega^X$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so wäre auf dem Schlitzgebiet $d(\theta - \phi) = 0$, die Differenz also konstant. Dann wäre aber auch θ auf der negativen x -Achse unstetig. Widerspruch!

Daher besitzt die geschlossene 1-Form $*\omega^X$ kein Potential auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wir werden später sehen, dass die Spärendvolumenform auch in höheren Dimensionen *kein* Potential besitzt.

Physikalisch läßt sich $*\omega^X$ für $n = 2$ interpretieren als zweidimensionaler Schnitt durch das Magnetfeld eines geraden Leiters oder für $n = 3$ als das elektrisches Feld einer Punktladung. Formen mit $d\omega = 0$, die *kein* Potential besitzen, sind also *nicht* besonders exotisch.

□

Wir wollen nun zeigen:

Satz 188 (Poincarésches Lemma). Für $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist jede auf dem ganzen \mathbb{R}^n definierte geschlossene k -Form $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ exakt.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n .

Für $n = 1$ verschwindet jede k -Form mit $k > 1$, hat also $0 \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R})$ als Potential. Jede 1-Form ist von der Gestalt $\omega = \phi dx$ mit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und jede Stammfunktion von ϕ ist ein Potential von ω .

Der Induktionsschritt ergibt sich aus dem folgenden

Lemma 189. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren

$$\begin{aligned} \pi : G \times \mathbb{R} &\rightarrow G, (x, t) \mapsto x, \\ s : G &\rightarrow G \times \mathbb{R}, x \mapsto (x, 0). \end{aligned}$$

Dann gibt es eine Familie linearer Abbildung

$$(K_k : \Omega^k(G \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{k-1}(G \times \mathbb{R}))_{k \geq 1},$$

so dass für alle $k \geq 1$ und $\omega \in \Omega^k(G \times \mathbb{R})$

$$\omega - \pi^* s^* \omega = (-1)^{k-1} (dK_k - K_{k+1} d) \omega. \quad (51)$$

(Wir lassen im weiteren den unteren Index bei K weg: Der Grad der eingesetzten Form definiert, um welches k es sich handelt.)

Ist der Satz nun schon bewiesen für den \mathbb{R}^n , so wenden wir das Lemma auf $G = \mathbb{R}^n$ an. Ist $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^{n+1})$ geschlossen, so ist $d(s^* \omega) = s^*(d\omega) = 0$, die Form $s^* \omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ nach Induktionsvoraussetzung also exakt: $s^* \omega = d\theta$. Daher ist

$$\omega = \pi^* s^* \omega + (-1)^{k-1} (dK\omega - \underbrace{K d\omega}_{=0}) = \pi^* d\theta + (-1)^{k-1} dK\omega = d(\pi^* \theta + (-1)^{k-1} K\omega).$$

Also ist ω exakt, und der Satz bewiesen. □

Der schwierige Teil ist der

Beweis des Lemmas 189. Für die Konstruktion der K_k benutzen wir auf $G \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ die Koordinaten x_1, \dots, x_n, t und definieren die lineare Abbildung K_k auf den Basisformen der Typen

$$\phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \tag{52}$$

$$\phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt \tag{53}$$

mit $\phi \in C^\infty(G \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\phi = \phi(x, t)$ wie folgt:

$$K(\phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) := 0,$$

$$K(\phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt) := \left(\int_0^t \phi(x, \tau) d\tau \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

Dafür müssen wir nun (51) nachrechnen.

Formen vom Typ (52).

Wegen $\pi^* s^* dx_i = (s \circ \pi)^* dx_i = d(x_i \circ s \circ \pi) = dx_i$ ergibt sich für $\omega = \phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$

$$\omega - \pi^* s^* \omega = (\phi(x, t) - \phi(x, 0)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Andrerseits ist

$$\begin{aligned} dK\omega - Kd\omega &= 0 - K(d\phi \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \\ &= 0 - K \left((-1)^k \frac{\partial \phi}{\partial t} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dt + \text{Terme ohne } dt \right) \\ &= (-1)^{k-1} (\phi(x, t) - \phi(x, 0)) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Daraus folgt (51).

Formen vom Typ (53).

Wegen $\pi^* s^* dt = \pi^* 0 = 0$ gilt für $\omega = \phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt$

$$\pi^* s^* (\phi dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt) = 0,$$

also

$$\omega - \pi^* s^* \omega = \omega.$$

Andrerseits ist

$$\begin{aligned} dK\omega - Kd\omega &= (-1)^{k-1} \phi(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left(\int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d\tau \right) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \\ &\quad - K \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt \right) \\ &= (-1)^{k-1} \phi(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}} \wedge dt \\ &= (-1)^{k-1} \omega. \end{aligned}$$

Daraus folgt (51). □

Korollar 190. *Ist die offene Teilmenge $G \subset V$ im n -dimensionalen Vektorraum V zum \mathbb{R}^n C^∞ -diffeomorph und ist $k \geq 1$, so ist jedes geschlossene $\omega \in \Omega^k(G)$ exakt.*

Beweis. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow G \subset V$ ein C^∞ -Diffeomorphismus auf G und $d\omega = 0$ so ist $df^*\omega = f^*d\omega = 0$, also nach dem Lemma von Poincaré $f^*\omega = d\theta$ für ein $\theta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist aber

$$d(f^{-1})^*\theta = (f^{-1})^*d\theta = (f^{-1})^*f^*\omega = \omega.$$

□

Beispiel 191. Eine offene Menge im \mathbb{R}^n enthält um jeden ihrer Punkte p einen offenen Würfel $W = \{q \in \mathbb{R}^n \mid |q_i - p_i| < \epsilon\}$, der durch die Abbildung

$$q \mapsto \left(\tan \frac{\pi(q_1 - p_1)}{2\epsilon}, \dots, \tan \frac{\pi(q_n - p_n)}{2\epsilon} \right)$$

C^∞ -diffeomorph auf den \mathbb{R}^n abgebildet wird. Deshalb besitzt jede *geschlossene* k -Form um jeden Punkt ein *lokales Potential*.

□

Beispiel 192. Das Schlitzgebiet

$$G = \{(x, y) \mid x > 0 \text{ oder } y \neq 0\}$$

aus Beispiel 187 ist diffeomorph zum \mathbb{R}^2 . Die Abbildung $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ bildet nämlich die offene rechte Halbebene $x > 0$ diffeomorph auf G ab⁹, jene ist selbst aber diffeomorph zum \mathbb{R}^2 . Also besitzt jede geschlossene 1-Form auf G ein Potential.

□

Bemerkungen.

1. In vielen Analysisbüchern finden Sie das Lemma von Poincaré formuliert und bewiesen für sogenannte *Sterngebiete*, also offene Mengen, in denen man sämtliche Punkte mit einem festen sogenannten *Sternpunkt* verbinden kann. Das sieht, weil der \mathbb{R}^n natürlich ein Sterngebiet ist, auf den ersten Blick allgemeiner aus als unsere Version, ist es aber nicht, weil jedes Sterngebiete im \mathbb{R}^n zum ganzen \mathbb{R}^n diffeomorph ist. Diese Tatsache habe ich in der Literatur nicht gefunden, obwohl sie vermutlich bekannt ist. Einen Beweis von Stefan Born finden Sie im Anhang.
2. Das im Beweis benutzte Lemma 189 liefert mehr Information, als der übliche Beweis für sternförmige Mengen, vgl. Satz 196 unten.

Wenn ein mathematischer Satz notwendige Bedingungen für eine Aussage formuliert (z.B. "Notwendig für die Konvergenz von $\sum a_k$ ist $\lim a_k = 0$ "), so ist die Frage, warum diese Bedingung nicht auch hinreichend ist, oftmals mit einem Gegenbeispiel abgetan. Hier ist das nicht so. Im Gegenteil: Die Beobachtung, dass geschlossene Formen nicht immer exakt sind, bietet den Einstieg in einen der schönsten und reichhaltigsten Bereiche der Mathematik, in dem Analysis, Algebra und Geometrie auf wunderbare Weise ineinandergreifen. Ich möchte Ihnen im Rest dieses Abschnittes und der gesamten Vorlesung davon einen Eindruck vermitteln.

⁹Die Abbildung ist nämlich gegeben durch $r(\cos \phi, \sin \phi) \mapsto r^2(\cos 2\phi, \sin 2\phi)$.

Das Diffeomorphieproblem. Wann sind zwei offene Teilmengen von endlich-dimensionalen Banachräumen diffeomorph?

Ist $f : G \rightarrow H$ eine C^∞ -Abbildung zwischen offenen Mengen, so ist die „Zurückholung“

$$f^* : \Omega^k(H) \rightarrow \Omega^k(G)$$

eine lineare Abbildung von Vektorräumen. Ist f ein Diffeomorphismus, so ist f^* ein Isomorphismus. (Beweis?) Wenn also $\Omega^k(H)$ und $\Omega^k(G)$ als \mathbb{R} -Vektorräume nicht isomorph sind, sind G und H nicht diffeomorph.

Damit hat man ein geometrisches Problem auf eines der linearen Algebra zurückgeführt, indem man jedem G algebraische „Invarianten“, nämlich die Vektorräume $\Omega^k(G)$ zuordnet. Leider sind aber diese Vektorräume unendlich-dimensional, so dass sie für die Isomorphiefrage kaum brauchbare Antworten liefern. Deshalb muß man die hier skizzierte Idee noch etwas verfeinern:

Definition 193. In $\Omega^k(G)$ hat man zwei Vektorunterräume, gebildet von den geschlossenen bzw. exakten Differentialformen:

$$\begin{aligned} Z^k(G) &:= \{ \omega \mid d\omega = 0 \}, \\ B^k(G) &:= \{ d\theta \mid \theta \in \Omega^{k-1}(G) \}, \quad B^0(G) := \{0\}. \end{aligned}$$

Man nennt diese Räume auch die k -Kozykeln bzw. k -Koränder.

Wegen $d^2 = 0$ ist $B^k(G) \subset Z^k(G)$. Der Quotientenvektorraum

$$H^k(G) := Z^k(G)/B^k(G)$$

heißt die k -te De Rham'sche Kohomologiegruppe, wobei sich „Gruppe“ auf die additive Vektorraumstruktur bezieht.

Wegen $f^*d\omega = d(f^*\omega)$ bildet f^* Kozykeln in Kozykeln und Koränder in Koränder ab, induziert also für jedes k eine lineare Abbildung

$$f^* : H^k(H) \rightarrow H^k(G),$$

Beachten Sie:

- Ein Diffeomorphismus f liefert auch einen Isomorphismus der Kohomologiegruppen: Diffeomorphe offene Mengen haben isomorphe Kohomologiegruppen.
- $H^k(G) = 0$ bedeutet, jede geschlossene k -Form auf G besitzt ein Potential.

Die Kohomologiegruppen sind nun oft endlich-dimensionale Vektorräume und die Isomorphiefrage ist dann einfach durch die Dimension zu beantworten. Allerdings muß man sie erst einmal haben!

Hier ist ein triviales

Beispiel 194. Machen Sie sich klar, dass

$$H^0(G) = \mathbb{R}^{\text{Anzahl der Zusammenhangskomponenten von } G}.$$

Offene Mengen mit endlich- aber verschieden vielen Zusammenhangskomponenten sind deshalb nicht diffeomorph. Aber das sieht man auch ohne Kohomologie ...

□

Beispiel 195 (Die Kohomologiegruppen des \mathbb{R}^n). Weil \mathbb{R}^n zusammenhängend ist, ist $H^0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$. Und nach dem Poincareschen Lemma ist

$$H^k(\mathbb{R}^n) = 0 \text{ für alle } k \geq 1.$$

Diese Formel ist *äquivalent* zum Lemma von Poincaré.

□

Das Lemma 189 liefert den

Satz 196. Für jedes offene $G \subset \mathbb{R}^n$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ induziert die Projektion $\pi : G \times \mathbb{R} \rightarrow G$ einen Isomorphismus

$$\pi^* : H^k(G) \rightarrow H^k(G \times \mathbb{R}).$$

Beweis. Surjektivität: Für geschlossenes $\omega \in \Omega^k(G)$ ist $ds^*\omega = s^*d\omega = 0$ und

$$\omega = \pi^*(s^*\omega) + \underbrace{(-1)^{k-1}dK\omega}_{\text{Korand}}.$$

Also wird die Kohomologieklassse von $s^*\omega$ durch π^* auf die von ω abgebildet.

Injektivität: Ist $\omega \in \Omega^k(G)$ geschlossen und $\pi^*\omega$ in $H^k(G \times \mathbb{R})$ trivial, d.h. $\pi^*\omega = d\theta$ exakt, so ist

$$\omega = s^*\pi^*\omega = s^*d\theta = ds^*\theta.$$

Also ist ω ein Korand und repräsentiert $0 \in H^k(G)$.

□

Beispiel 197. Wir haben im Beispiel 187 gezeigt, dass

$$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0.$$

Nach dem Poincaréschen Lemma ist $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$, also sind \mathbb{R}^2 und $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht zueinander diffeomorph.

Man kann beweisen, dass allgemeiner für k verschiedene Punkte $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}) \cong \mathbb{R}^k.$$

Die $(n - 1)$ -te Kohomologie misst also die Anzahl der „0-dimensionalen Löcher“.

Aus Satz 196 folgt durch Induktion für k verschiedene parallele r -dimensionale Ebenen $E_1, \dots, E_k \subset \mathbb{R}^n$, dass

$$H^{n-r-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{E_1, \dots, E_k\}) \cong H^{n-r-1}(\mathbb{R}^{n-r} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}) \cong \mathbb{R}^k.$$

Die $(n - r - 1)$ -te Kohomologie misst also die Anzahl der „ r -dimensionalen Löcher“.

□

Definitionsgemäß ist $H^k(G)$ ein Objekt der **Analysis**. Nun stellt sich heraus, dass es eine Bedeutung für die **Geometrie** besitzt. Und tatsächlich befinden wir uns hier an einer der wichtigsten Schnittstellen zwischen diesen beiden Gebieten der Mathematik. Der Satz von Stokes vertieft die Kenntnis dieser Zusammenhänge noch weiter.

9.5 Integration von Differentialformen über Ketten

- Nach dem Studium der Differentialformen, also der natürlichen “ k -dimensionalen Integranden” wenden wir uns nun den Integrationsbereichen zu. Dafür gibt es zwei Varianten:
- Später werden wir die Integration von k -Formen über k -dimensionale Mannigfaltigkeiten wie zum Beispiel ($k = 2$) die Sphäre definieren.
- Zunächst aber betrachten wir die Integration von k -Formen über k -dimensionale Ketten. Damit kann man zum Beispiel 2-Formen über die Oberfläche eines Würfels integrieren, die wegen ihrer Ecken und Kanten keine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

In diesem Abschnitt seien V, W endlich-dimensionale Banachräume.

Vorbemerkung. Bei der Definition differenzierbarer Funktionen hatten wir stets einen offenen Definitionsbereich vorausgesetzt. Eine Abbildung $f : V \supset A \rightarrow W$ einer beliebigen Teilmenge $A \subset V$ heißt C^∞ -differenzierbar, wenn es eine offene Umgebung U von A in V und eine C^∞ -Abbildung $\tilde{f} : U \rightarrow W$ gibt, für die $\tilde{f}|_A = f$ ist. Im allgemeinen ist die Fortsetzung \tilde{f} natürlich nicht eindeutig bestimmt, aber das Differential

$$p \mapsto D_p f$$

ist eine wohldefinierte C^∞ -Abbildung auf der abgeschlossenen Hülle des Inneren von A .

Im Sinne dieser Bemerkung bedeutet „ $\omega \in \Omega^k(A)$ “ für ein beliebiges $A \in V$, dass es eine offene Umgebung G von A und ein $\tilde{\omega} \in \Omega^k(G)$ gibt, so dass $\omega = \tilde{\omega}|_A$. Für die Definition des Integrals käme man natürlich mit viel weniger Regularität aus: *Stetiges* oder *lebesgue-integrierbares* $\omega : A \rightarrow \Lambda^k V^*$ wäre ausreichend. Wir bleiben trotzdem in der C^∞ -Kategorie.

Definition 198. Seien $A \subset \mathbb{R}^k$ μ_k -meßbar und $\omega \in \Omega^k(A)$. Dann definieren wir:

$$\int_A \omega := \int_A \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k,$$

falls das Integral existiert, falls also $\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \in \mathcal{L}^1(A, \mu_k)$.

Bemerkungen.

1. Beachten Sie, dass $\omega \in \Omega^k(A)$ auf dem $\mathbb{R}^k(!)$ von der Form $\phi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ ist. Damit gilt also

$$\int_A \phi dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_A \phi d\mu_k.$$

2. Es kommen zwei Standardsituationen vor, in denen die Existenz des Integrals klar ist. In dieser Vorlesung werden wir es vor allem mit kompaktem A , nämlich mit kompakten Intervallen A , zu tun haben. Bei der Definition der Integration von Formen über Mannigfaltigkeiten (vgl. Anhang) ist hingegen A offen und der Träger von ω kompakt. In beiden Fällen hat man ein Lebesgueintegral einer stetigen Funktion über eine kompakte Menge.

Lemma 199 (Transformationsformel). Sei $A \subset \mathbb{R}^k$ μ_k -messbar und sei $h : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine C^∞ -Abbildung. Der Rand ∂A sei eine μ_k -Nullmenge und h auf dem Inneren $\overset{\circ}{A}$ injektiv und

$$\det D_x h \geq 0 \text{ für alle } x \in \overset{\circ}{A}.$$

Existiert dann $\int_{h(A)} \omega$, so auch $\int_A h^* \omega$ und es gilt

$$\int_A h^* \omega = \int_{h(A)} \omega.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus dem Transformationsatz:

$$\begin{aligned} \int_A h^* \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k &= \int_A \omega_h(Dh(\mathbf{e}_1), \dots, Dh(\mathbf{e}_k)) d\mu_k = \int_A \det(Dh) \omega_h(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k \\ &= \int_A (\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \circ h) |\det(Dh)| d\mu_k \\ &= \int_{h(A)} \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k. \end{aligned}$$

□

Für Differentialformen ist die Transformationsformel also besonders einfach, weil sie die Determinante schon „eingebaut“ haben.

Definition 200. Seien $G \subset V$ offen,

$$c: \mathbb{R}^k \supset A \rightarrow G$$

eine C^∞ -Abbildung einer μ_k -messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}^k$ und $\omega \in \Omega^k(G)$. Für $k > 0$ definieren wir

$$\int_c \omega := \int_A c^* \omega = \int_A \omega_c(Dc(\mathbf{e}_1), \dots, Dc(\mathbf{e}_k)) d\mu_k = \int_A \omega_c(\partial_1 c, \dots, \partial_k c) d\mu_k, \quad (54)$$

falls die rechte Seite existiert.

Im Fall $k = 0$ ist $\mathbb{R}^k = \{0\}$ und $\omega \in \Omega^0(G)$ eine Funktion auf G . Für $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^0$, also für $A = \{0\}$, definieren wir $\int_c \omega$ als den Funktionswert von ω an der Stelle $c(0)$:

$$\int_c \omega := \omega_{c(0)}. \quad (55)$$

Beispiel 201 (Kurvenintegral). Mit $c: [a, b] \rightarrow G$ und $\omega \in \Omega^1(G)$ ist

$$\int_c \omega = \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt.$$

- Hat ω ein Potential θ , so ist nach der Kettenregel

$$\int_c \omega = \int_a^b d_{c(t)} \theta(\dot{c}(t)) dt = \int_a^b (\theta \circ c)' dt = \theta(c(b)) - \theta(c(a))$$

die Potentialdifferenz zwischen den Endpunkten der Kurve.

- Ist $F: V \supset G \rightarrow V$ ein Vektorfeld und V euklidisch, so definiert man

$$\int_c \langle F, ds \rangle := \int_c \omega^F = \int_a^b \langle F(c(t)), \dot{c}(t) \rangle dt.$$

Integriert wird also die tangentielle Komponente des Feldes F . Interpretiert man F als Kraft, so nennt man dieses Integral auch das *Arbeitsintegral*.

□

Beispiel 202 (Argumentfunktion und Umlaufzahl). Sei

$$\omega = \frac{1}{x^2 + y^2}(x dy - y dx) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$$

die Sphärenvolumenform und sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ eine C^∞ -Kurve. Wir identifizieren \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} und halten schon mal fest, dass

$$\omega_c(\dot{c}) = \frac{1}{|c|^2}(c_x \dot{c}_y - c_y \dot{c}_x) = \frac{1}{|c|^2} \langle \dot{c}, ic \rangle. \quad (56)$$

Sei $\phi_0 \in \mathbb{R}$ eine der bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmten Zahlen mit

$$c(a) = |c(a)|e^{i\phi_0}. \quad (57)$$

Wir definieren eine Funktion $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\phi(t) := \phi_0 + \int_{c|_{[a,t]}} \omega = \phi_0 + \int_a^t \omega_{c(\tau)}(\dot{c}(\tau)) d\tau$$

und berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{|c|} e^{-i\phi} \right) &= \left(\frac{\dot{c}}{|c|} - \frac{\langle c, \dot{c} \rangle c}{|c|^3} \right) e^{-i\phi} + \frac{c}{|c|} (-i\dot{\phi}) e^{-i\phi} \\ &\stackrel{(56)}{=} \frac{e^{-i\phi}}{|c|} \left(\dot{c} - \frac{\langle c, \dot{c} \rangle c}{|c|^2} - ic\omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) \right) \\ &= \frac{e^{-i\phi}}{|c|} \left(\dot{c} - \left\langle \dot{c}, \frac{c}{|c|} \right\rangle \frac{c}{|c|} - \left\langle \dot{c}, \frac{ic}{|ic|} \right\rangle \frac{ic}{|ic|} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist die Funktion konstant, und die Konstante ist nach (57) gleich 1. Also ist

$$c(t) = |c(t)|e^{i\phi(t)} \text{ für alle } t.$$

Jede C^∞ -Kurve in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ besitzt also eine Polarkoordinatendarstellung mit einer Argumentfunktion ϕ die stetig, ja sogar C^∞ ist. Zeigen Sie, dass ϕ durch die Anfangsbedingung (57) eindeutig bestimmt ist.

Ist nun $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ geschlossen, so ist $e^{i\phi(b)} = e^{i\phi(a)}$, also

$$n(c, 0) := \frac{1}{2\pi}(\phi(b) - \phi(a))$$

eine ganze Zahl, die man die *Umlaufzahl von c um 0* nennt.

Ist schließlich $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschlossen und $p \in \mathbb{R}^2 \setminus c[a, b]$, so heißt

$$n(c, p) := n(c - p, 0)$$

die *Umlaufzahl von c um p* .

□

Beispiel 203 (Hyperflächenintegral, Flussintegral). Seien

- $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$,
- $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und
- $c : \mathbb{R}^{n-1} \supset A \rightarrow G$ eine C^∞ -Abbildung.

Man stellt sich vor, dass c eine Hyperfläche im \mathbb{R}^n parametrisiert, und nennt

$$\int_c \langle F, dO \rangle := \int_c * \omega^F = \int_I \det(F \circ c, \partial_1 c, \dots, \partial_{n-1} c) d\mu_{n-1}.$$

das *Flussintegral von F über c* .

□

Beispiel 204 (Sphärenvolumen). Seien $r > 0$, $*\omega^X \in \Omega^2(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ die Sphärenvolumenform und

$$c : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

die Parametrisierung der Sphäre vom Radius r . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_c * \omega^X &= \int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} * \omega_c^X \left(\frac{\partial c}{\partial \theta}, \frac{\partial c}{\partial \phi} \right) d\mu_2 \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \det \left(\frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi \\ r \cos \theta \sin \phi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right) d\phi d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\phi d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

Das ist das Volumen (=die Oberfläche!) der Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 . Allgemein kann man zeigen, dass das Integral $\int_c * \omega^X$ das Volumen der Einheits(hyper)sphäre im \mathbb{R}^n liefert, wenn c eine (Hyper-)Sphäre um 0 im \mathbb{R}^n parametrisiert. Das Volumen der Sphäre vom Radius r ist dann $r^{n-1} \int_c * \omega^X$.

□

Beispiel 205. Wir betrachten die Sphärenvolumenform im $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, also

$$\omega_x := \det \left(\frac{x}{\|x\|^n}, \dots \right) \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Wir wählen $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\epsilon \in \{0, +1\}$ und wollen ω integrieren über folgende Abbildung

$$c : [0, 1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \left(x_1 - \frac{1}{2}, \dots, x_{i-1} - \frac{1}{2}, \epsilon - \frac{1}{2}, x_i - \frac{1}{2}, \dots, x_{n-1} - \frac{1}{2} \right).$$

Dafür ist

$$\partial_j c = \begin{cases} e_j & \text{für } j < i, \\ e_{j+1} & \text{für } j \geq i. \end{cases}$$

und

$$\omega_c(\partial_1 c, \dots, \partial_{n-1} c) = (-1)^{i-1} \det \left(e_1, \dots, \frac{\overset{i}{c}}{\|c\|^n}, \dots, e_n \right) = (-1)^{n-1} \frac{\epsilon - \frac{1}{2}}{\|c\|^n}.$$

Wir verzichten auf die schwierige Integration von $\|c\|^{-n}$ und halten nur fest, dass

$$(-1)^{i-1} \left(\epsilon - \frac{1}{2}\right) \int_c \omega > 0.$$

□

Satz 206 (Parameterinvarianz). Sei $h : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ wie im Lemma 199. Seien $G \subset V$ offen, $\omega \in \Omega^k(G)$ und $c : h(A) \rightarrow G$ eine C^∞ -Abbildung. Dann gilt

$$\int_{c \circ h} \omega = \int_c \omega.$$

Beweis.

$$\int_{c \circ h} \omega = \int_A (c \circ h)^* \omega = \int_A h^* c^* \omega = \int_{h(A)} c^* \omega = \int_c \omega.$$

□

Intermezzo: Volumina

Definition 207 (k -dimensionales Volumen). Seien V ein Euklidischer Vektorraum, $A \subset V$ kompakt und $c : A \rightarrow V$ eine C^∞ -Abbildung. Das *Volumen* von c ist

$$\text{vol}(c) := \int_A \sqrt{\det \langle \partial_i c, \partial_j c \rangle} d\mu_k.$$

Bemerkung. Sie wissen, dass $|\det f|$ für einen Endomorphismus $f : V \rightarrow V$ die Volumenverzerrung durch f beschreibt. Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist aber

$$\begin{aligned} |\det f|^2 &= \det(\langle f(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_k \rangle) \det(\langle \mathbf{e}_k, f(\mathbf{e}_j) \rangle) = \det(\langle \langle f(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_k \rangle \rangle \langle \mathbf{e}_k, f(\mathbf{e}_j) \rangle \rangle) \\ &= \det \left(\sum_k \langle f(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_k \rangle \langle \mathbf{e}_k, f(\mathbf{e}_j) \rangle \right) = \det(\langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j) \rangle). \end{aligned}$$

Weil es für lineare Abbildungen zwischen verschiedenen, insbesondere verschieden-dimensionalen Räumen keine Determinante gibt, benutzt man die *Gramsche Determinante*

$$\det \langle f(\mathbf{e}_i), f(\mathbf{e}_j) \rangle$$

zur Definition von niedriger-dimensionalen Volumina in Räumen größerer Dimension.

Beispiel 208. Für $c : [a, b] \rightarrow V$ ist

$$\text{vol}(c) = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle} dt$$

die Länge der Kurve c .

□

Ende des Intermezzos

Notation. Von nun an bezeichnen wir mit I das Einheitsintervall:

$$I = [0, 1].$$

Wir setzen $I^0 := \{0\} = \mathbb{R}^0$. und betrachten für $k \geq 1$ den k -dimensionalen Einheitswürfel $I^k \subset \mathbb{R}^k$.

Definition 209 (k -Ketten und Integration über k -Ketten). Sei G eine offene Teilmenge des endlich-dimensionalen Banachraumes V und sei $k \in \mathbb{N}$

(i) Wir bezeichnen mit

$$I_k(G) := C^\infty(I^k, G)$$

die Menge der C^∞ -Abbildungen von I^k nach G . Diese Abbildungen bezeichnen wir auch als C^∞ -Intervalle in G . Anschaulich sind das mit I^k parametrisierte k -dimensionale "Flächenstücke" in G .

(ii) Ein $c \in I_k(G)$ ($k > 0$) heißt *degeneriert*, wenn es nur von weniger als k Variablen abhängt, d.h. wenn $\partial_i c = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$.

(iii) Die k -Kettengruppe in $G \subset V$ ist

$$C_k(G) := \{C : I_k(G) \rightarrow \mathbb{Z} \mid C(c) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } c\}.$$

Ihre Elemente heißen k -Ketten in G . Die Addition in \mathbb{Z} macht $C_k(G)$ zu einer abelschen Gruppe.

Man identifiziert $c \in I_k(G)$ mit der k -Kette, die auf c den Wert 1 und auf allen anderen den Wert 0 hat. Dann ist $I_k(G) \subset C_k(G)$ und

$$C = \sum_c C(c)c.$$

k -Ketten sind also „formale Linearkombinationen“ von k -dimensionalen C^∞ -Intervallen mit ganzzahligen Koeffizienten.

(iv) Eine k -Kette $C \in C_k(G)$ heißt *degeneriert*, wenn alle an ihr beteiligten C^∞ -Intervalle degeneriert sind, d.h. wenn gilt

$$\forall c \in I_k(G) (C(c) \neq 0 \implies c \text{ degeneriert}).$$

(v) Für $\omega \in \Omega^k(G)$ und $C \in C_k(G)$ sei

$$\int_C \omega := \sum_{C(c) \neq 0} C(c) \int_c \omega = \sum_{C(c) \neq 0} C(c) \int_{I^k} \omega_c(\partial_1 c, \dots, \partial_k c) d\mu_k. \quad (58)$$

Vergleiche (54). Im Fall $k = 0$ heißt das nach (55)

$$\int_C \omega := \sum_{C(c) \neq 0} C(c) \omega_{c(0)}.$$

ACHTUNG: Sind $c_1, c_2 : I^k \rightarrow G \subset V$ zwei verschiedene Abbildungen, so hat $c_1 + 5c_2$ jetzt *zwei Bedeutungen*, nämlich wie "früher" als wertweise gebildete neue Abbildung mit

$$(c_1 + 5c_2)(x) := c_1(x) + 5c_2(x),$$

die allerdings nicht notwendig mehr in G landet, oder eben als die formale Linearkombination der beiden C^∞ -Intervalle, d.h. als Abbildung von $I_k(V)$ nach \mathbb{Z} , die auf c_1 den Wert 1, auf

c_2 den Wert 5 und auf allen anderen C^∞ -Intervallen c Wert 0 annimmt. Ein Ausweg aus diesem Dilemma wären neue Rechenzeichen für die Kettengruppen, also etwa $c_1 \oplus (5 \otimes c_2)$. Das verwendet man aber nicht und muss deshalb aus dem jeweiligen Zusammenhang ablesen, welche Interpretation gemeint ist.

Konvention. Solange wir mit der genaueren Untersuchung der Kettengruppen beschäftigt sind, interpretieren wir $\sum \alpha_i c_i$ natürlich immer als (“formale”) Linearkombination in C_k . Später gilt diese Interpretation jedenfalls dann, wenn die Kette als Integrationsbereich unter einem Integral steht.

Beispiel 210. Für $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ und $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist

$$\int_{5c} \omega = 5 \int_c \omega$$

das Fünffache des Integrals von ω über den Einheitskreis, und eben nicht das Integral von ω über den Kreis vom Radius 5.

□

Lemma 211. Für festes $\omega \in \Omega^k(G)$ ist

$$\int \omega : C \mapsto \int_C \omega$$

ein Gruppenhomomorphismus von $C_k(G)$ in die additive Gruppe von \mathbb{R} .

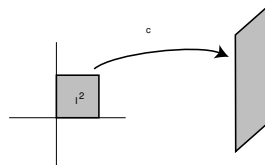
Der Beweis ist trivial.

Beispiel 212 (Zur Anschauung). Der letzte Teil der Ketten-Definition erklärt die vorgehenden: Man möchte über eine Familie aus mehreren k -dimensionalen Intervallen integrieren, wobei die Teilintegrale eventuell mehrfach gezählt werden. $C(c)$ gibt an, mit welcher Vielfachheit das Integral über c gezählt werden soll.

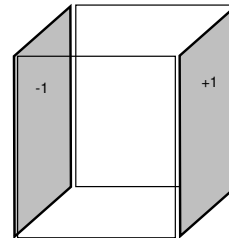
Wenn man den Fluss eines Vektorfeldes F durch das vom C^∞ -Intervall

$$c : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gegebene Rechteck ermitteln will, integriert man $*\omega^F$ über c .



Wenn man den Fluss durch die Oberfläche eines Quaders ermitteln will, werden die gegenüberliegenden Seitenwände bis auf eine Translation durch dasselbe c geliefert, aber die Integrale sind mit verschiedenem Vorzeichen zu versehen, weil der Fluss von links nach rechts einmal positiv, einmal negativ zu zählen ist. Das Vorzeichen kodiert in gewisser Weise die Orientierung der Flächen.



Konkret kann man betrachten:

$$\begin{aligned} c_1 : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & (x, y) &\mapsto (1, x, y), \\ c_0 : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & (x, y) &\mapsto (0, x, y). \end{aligned}$$

Dann ist $c_1 - c_0$ eine formale Linearkombination und

$$\int_{c_1 - c_0} = \int_{c_1} - \int_{c_0}.$$

$c_1 - c_0$ meint nicht die wertweise gebildete Differenz der Abbildungen, also nicht etwa

$$(x, y) \mapsto (1, 0, 0).$$

Vergleiche dazu die obige Konvention.

□

9.6 Der Satz von Stokes

- Wir lernen nun die “Ketten-Version” des Satzes von Stokes kennen.
- Dazu brauchen wir aber noch den Randoperator für Ketten, der zum Beispiel der 3-Kette im \mathbb{R}^3 , die aus einem einzigen singulären Intervall, nämlich der Inklusion $[0, 1]^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ des Einheitswürfels in den \mathbb{R}^3 besteht, die 2-Kette zuordnet, die von den 6 Seitenflächen des Würfels gebildet wird.

Sei G offen im n -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V und weiterhin $I = [0, 1]$.

Definition 213 (Randoperator).

- (i) Definiere für $i \in \{1, \dots, k\}$ die i -te untere und obere Seite

$$s_i, s^i : I^{k-1} \rightarrow I^k$$

von I^k durch

$$\begin{aligned} s_i(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{k-1}), \\ s^i(x_1, \dots, x_{k-1}) &= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Bei s_k bzw. s^k steht also einfach am Schluss eine 0 oder 1.

- (ii) Der *Randoperator*

$$\partial : C_k(G) \rightarrow C_{k-1}(G)$$

ist der eindeutig bestimmte Gruppenhomomorphismus mit

$$\partial c := \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (c \circ s^i - c \circ s_i) \quad (59)$$

für jedes $c \in I_k(G)$.

Der Randoperator leistet also gerade das im Beispiel 212 erklärte Ziel, entgegengesetzte Seiten eines C^∞ -Intervalls für die Integration mit entgegengesetztem Vorzeichen zu versehen.

Beispiel 214. Seien $c_B \in I_3(\mathbb{R}^3)$, $c_S \in I_2(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} c_B(r, s, t) &:= (r \sin \pi s \cos 2\pi t, r \sin \pi s \sin 2\pi t, r \cos \pi s) \\ c_S(x, y) &:= c_B(1, x, y). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\partial c_B = c_S - \kappa_{(0,0,0)} - \{(x, y) \mapsto (0, 0, -x)\} + \{(x, y) \mapsto (0, 0, +x)\},$$

wo κ_a die konstante Abbildung mit Wert a ist. Beachte, dass in dieser Summe die letzten drei C^∞ -Intervalle degeneriert sind, vgl. Definition 209 (ii).

Beweis.

$$\begin{aligned} \partial c_B &= c_B(1, x, y) - c_B(0, x, y) - c_B(x, 1, y) + c_B(x, 0, y) + c_B(x, y, 1) - c_B(x, y, 0) \\ &= c_S(x, y) - \kappa_{(0,0,0)} - (0, 0, -x) + (0, 0, x) + (x \sin \pi y, 0, x \cos \pi y) - (x \sin \pi y, 0, x \cos \pi y). \end{aligned}$$

Beachte, dass die beiden letzten Terme dieselbe Abbildung mit verschiedenem Vorzeichen liefern, sie heben sich weg. Aber es gilt *nicht*, dass $-(0, 0, -x) + (0, 0, x) = (0, 0, 2x)$.

□

Bemerkung. In diesem Beispiel deutet sich an, dass das „Kettenkonzept“ nicht besonders gut geeignet ist, um Integrationen über Bereiche wie die Sphäre damit zu behandeln. Dazu braucht man einen geometrischeren Zugang, der durch die Integration von Differentialformen über Mannigfaltigkeiten geliefert wird. Wir gehen darauf im Kapitel 10.4 ein.

Beispiel 215. Wir berechnen spaßeshalber

$$\begin{aligned}
\partial^2 c_B(x) &= \partial c_S(x) \\
&\quad + \kappa_{(0,0,0)} - \kappa_{(0,0,0)} - \kappa_{(0,0,0)} + \kappa_{(0,0,0)} \\
&\quad - (0, 0, -1) + (0, 0, 0) + (0, 0, -x) - (0, 0, -x) \\
&\quad + (0, 0, +1) - (0, 0, 0) - (0, 0, x) + (0, 0, x) \\
&= \partial c_S(x) - (0, 0, -1) + (0, 0, +1) \\
&= c_S(1, x) - c_S(0, x) - c_S(x, 1) + c_S(x, 0) - (0, 0, -1) + (0, 0, +1) \\
&= (0, 0, -1) - (0, 0, 1) - (\sin \pi x, 0, \cos \pi x) + (\sin \pi x, 0, \cos \pi x) - (0, 0, -1) + (0, 0, +1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Dieses Ergebnis gilt ganz allgemein:

Lemma 216.

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Wir zeigen zunächst:

Lemma 217. Für $i < j$ gilt

$$\begin{aligned}
s_j \circ s^i &= s^i \circ s_{j-1}, & s^j \circ s_i &= s_i \circ s^{j-1}, \\
s_j \circ s_i &= s_i \circ s_{j-1}, & s^j \circ s^i &= s^i \circ s^{j-1}.
\end{aligned}$$

Beweis von Lemma 217.

$$\begin{aligned}
s_j \circ s^i(x_1, \dots, x_{k-2}) &= s_j(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{k-2}) \\
&= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{k-2}) \\
s^i \circ s_{j-1}(x_1, \dots, x_{k-2}) &= s^i(x_1, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{k-2}) \\
&= (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_{j-2}, 0, x_{j-1}, \dots, x_{k-2}).
\end{aligned}$$

Das zeigt die erste Formel. Dabei kommt es nur darauf an, richtig abzuzählen, an welcher Stelle man 0 bzw. 1 einsetzen muss. Daher folgen die andere Formeln genauso. □

Beweis von Lemma 216. Wir müssen das wegen der Homomorphie von ∂ nur für C^∞ -Intervalle $c \in C_k$ zeigen.

$$\begin{aligned}
\partial(\partial c) &= \partial \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} (c \circ s^j - c \circ s_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^k (-1)^{i+j} (c \circ s^j \circ s^i - c \circ s^j \circ s_i - c \circ s_j \circ s^i + c \circ s_j \circ s_i) \quad (60)
\end{aligned}$$

Wir betrachten

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^k (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i &= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i + \sum_{1 \leq j \leq i < k} (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} c \circ s^i \circ s^{j-1} + \sum_{1 \leq j \leq i < k} (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i \\
&\stackrel{j-1=\bar{j}}{=} \sum_{1 \leq i < \bar{j}+1 \leq k} (-1)^{i+\bar{j}+1} c \circ s^i \circ s^{\bar{j}} + \sum_{1 \leq j \leq i < k} (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i \\
&= - \sum_{1 \leq i \leq \bar{j} < k} (-1)^{i+\bar{j}} c \circ s^i \circ s^{\bar{j}} + \sum_{1 \leq j \leq i < k} (-1)^{i+j} c \circ s^j \circ s^i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ebenso verschwinden die drei anderen Terme. \square

Wegen $\partial^2 = 0$ haben die Kettengruppen und Randoperatoren $\partial : C_k(G) \rightarrow C_{k-1}$ viel Ähnlichkeit mit den Differentialformen und der Cartanschen Ableitung $d : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^{k+1}(G)$. Man kann „Zyklen“ $Z_k(G)$ und „Ränder“ $B_k(G)$ definieren, die hier wirklich anschaulich etwas mit Rändern und mit randlosen, also geschlossenen Ketten zu tun haben.

Die entsprechenden Quotienten $H_k^{\text{Würfel}}(G) = Z_k(G)/B_k(G)$ könnte man (*Würfel-*)*Homologiegruppen* nennen. Sie sind aber keine brauchbaren mathematische Objekte, die (etwa im Beispiel 214) auftretenden degenerierten Ketten erweisen sich als störend.¹⁰ Für eine brauchbare *Homologietheorie* muss man die Kettengruppen modulo der degenerierten Ketten betrachten, vgl. *Fulton, Algebraic Topology, Springer 1995, Chapter 23*.

Satz 218 (Stokes, um 1850). *Seien $G \subset V$ offen, $k \geq 1$, $\omega \in \Omega^{k-1}(G)$ und $C \in C_k(G)$. Dann gilt*

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

Die hier gegebene moderne Version beruht auf dem Differentialformenkalkül, den wir in den vorangehenden Abschnitten erklärt haben und der von Elie Cartan (1869-1951) entwickelt wurde.

Beweis. **1. Schritt.** Wir betrachten folgenden Spezialfall

$$\begin{aligned}
V &= \mathbb{R}^k, \\
c &= \iota : I^k \hookrightarrow \mathbb{R}^k, \\
\omega &= \phi dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k \in \Omega^{k-1}(G),
\end{aligned}$$

wobei G eine offenen Umgebung von I^k ist.

Wir berechnen zunächst

$$d\omega = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k = (-1)^{i-1} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Weil c eine k -Kette im \mathbb{R}^k ist, ist

$$\int_c d\omega = (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\mu_k.$$

¹⁰Aus der Definition des Randoperators ∂ folgt, dass konstante C^∞ -Intervalle immer Zyklen, aber, weil Ränder immer aus einer geraden Anzahl von C^∞ -Intervallen bestehen, niemals Ränder sind. Sie liefern also in der Würfelhomologie immer eine nicht-triviale Homologiekategorie. Geometrisch ist das „unerwünscht“.

Mit dem Satz von Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt daraus

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} \int_0^1 \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i d\mu_{k-1} \\ &= (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} \left(\phi(x_1, \dots, \underset{\downarrow}{1}, \dots, x_k) - \phi(x_1, \dots, \underset{\downarrow}{0}, \dots, x_k) \right) d\mu_{k-1}. \end{aligned} \quad (61)$$

Wir berechnen nun die rechte Seite der Stokes-Formel.

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \omega &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left(\int_{s^j} \omega - \int_{s_j} \omega \right) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left(\int_{I^{k-1}} \omega_{s^j}(\partial_1 s^j, \dots, \partial_{k-1} s^j) d\mu_{k-1} - \int_{I^{k-1}} \omega_{s_j}(\partial_1 s_j, \dots, \partial_{k-1} s_j) d\mu_{k-1} \right) \end{aligned}$$

Wie sehen die Integranden aus? Wir erinnern an

$$\partial_m s^j = \begin{cases} \mathbf{e}_m & \text{für } m < j, \\ \mathbf{e}_{m+1} & \text{für } m \geq j. \end{cases} = \partial_m s_j$$

Die Argumente $\partial_1 s^j, \dots, \partial_{k-1} s^j$ enthalten also genau dann *nicht* \mathbf{e}_i , wenn $j = i$. In allen anderen Fällen ist $\omega(\partial_1 s^j, \dots, \partial_{k-1} s^j) = 0$, weil dann

$$(dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k) (\partial_1 s^j, \dots, \partial_{k-1} s^j) = 0.$$

Für $j = i$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega_{s^i}(\partial_1 s^i, \dots, \partial_{k-1} s^i) &= (\phi \circ s^i) (dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k) (\mathbf{e}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_k) \\ &= \phi(x_1, \dots, \underset{\downarrow}{1}, \dots, x_k) \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für s_j . Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \omega &= (-1)^{i-1} \left(\int_{I^{k-1}} \omega_{s^i}(\partial_1 s^i, \dots, \partial_{k-1} s^i) d\mu_{k-1} - \int_{I^{k-1}} \omega_{s_i}(\partial_1 s_i, \dots, \partial_{k-1} s_i) d\mu_{k-1} \right) \\ &= (-1)^{i-1} \left(\int_{I^{k-1}} \phi(x_1, \dots, \underset{\downarrow}{1}, \dots, x_k) - \phi(x_1, \dots, \underset{\downarrow}{0}, \dots, x_k) \right) d\mu_{k-1} \end{aligned}$$

Damit und mit (61) ist der Satz im Spezialfall bewiesen. Der Kern des Beweises ist der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung zusammen mit dem Fubini. Alles weitere ist Einsetzen in die Definitionen.

2. Schritt. Weil das Integral linear und jedes $\omega \in \Omega^{k-1}(G)$ eine Linearkombination von Formen der obigen Gestalt ist, gilt der Satz damit für beliebiges $\omega \in \Omega^{k-1}(G)$.

3. Schritt. Seien nun $G \subset V$ offen, $c \in I_k(G)$ und $\omega \in \Omega^{k-1}(G)$. Wir bezeichnen mit $\iota: I^k \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ die Inklusion. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= \int_{c \circ \iota} d\omega = \int_{\iota} c^* d\omega = \int_{\iota} dc^* \omega \stackrel{2. \text{ Schritt}}{=} \int_{\partial \iota} c^* \omega \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{s^i} c^* \omega - \int_{s_i} c^* \omega \right) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{c \circ s^i} \omega - \int_{c \circ s_i} \omega \right) = \int_{\partial c} \omega. \end{aligned}$$

Damit gilt der Satz für C^∞ -Intervalle. Weil aber das Integral und der Randoperator Homomorphismen auf der Kettengruppe $C_k(G)$ sind, gilt er dann auch für beliebige Ketten. \square

Beispiel 219 (Der Fall $k = 1$). Für $c : I \rightarrow G \in I_1(G)$ und $\omega = \phi : G \rightarrow \mathbb{R} \in \Omega^0(G)$ ist

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]} d\phi(c') d\mu_1 = \int_0^1 \phi'(x) dx = \phi(c(1)) - \phi(c(0)).$$

Andererseits ist nach (55)

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{c \circ s^1} \omega - \int_{c \circ s_1} \omega = \omega_{c(s^1(0))} - \omega_{c(s_1(0))} = \phi(c(1)) - \phi(c(0)).$$

In diesem Fall ist der Stokes also (bis auf eine Substitution) gerade der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. \square

9.7 Beispiele und Anwendungen

- Mit dem Satz von Stokes eröffnet sich eine schier unübersehbare Fülle von Anwendungen und weiteren Entwicklungen in den verschiedensten Gebieten der Mathematik.
- Eine kleine Auswahl bieten die Beispiele in den nächsten zwei Unterabschnitten.
- Weitere interessante Aspekte schreibe ich in einem Anhang auf, den wir in der Vorlesung nicht mehr schaffen, den ich Ihnen aber als Ferienlektüre wärmstens empfehle.

9.7.1 $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ und der Fixpunktsatz von Brouwer

Damit eine k -Form ω auf einem Gebiet G ein Potential besitzt, muß sie notwendig geschlossen sein. Dann gibt es zumindest lokal ein Potential, nicht immer aber auch global, d.h. auf ganz G . Ob *alle* geschlossenen k -Formen ein globales Potential haben, ob also $H^k(G) = 0$, hängt mit der Topologie von G zusammen. Der Satz von Stokes liefert ein wichtiges notwendiges Kriterium für die Existenz eines globalen Potentials und, wenn dieses nicht erfüllt ist, topologische Informationen über G .

Lemma 220. *Notwendig für die Existenz eines Potentials zu $\omega \in \Omega^k(G)$ ist neben $d\omega = 0$, dass*

$$\int_C \omega = 0$$

für jedes $C \in C_k(G)$ mit degeneriertem Rand ∂C , insbesondere also, falls $\partial C = 0$.

Beweis. Aus $\omega = d\theta$ folgt nach der Definition 209 der Degeneriertheit

$$\int_C \omega = \int_C d\theta = \int_{\partial C} \theta = 0,$$

vergleiche (58). □

Satz 221. *Für $n \geq 1$ gilt*

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \neq 0.$$

Beweis. Die $(n-1)$ -Form $\omega := * \omega \frac{x}{\|x\|^n} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, die *Sphärenvolumenform*, ist nach Beispiel 187 geschlossen. Die Abbildung

$$w : I^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x - \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)$$

verschiebt den Einheitswürfel so, dass sein Zentrum im Nullpunkt liegt. Also ist

$$C := \partial w \in C_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

eine $(n-1)$ -Kette in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, die nach Lemma 216 geschlossen ist.

Mit (59) erhalten wir

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{w \circ s_i} \omega - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{w \circ s_i} \omega.$$

Die Seiten von w sind aber gerade die in Beispiel 205 betrachteten Abbildungen c , und aus jenem Beispiel folgt, dass alle Summanden positiv sind. Die geschlossene Form ω besitzt also kein Potential.

□

Bemerkungen. 1. Ist $C := \partial w$ wie im vorstehenden Beweis, so kann man zeigen, dass die Abbildung

$$\Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto \int_C \omega$$

einen Isomorphismus $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$ induziert.

2. Im obigen Beweis kann man w ersetzen durch ϵw mit beliebigem $\epsilon > 0$. Das zeigt dann, dass auch die Einschränkung der Sphärenvolumenform auf das Komplement von 0 in einer beliebigen offenen Umgebung von 0 kein Potential besitzt.

Als Folgerung von Satz 221 beweisen wir:

Satz 222 (Brouwerscher Fixpunktsatz (1912)). *Jede C^∞ -Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ der Vollkugel $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ hat wenigstens einen Fixpunkt.*

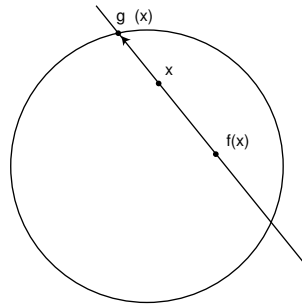
Beweis. Im Fall $n = 1$ ist $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, also $f(-1) - (-1) \geq 0$ und $f(1) - 1 \leq 0$. Daher hat $f(x) - x$ nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle, und f damit einen Fixpunkt.

Für $n \geq 2$ erfolgt der Beweis indirekt. Wir nehmen also an, es gäbe eine fixpunktfreie C^∞ -Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$. Wir definieren dann eine Abbildung $g : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie folgt:

Für jedes $x \in D^n$ schneidet die Gerade $\{x + t(x - f(x)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ durch x und $f(x)$ die Sphäre $S^{n-1} = \{x \mid \|x\| = 1\}$ in genau zwei Punkten, und wir bezeichnen mit

$$g(x) = x + t(x)(x - f(x))$$

den Schnittpunkt, der näher an x als an $f(x)$ liegt.



Löst man die quadratische Gleichung für die Schnittpunkte, so findet man

$$g(x) = x + \left(\sqrt{\left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle^2 + 1 - \|x\|^2} - \left\langle x, \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|} \right\rangle \right) \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}. \quad (62)$$

Überlegen Sie, dass der Radikand stets positiv ist. Nach Definition der Differenzierbarkeit auf nicht-offenen Mengen gibt es eine offene Umgebung U von D^n und eine C^∞ -Fortsetzung von f auf U , die wir ebenfalls mit f bezeichnen wollen. Wir können o. E. annehmen, dass $f(x) \neq x$ auf U und dass der Radikand in (62) auf U positiv ist, so dass $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Wir können ferner annehmen, dass U eine offene Kreisscheibe $U_{1+\epsilon}(0)$ ist, weil die stetige Funktion $x \mapsto \|x\|$ auf der kompakten Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus U \mid \|x\| \leq 2\}$ ein Minimum > 1 annimmt, wenn diese Menge nicht überhaupt leer und daher $U_2(0) \subset U$ ist. Beachten Sie, dass $g(U) \subset S^{n-1}$, also

$$g : U \rightarrow U \setminus \{0\}.$$

Wir definieren

$$j : U \setminus \{0\} \rightarrow U, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

Nach der 2. Bemerkung zum Satz 221 ist die Einschränkung $\omega \in \Omega^{n-1}(U \setminus \{0\})$ der Sphärenvolumenform geschlossen ohne Potential auf $U \setminus \{0\}$. Weil aber

$$dg^*\omega = g^*d\omega = 0,$$

besitzt $g^*\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ nach dem Lemma von Poincaré ein Potential $\theta \in \Omega^{n-2}(U)$. Dafür gilt dann

$$d(j^*\theta) = j^*d\theta = j^*g^*\omega = \underbrace{(g \circ j)^*}_{=j} \omega = j^*\omega. \quad (63)$$

Nun ist aber

$$j^*\omega = \omega. \quad (64)$$

Beachten Sie dazu, dass $d_p j(v) = \frac{v}{\|p\|} + d_p \frac{1}{\|x\|}(v)p$. Daher ist

$$\begin{aligned} j^*\omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \det \left(\frac{j(p)}{\|j(p)\|^n}, d_p j(v_1), \dots, d_p j(v_{n-1}) \right) \\ &= \det \left(\frac{p}{\|p\|}, \frac{v_1}{\|p\|}, \dots, \frac{v_{n-1}}{\|p\|} \right) \\ &= \omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}). \end{aligned}$$

Nach (63) und (64) ist $j^*\theta \in \Omega^{n-2}(U \setminus \{0\})$ also ein Potential von ω . Widerspruch!

Damit war die Annahme, es existiere eine fixpunktfreie C^∞ -Abbildung von D^n in sich, falsch. \square

Ein Ergebnis des Beweises ist: Es gibt keine C^∞ -Abbildung $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$, die auf S^{n-1} die Identität ist, also keine sogenannte *Retraktion* von D^n auf S^{n-1} .

Der originale Satz von Brouwer gilt sogar für *stetige* Abbildungen. Wir beweisen das, weil wir dabei Gelegenheit erhalten, einiges aus der Integrationstheorie zu wiederholen, und weil es eine substantielle Verschärfung des Satzes ist.

Zunächst eine Vorbemerkung über die Integration \mathbb{R}^m -wertiger Funktionen.

Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert man das Integral einfach komponentenweise:

$$\int f d\mu_n = \left(\int f_1 d\mu_n, \dots, \int f_m d\mu_n \right),$$

falls die rechte Seite existiert. Die meisten Rechenregeln übertragen sich unmittelbar. Wir brauchen aber eine nicht so evidente, nämlich

$$\left\| \int f d\mu_n \right\| \leq \int \|f\| d\mu_n \quad (65)$$

für die Standardnorm im \mathbb{R}^n . Zum Beweis sei $g := \int f d\mu_n$. Dann folgt mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\left\| \int f d\mu_n \right\|^2 = \left\langle \int f d\mu_n, g \right\rangle = \int \langle f, g \rangle d\mu_n \leq \int \|f\| \|g\| d\mu_n = \|g\| \int \|f\| d\mu_n$$

und daraus (65).

1. Schritt: Faltung mit C^∞ -Funktionen. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μ_n -integrierbar und beschränkt und hat $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ kompakten Träger, so ist $y \mapsto g(x-y) \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, also ist nach Satz 54 auch die Funktion $y \mapsto f(y)g(x-y)$ für jedes x integrierbar. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ sind stetig und haben kompakten Träger, sind also beschränkt $\leq M_i$, und dasselbe Argument zeigt, dass $y \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}(f(y)g(x-y)) \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Weiter ist $\left\| \frac{\partial}{\partial x_j}(f(y)g(x-y)) \right\| \leq M_i \|f\| \in \mathcal{L}^1(\mu_n)$, und nach Satz 44 ist also die Funktion

$$f * g : x \mapsto \int f(y)g(x-y)dy$$

nach allen x_j partiell differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_j}(x) = \int f(y) \frac{\partial g(x-y)}{\partial x_j} dy.$$

Dabei soll $\int \dots dy$ das bezüglich y genommene μ_n -Integral sein. Durch vollständige Induktion folgt daraus unmittelbar, dass $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

2. Schritt: Glatte Approximation. Ist $f : D^n \rightarrow D^n$ stetig auf der kompakten Einheitskugel $D^n \subset \mathbb{R}^n$, so ist es gleichmäßig stetig. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$ mit

$$\|f(x) - f(y)\| < \epsilon \text{ für alle } x, y \in D^n \text{ mit } \|x - y\| < \delta. \quad (66)$$

Zu δ wählen wir eine C^∞ -Funktion¹¹ $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} g &\geq 0, \\ g(x) = 0 &\iff \|x\| \geq \delta, \\ \int g d\mu_n &= 1. \end{aligned}$$

Wir setzen nun f auf den ganzen \mathbb{R}^n fort, indem wir definieren:

$$f(x) := \begin{cases} f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{für } 1 < \|x\| \leq 2, \\ 0 & \text{für } \|x\| > 2. \end{cases}$$

Dann ist f μ_n -integrierbar und beschränkt und erfüllt (66) sogar für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|, \|y\| \leq 2$. Damit ist $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, und es gilt für alle $x \in D^n$

$$\begin{aligned} \|f * g(x) - f(x)\| &= \left\| \int f(y)g(x-y)dy - \int f(x)g(x-y)dy \right\| \\ &\leq \int \|f(y) - f(x)\| g(x-y)dy. \end{aligned}$$

Für alle $x, y \in D^n$ gilt: Ist $\|x - y\| \geq \delta$, so ist $g(x - y) = 0$, andernfalls ist $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$. Also folgt

$$\|f * g(x) - f(x)\| \leq \int \epsilon g(x-y)dy = \epsilon.$$

Wir haben also zu einer stetigen Funktion jedem $\epsilon > 0$ eine C^∞ -Funktion $f * g =: \tilde{f}$ konstruiert, für die

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \epsilon \text{ für alle } x \in D^n.$$

¹¹ Setzen wir $\tau(x) := \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - \delta^2}\right)$ für $\|x\| < \delta$ und $\tau(x) = 0$ sonst, so leistet $g(x) := \frac{\tau(x)}{\int \tau d\mu_n}$ das Gewünschte.

Aus (65) folgt weiter, dass

$$\|f * g\| \leq \int \|f(y)\|g(x-y)dy \leq \int g(y-x)dy = 1,$$

so dass $\tilde{f}(D^n) \subset D^n$.

3. Schritt. Ist $f : D^n \rightarrow D^n$ stetig, so ist $x \mapsto \|x - f(x)\|$ eine stetige Abbildung auf einer kompakten Menge, nimmt also ihr Minimum $=: 2\epsilon$ an. Hätte f keinen Fixpunkt, so wäre $\epsilon > 0$. Konstruieren wir dann wie oben eine approximierende C^∞ -Abbildung $\tilde{f} : D^n \rightarrow D^n$ mit $\|f - \tilde{f}\| < \epsilon$, so ist für alle $x \in D$

$$\|x - \tilde{f}(x)\| \geq \|x - f(x)\| - \|f(x) - \tilde{f}(x)\| \geq \epsilon > 0.$$

Also hätte auch \tilde{f} keinen Fixpunkt im Widerspruch zur bewiesenen C^∞ -Version des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

Wir halten noch einmal fest:

Satz 223 (Brouwerscher Fixpunktsatz für stetige Abbildungen). *Jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ der Vollkugel $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ hat wenigstens einen Fixpunkt.*

Natürlich gilt das auch, wenn man D^n durch einen dazu homöomorphen metrischen Raum ersetzt.

Korollar 224 (Frobenius). *Jede quadratische Matrix mit nur nicht-negativen Einträgen hat einen nicht-negativen reellen Eigenwert.*

Beweis. Wir erinnern an die l^p -Normen auf dem \mathbb{R}^n :

$$\|x\|_p := \begin{cases} (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} & \text{für } 1 < p < \infty, \\ \max_{i=1, \dots, n} |x_i| & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Wir setzen $D_p^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p \leq 1\}$. D_2^n ist also die "normale" Einheitskugel, und D_∞^n ist ein Würfel der Kantenlänge 2 um 0.

Sei nun A eine $(n \times n)$ -Matrix mit nur nicht-negativen Einträgen und o.E. A regulär, sonst ist 0 ein Eigenwert. Wir betrachten das Simplex $\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1 \text{ und alle } x_i \geq 0\}$ und darauf die Abbildung

$$f : x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|_1}.$$

Nach den Voraussetzungen über A bildet f das Simplex Δ stetig in sich ab. Wir zeigen, dass Δ homöomorph zur $(n-1)$ -dimensionalen Vollkugel ist. Dann hat f nach dem Satz von Brouwer einen Fixpunkt $x \in \Delta$, und der ist ein Eigenvektor:

$$Ax = \|Ax\|_1 x.$$

Die Homöomorphie von Δ zur Kugel beweist man am einfachsten über eine (längere) Kette einfacher Homöomorphien:

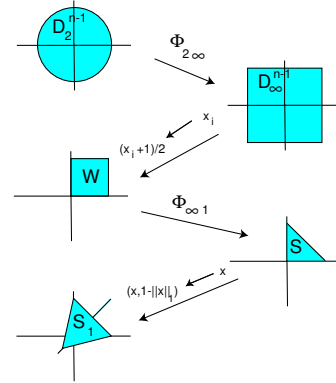
Weil die l^p -Normen stetig (bezüglich der Norm-unabhängigen Topologie des \mathbb{R}^{n-1}) sind, ist für beliebige $1 \leq p, q \leq \infty$ die Abbildung

$$\Phi_{pq} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, x \mapsto \begin{cases} \frac{\|x\|_p}{\|x\|_q} x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

jedenfalls in allen Punkten $x \neq 0$ stetig. Aber weil

$$\|\Phi_{pq}(x)\|_q = \|x\|_p \quad (67)$$

ist, gilt die Stetigkeit auch in 0. Offenbar ist Φ_{pq} auch bijektiv mit $\Phi_{pq}^{-1} = \Phi_{qp}$, und wegen (67) liefert Φ_{pq} einen Homöomorphismus von D_p auf D_q .



Insbesondere ist die Standardvollkugel D_2^{n-1} vermöge $\Phi_{2\infty}$ homöomorph zum Würfel D_∞^{n-1} . Mittels Translation und Homothetie mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ bildet man D_∞^{n-1} homöomorph ab auf den Würfel

$$W := D_\infty^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \text{alle } x_i \geq 0\}.$$

Weiter geht es mit $\Phi_{\infty 1}$ auf das $(n-1)$ -dimensionale Simplex

$$S := D_1^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \text{alle } x_i \geq 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq 1 \text{ und alle } x_i \geq 0 \right\}.$$

Das wird durch die Abbildung

$$\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \left(x_1, \dots, x_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right)$$

homöomorph auf Δ abgebildet, und die Homöomorphie zwischen der $(n-1)$ -dimensionalen Vollkugel und Δ ist gezeigt. \square

9.7.2 Der Cauchysche Integralsatz

Wir bleiben dabei, dass unsere Abbildungen und Funktionen von der Klasse C^∞ sind. Die kanonischen Koordinatenfunktionen des $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit x und y .

Definition 225 (Komplexes Kurvenintegral). Seien

$$\begin{aligned} G &\subset \mathbb{C} \text{ offen,} \\ C &\in C_1(G) \text{ und} \\ f &: G \rightarrow \mathbb{C} \text{ eine } C^\infty\text{-Funktion.} \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit reellen u, v und definieren

$$\int_C f(z) dz := \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy).$$

Für $C = c = c_1 + ic_2 : I \rightarrow G$ ist

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_0^1 c^*(u dx - v dy) + i \dots \\ &= \int_0^1 \{u \circ c(t) dx(\dot{c}(t)) - v \circ c(t) dy(\dot{c}(t))\} dt + i \dots \\ &= \int_0^1 \{u \circ c(t) \dot{c}_1(t) - v \circ c(t) \dot{c}_2(t)\} dt + i \dots \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re} \{(u \circ c(t) + i v \circ c(t))(\dot{c}_1(t) + i \dot{c}_2(t))\} dt + i \dots \\ &= \int_0^1 \operatorname{Re} \{f(c(t))\dot{c}(t)\} dt + i \int_0^1 \operatorname{Im} \{f(c(t))\dot{c}(t)\} dt \\ &= \int_0^1 f(c(t)) \dot{c}(t) dt. \end{aligned}$$

Entsprechend definiert man allgemeiner das Kurvenintegral über Kurven $c : [a, b] \rightarrow G$ mit beliebigem Definitionsbereich $[a, b]$ durch

$$\int_c f(z) dz := \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt.$$

Beispiel 226. Sei $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$. Dann gilt

$$\int_c \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i.$$

Rechnet man dasselbe mit 1-Formen, so findet man

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} - i \underbrace{\frac{y}{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}$$

und

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &= \int_c \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \int_c \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = \int_c d \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \int_c * \omega^X \\ &= i \int_c * \omega^X = i \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

□

Definition 227. $f : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *holomorph* auf G , wenn für alle $z \in G$ das Differential $d_z f = D_z f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ \mathbb{C} -linear ist.

Satz 228. Sei $f = u + iv : \mathbb{C} \supset G \rightarrow \mathbb{C}$ eine C^∞ -Abbildung mit reellen u und v . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist holomorph.

(ii) Es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(iii) In allen $z_0 \in G$ ist f komplex differenzierbar, d.h. es existiert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

In diesem Fall ist $D_{z_0} f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch die Multiplikation mit der komplexen Zahl $f'(z_0)$.

Natürlich ist (iii) ein sehr effektives Kriterium für Holomorphie, weil es aussieht wie im Reellen und daher die Differenzierbarkeitsbeweise aus dem Reellen sich unmittelbar übertragen. So sind Polynome oder Potenzreihen in z holomorph.

Dagegen ist die komplexe Konjugation $f(z) := \bar{z}$ nicht holomorph: Die Abbildung f ist reell linear, also $D_{z_0} f = f : z \mapsto \bar{z}$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. Aber $z \mapsto \bar{z}$ ist eben nicht komplex-linear.

Beweis des Satzes. Vorbemerkung. Eine \mathbb{C} -lineare Abbildung von \mathbb{C} in sich ist von der Form

$$z = x + iy \mapsto (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y),$$

wo $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ in sich ist von der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Vergleich der beiden Formeln zeigt, dass die letztere Abbildung genau dann sogar \mathbb{C} -linear ist, wenn

$$a = \alpha = d, \quad b = -\beta = -c$$

gilt. Die Matrix von Df ist aber gerade die Funktionalmatrix

$$Df \cong \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die reelle Ableitung $D_{z_0} f$ an einer Stelle z_0 aus G ist also genau dann komplex-linear, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.

Nun zum eigentlichen Beweis:

Zu (i) \implies (ii). Klar nach Vorbemerkung.

Zu (ii) \implies (iii). f ist reell-differenzierbar und $D_{z_0} f$ komplex-linear, nämlich Multiplikation mit $m := \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$. Nach Definition der reellen Differenzierbarkeit gilt daher

$$f(z) = f(z_0) + m(z - z_0) + R(z) \quad \text{mit} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{\|z - z_0\|} = 0.$$

Offenbar ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{\|z - z_0\|} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{|z - z_0|} = 0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0.$$

Also folgt

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - m = \frac{R(z)}{z - z_0} \rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow z_0.$$

Das ist aber (iii) mit $f'(z_0) = m$.

Zu (iii) \implies (i). Aus (iii) folgt

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z) \text{ mit } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0.$$

Also ist $D_{z_0}f$ die Multiplikation mit $f'(z_0)$ und \mathbb{C} -linear. □

Satz 229 (Integralsatz von Cauchy). *Ist f holomorph in G und $C \in C_2(G)$, so gilt*

$$\int_{\partial C} f(z) dz = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_{\partial C} f(z) dz &= \int_{\partial C} (u dx - v dy) + i \int_{\partial C} (v dx + u dy) \\ &= \int_C (du \wedge dx - dv \wedge dy) + i \int_C (dv \wedge dx + du \wedge dy) \\ &= - \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy + i \int_C \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Beachten Sie, dass nach unserer Generalvoraussetzung holomorphe Funktionen C^∞ sind. In der Funktionentheorie setzt man für die holomorphen Funktionen nur die *einmalige* komplexe Differenzierbarkeit voraus, nicht einmal die Stetigkeit der Ableitung. Der Cauchysche Integralsatz gilt dann immer noch, der Beweis wird aber schwieriger und lässt sich nicht einfach auf den Stokes zurückführen.

Dieser unscheinbare Satz ist das Herz der komplexen Funktionentheorie mit phantastischen Folgen. Zum Beispiel dieser:

Satz 230 (Integralformel von Cauchy). *Ist f holomorph auf einer offenen Umgebung G des abgeschlossenen Kreises K und ist c der positiv durchlaufene Rand von K , so gilt für alle $z_0 \in K^\circ$*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Die Werte von f auf dem Rand des Kreises bestimmen also alle Funktionswerte im Inneren!

Beweis. Seien R der Radius und a der Mittelpunkt von K . Dann ist also

$$c : I \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto a + Re^{2\pi i t}$$

eine positiv orientierte Parametrisierung des Kreisrandes.

Sei weiter $0 < \epsilon < R - |z_0 - a|$.

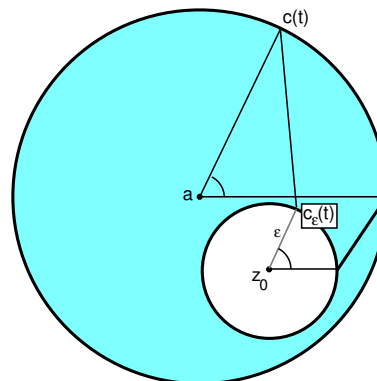
Der abgeschlossene ϵ -Kreis um z_0 liegt also in $\overset{\circ}{K}$.

Wir definieren nun ein zweidimensionales C^∞ -Intervall

$$C_\epsilon \in I_2(G \setminus \{z_0\})$$

durch

$$\begin{aligned} c_\epsilon(t) &:= z_0 + \epsilon e^{2\pi i t} \\ C_\epsilon(s, t) &:= (1-s)c_\epsilon(t) + s c(t). \end{aligned}$$



Überlegen Sie, dass nach Konstruktion z_0 nicht im Bild von C liegt!

Dafür gilt

$$\partial C_\epsilon = \underbrace{(a + R e^{2\pi i t})}_c - \underbrace{(z_0 + \epsilon e^{2\pi i t})}_{=: c_\epsilon}.$$

Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt daher

$$\int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{c_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

weil der Integrand in $G \setminus \{z_0\}$ holomorph ist.

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \int_{c_\epsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_0^1 \frac{f(z_0 + \epsilon e^{2\pi i t})}{\epsilon e^{2\pi i t}} 2\pi i \epsilon e^{2\pi i t} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 f(z_0 + \epsilon e^{2\pi i t}) dt \rightarrow 2\pi i f(z_0) \text{ für } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Aus dem Satz 44 über die Differentiation unter dem Integral (trivial erweitert auf komplexwertige Funktionen) folgt, dass zum Beispiel für stetiges f die Funktion

$$z_0 \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

nach x und y beliebig oft partiell differenzierbar, also C^∞ , ist.

Im Beweis der Cauchyschen Integralformel haben wir neben dem Cauchyschen Integralsatz explizit nur die Stetigkeit von f verwendet. Wenn man den Integralsatz ohne die C^∞ -Voraussetzung bewiesen hat, folgt aus der Cauchyschen Integralformel also, dass Funktionen, die auf einer offenen Menge $G \subset \mathbb{C}$ einmal komplex differenzierbar sind, immer beliebig oft differenzierbar sind. Ja sie besitzen lokal sogar immer eine konvergente Taylorreihe. Darum ist die Theorie komplex differenzierbarer Funktionen, die sogenannte *Funktionentheorie* oder *komplexe Analysis*, sehr anders als die reell differenzierbarer Funktionen.

Als Anwendung beweisen wir noch den

Satz 231 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat mindestens eine Nullstelle. (Mit Polynomdivision folgt daraus sogar die Existenz von n Nullstellen, wenn das Polynom vom Grad n ist.)*

Beweis. Sei $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. (O.E. kann man den höchsten Koeffizienten auf 1 normieren.) Dann gilt

$$|p(z)| = |z|^n \left| 1 + \underbrace{\frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}}_{\rightarrow 0 \text{ für } |z| \rightarrow \infty} \right|.$$

Also gibt es ein $r_0 > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r_0$ gilt

$$|p(z)| \geq \frac{|z|^n}{2}.$$

Nun nehmen wir an, dass p keine Nullstelle hat. Dann ist $f(z) := \frac{1}{p(z)}$ eine holomorphe Funktion auf ganz \mathbb{C} . Aus der Cauchyschen Integralformel angewendet auf den Kreis c_r vom Radius $r > r_0$ folgt

$$\begin{aligned} |f(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r} \frac{f(z)}{z} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(re^{2\pi i t})}{re^{2\pi i t}} 2\pi i r e^{2\pi i t} dt \right| \\ &\stackrel{(65)}{\leq} \int_0^1 |f(re^{2\pi i t})| dt \leq \int_0^1 \frac{2}{r^n} dt = \frac{2}{r^n}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $f(0) = \frac{1}{p(0)} = 0$. Widerspruch!

□

10 Anhang

10.1 Sternförmige Mengen

Bis auf die Vorbemerkungen stammt dieser Abschnitt von Stefan Born.

Das Lemma von Poincaré in der von uns bewiesenen Form besagt, dass in der offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ jede geschlossene Differentialform ein Potential besitzt, **wenn G diffeomorph zum \mathbb{R}^n ist**. In der Literatur finden Sie diese Behauptung oft unter der Voraussetzung bewiesen, dass G **sternförmig** bezüglich eines Punktes $p \in G$ ist, was bedeutet, dass p mit jedem anderen Punkt von G durch eine Strecke in G verbunden ist. “Unser” Beweis, der dem Buch von Bott und Tu folgt, ist geringfügig einfacher zu formulieren als der Beweis für den sternförmigen Fall, liefert gleichzeitig aber die nützliche Information, dass $H^k(G) \cong H^k(G \times \mathbb{R})$. In den praktischen Anwendungen ist die Diffeomorphie zum \mathbb{R}^n genauso leicht zu zeigen, wie die Sternförmigkeit. Es bleibt jedoch die Frage, ob die Version für sternförmige Mengen allgemeiner ist, denn offenbar ist ja der \mathbb{R}^n sternförmig. Die Frage ist, ob umgekehrt jede sternförmige offene Menge des \mathbb{R}^n diffeomorph zum \mathbb{R}^n ist.

Beispiel 232. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich 0. Sei $U_\epsilon(0) \subset G$ und $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monotone C^∞ -Funktion mit

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 1 & \text{für } t \geq \epsilon. \end{cases}$$

Wir bezeichnen für $x \in G \setminus \{0\}$ mit $d(x)$ den “Randabstand” in Richtung von x , also

$$d(x) := \sup \left\{ t \mid t \frac{x}{\|x\|} \in G \right\}$$

und definieren $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch

$$f(x) := \left(1 + \tan \left(\frac{\phi(\|x\|)\|x\|}{d(x)} \frac{\pi}{2} \right) \right) x.$$

Die Funktion ϕ dient vor allem dazu, die Singularität von $d(x)$ in 0 zu entschärfen. Wenn $d(x)$ auf $G \setminus \{0\}$ eine C^∞ -Funktion ist, so ist f ein Diffeomorphismus von G auf den \mathbb{R}^n , und wir haben unser Ziel erreicht. Sie finden aber leicht Beispiele, bei denen die Funktion d nicht einmal stetig ist, und dann schlägt diese Konstruktion fehl.

□

Dennoch ist es richtig, dass jede sternförmige offene Menge des \mathbb{R}^n diffeomorph zum \mathbb{R}^n ist, wie die folgenden Ausführungen von **Stefan Born** zeigen. Ich kenne dafür sonst keinen Beweis in der Literatur.

Definition 233 (Halbstetigkeit). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *von unten halbstetig*, wenn für jedes $x \in X$ und jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $y \in U_\delta$ gilt: $f(y) > f(x) - \epsilon$.

Lemma 234. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine von unten halbstetige, nach unten durch $s > 0$ beschränkte Funktion. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge stetiger, nach unten durch s beschränkter Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen f konvergiert.

Beweis. Definiere $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) := \inf \{ f(p) + nd(x, p) \mid p \in X \}.$$

Aus der Definition folgt unmittelbar $s \leq f_n \leq f$ und $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien nun $x, y \in X$, und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $p \in X$, so dass

$$f_n(x) \geq f(p) + nd(x, p) - \epsilon.$$

Außerdem gilt nach Definition

$$f_n(y) \leq f(p) + nd(y, p).$$

Somit

$$f_n(y) - f_n(x) \leq nd(y, p) - nd(x, p) + \epsilon \leq nd(x, y) + \epsilon.$$

Da das für jedes $\epsilon > 0$ und mit vertauschten Rollen von x und y gilt, folgt

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq nd(x, y).$$

Daher ist f_n Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante n und insbesondere stetig. (Die für normierte Räume gegebene Definition von Lipschitz-Stetigkeit erweitert sich ohne weiteres auf metrische Räume.)

Es bleibt noch die Konvergenz zu zeigen. Sei $x \in X, \epsilon > 0$. Dann gibt es, da f in x von unten halbstetig ist, ein $\delta > 0$, so dass

$$d(x, y) < \delta \implies f(y) \geq f(x) - \epsilon.$$

Wähle n so, dass $n\delta > f(x) - \epsilon$. Sei nun $p \in X$ beliebig. Falls $d(p, x) < \delta$, gilt

$$f(p) + nd(x, p) \geq f(p) > f(x) - \epsilon.$$

Für $d(p, x) \geq \delta$ gilt aber

$$f(p) + nd(x, p) \geq f(p) + n\delta \geq n\delta \geq f(x) - \epsilon.$$

Somit gilt also $f(x) \geq \dots \geq f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq f(x) - \epsilon$, d.h. f_n konvergiert punktweise gegen f . □

Bemerkung: Wir haben jetzt also für jeden metrischen Raum bewiesen, dass eine von unten halbstetige Funktion sich von unten monoton durch Lipschitz-stetige Funktionen f_n approximieren lässt, und zwar so, dass die Lipschitz-Konstante von f_n gerade n ist. Man kann sich das genauer ansehen und sieht, dass für eine Lipschitz-stetige Funktion f mit Lipschitz-Konstante L die Funktionen f_n mit f identisch sind, sobald $n > L$.

Lemma 235. *Sei M eine kompakte (möglicherweise berandete) (Unter-) Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ eine C^∞ -Funktion g mit $\|f(x) - g(x)\|_\infty < \epsilon$ für alle $x \in M$ (d.h. f lässt sich durch glatte Funktionen gleichmäßig approximieren.)*

Beweis. Für jedes $x \in M$ gibt es eine in M offene Umgebung U_x , so dass $|f(y) - f(x)| < \epsilon$ für alle $y \in U_x$. Diese U_x überdecken M , und es gibt eine endliche Teilüberdeckung durch $U_{x_j}, j = 1, \dots, l$. Nach dem Satz über die Zerlegung der Eins gibt es eine subordinierte glatte Zerlegung der Eins $\lambda_i, i = 1, \dots, m$. Die λ_i sind also C^∞ , nichtnegativ, addieren sich zu Eins und $\text{supp}(\lambda_i) \subset U_{x_{j_i}}$. Nun liefert

$$g := \sum_{i=1}^m f(x_{j_i}) \lambda_i$$

das Gewünschte. □

Lemma 236. Sei M eine kompakte (möglicherweise berandete) (Unter-) Mannigfaltigkeit mit der (vom umgebenden Raum geerbten) Metrik d und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine von unten halbstetige, nach unten durch $s > 0$ beschränkte Funktion. Dann gibt es eine nach unten durch $s/2$ beschränkte, punktweise streng monoton wachsende Folge von C^∞ -Funktionen $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen f konvergiert, und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n(n+1)}$.

Beweis. Wir wissen schon, dass es eine monoton wachsende, nach unten durch s beschränkte, gegen f konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ gibt. Wir betrachten nun $g_n := f_n - 1/n$. Wählen wir $N > 4/s$, so können wir für alle $n \geq N$ feststellen $g_n > 3s/4$. Außerdem gilt

$$g_{n+1}(x) - g_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Nun gibt es dem letzten Lemma zufolge für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine C^∞ -Funktion h_n mit

$$\|g_n - h_n\|_\infty < \frac{1}{4n(n+1)}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &\geq g_{n+1}(x) - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} - g_n(x) + \frac{1}{4n(n+1)} \\ &\geq \frac{1}{n(n+1)} - 2 \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle $n \geq N$

$$h_n > \frac{3s}{4} - \frac{1}{4n(n+1)} > \frac{3s}{4} - \frac{1}{n} > \frac{3s}{4} - \frac{s}{4} = \frac{s}{2}.$$

Die Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ benennen wir jetzt um in $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Folge hat alle gewünschten Eigenschaften. \square

Satz 237. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine sternförmige offene Menge. Dann ist C diffeomorph zu \mathbb{R}^n .

Beweis. Der Beweis ist etwas länglich. Wir nehmen o.E. an, dass C sternförmig bezüglich 0 ist. Der Plan des Beweises sieht nun so aus:

1. Zunächst führen einen Vorbereitungsschritt durch, indem wir einen Diffeomorphismus von \mathbb{R}^n auf $U_1(0)$ angeben, der die Sternförmigkeit bezüglich 0 erhält. Wir können also im Weiteren davon ausgehen, dass $C \subset U_1(0)$, und es genügt, die Diffeomorphie von C zu $U_1(0)$ nachzuweisen.

2. Sei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Wir definieren eine „Radiusfunktion“

$$f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \sup \{ \lambda > 0 \mid \lambda x \in C \}.$$

3. Diese Funktion f ist nach unten durch ein $s > 0$ beschränkt und von unten halbstetig. Sie lässt sich also durch eine punktweise streng monoton wachsende Folge von C^∞ -Funktionen $f_n > s/2$ approximieren. Ersetze f_N durch die konstante Funktion $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto s/2$. Das entspricht einer Ausschöpfung von C durch sternförmige offene Mengen

$$C_n := \{tx \mid x \in S^{n-1}, 0 \leq t \leq f_n(x)\}, \quad n \geq N$$

mit glatten Rändern.

4. Das Ziel sieht nun so aus: Bilde durch radiale Verzerrung $U_{1-1/N}(0)$ auf C_N ab und für $n \geq N$ den „Ring“ $U_{1-1/(n+1)} \setminus U_{1-1/n}$ auf $C_{n+1} \setminus C_n$, so dass sich alles zu einem Diffeomorphismus $\Phi : U_1(0) \rightarrow C$ zusammenfügt. Zur Angabe der radialen Verzerrung der Ringe wählen wir streng monotone Funktionen $[1 - 1/n, 1 - 1/(n + 1)] \rightarrow [f_n(x), f_{n+1}(x)]$, $x \in S^{n-1}$, die in einer Umgebung der Randpunkte linear mit Steigung $1/2$ sind. Indem wir diese Funktionen in einer Weise wählen, die C^∞ von den Randpunkten $1 - 1/n$, $1 - 1/(n + 1)$, $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$ abhängt, bekommen wir an den Rändern zusammenpassende C^∞ -Diffeomorphismen der „Ringe“. Mit einer Hilfsfunktion $[0, 1 - 1/N] \rightarrow [0, s/2]$, die bei Null linear mit Steigung 1 und bei $1 - 1/N$ linear mit Steigung $1/2$ ist, bildet man $U_{1-1/N}$ glatt auf C_N ab, so dass die Abbildung am Rand ebenfalls passt.

Jetzt also zur Durchführung dieses Planes:

1. Sei $h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine C^∞ -Funktion, die auf einer Umgebung der Null gleich der Identität ist, deren Ableitung überall größer als Null ist, und die $\lim_{s \rightarrow \infty} h(s) = 1$ erfüllt. (Man bastelt sich leicht eine solche Funktion.) h ist streng monoton und besitzt eine C^∞ -Umkehrfunktion mit $\lim_{s \nearrow 1} h^{-1}(s) = \infty$. Die Abbildungen

$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow U_1(0), \quad x \mapsto x \frac{h(\|x\|)}{\|x\|}$$

und

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow U_1(0), \quad x \mapsto x \frac{h^{-1}(\|x\|)}{\|x\|}$$

sind invers zueinander. Sie sind in einer Umgebung der 0 gleich der Identität. In allen anderen Stellen ist $x \mapsto \|x\|$ eine C^∞ -Funktion. Damit sind Φ und Ψ C^∞ -Diffeomorphismen. Die Abbildungen erhalten, da sie „radial“ sind, die Sternförmigkeit. Wir können also anstelle von C die Menge $\Phi(C)$ betrachten. Sei also im folgenden angenommen, dass $C \subset U_1(0)$.

2. Sei $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Wir definieren eine „Radiusfunktion“

$$f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \sup \{ \lambda > 0 \mid \lambda x \in C \}.$$

Wir stellen fest, dass $f(S^{n-1}) \subset [0, 1]$.

3. Da C offen ist, gibt es ein $s > 0$ so dass $U_s \subset C$, folglich ist $\inf f \geq s$. Weiter wird behauptet, dass f von unten halbstetig ist: Sei $x \in S^{n-1}$ und $\epsilon > 0$, dann gibt es ein $s > f(x) - \epsilon$, so dass $sx \in C$. Da C offen ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(sx) \subset C$. Ist nun $y \in S^{n-1}$ mit $\|x - y\| < \delta/s$, so gilt

$$\|sx - sy\| = s\|x - y\| < \frac{\delta}{s}s = \delta,$$

also $sy \in U_\delta(sx) \subset C$, daher $f(y) > s > f(x) - \epsilon$.

Nun wende ich das Lemma an und erhalte eine Folge glatter Funktionen f_n mit den dort angegebenen Eigenschaften. Wir ersetzen f_N durch die konstante Funktion $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto s/2$. Dann schöpfen die $C_n, n \geq N$ die Menge C durch glatt berandete sternförmige Mengen aus, und es gilt immer noch $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \geq \frac{1}{2n(n+1)}$ für alle $n \geq N$.

4. Um nun den gewünschten Diffeomorphismus angeben zu können, brauchen wir zwei C^∞ -Hilfsfunktionen.

Die eine $g : [0, 1 - 1/N] \rightarrow [0, s/2]$ soll in einer Umgebung der 0 gleich der Identität sein, in einer Umgebung von $1 - 1/N$ gleich $x \mapsto 1/2(x - (1 - 1/N)) + s/2$ sein und eine überall positive Ableitung besitzen. Es ist klar, dass es so eine Funktion gibt.

Die zweite Hilfsfunktion ist mühsamer zu bekommen. Sei

$$M := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a < b, c < d, d - c > (b - a)/2\}.$$

Gesucht ist eine C^∞ Funktion $h : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- (a) $\partial_x h(x, a, b, c, d) > 0$
- (b) $h(\cdot, a, b, c, d)([a, b]) = [c, d]$
- (c) Zu jedem $a < b$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $x < a + \delta$:

$$h(x, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(x - a) + c$$

und für $x > b - \delta$

$$h(x, a, b, c, d) = \frac{1}{2}(x - b) + d.$$

Wir stellen zunächst fest, dass es eine C^∞ -Funktionen $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die monoton fällt, und für die gilt

$$\psi|_{]-\infty, \frac{1}{4}] = 1, \quad \psi|_{[\frac{3}{4}, \infty[} = 0.$$

So eine Funktion kann man leicht angeben. Nun setzen wir

$$h(x, a, b, c, d) = \left(\frac{1}{2}(x - a) + c\right) \psi\left(\frac{x - a}{b - a}\right) + \left(\frac{1}{2}(x - b) + d\right) \left(1 - \psi\left(\frac{x - a}{b - a}\right)\right).$$

Die dritte Eigenschaft ist erfüllt für $\delta = \frac{b-a}{4}$. Außerdem gelten $h(a, a, b, c, d) = c$ und $h(b, a, b, c, d) = d$. Wenn wir die erste Eigenschaft und damit die Monotonie bewiesen haben, folgt die zweite. Wir müssen die erste für $x \in]a, b[$ zeigen:

$$\partial_x h(x, a, b, c, d) = \dots = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}(b - a) - (d - c)\right) \frac{1}{b - a} \psi'\left(\frac{x - a}{b - a}\right).$$

Da $(a, b, c, d) \in M$, ist $1/2(b - a) - (d - c) \leq 0$. Außerdem ist $\psi' \leq 0$, so dass folgt $\partial_x h(x, a, b, c, d) \geq 1/2 > 0$. Jetzt sind wir endlich so weit, Φ definieren zu können.

Setze für $x \in U_{1-1/(n+1)} \setminus U_{1-1/n}$, $n \geq N$

$$\Phi(x) := \frac{x}{\|x\|} h\left(\|x\|, 1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}, f_n(x), f_{n+1}(x)\right)$$

und für $x \in U_{1-1/N}$ setze

$$\Phi(x) := \frac{x}{\|x\|} g(\|x\|).$$

Φ ist gleich der Identität in einer Umgebung der Null, also dort C^∞ und insbesondere differenzierbar mit umkehrbarem Differential. Im Inneren (d.h. im offenen Kern) der „Ringe“ $U_{1-1/(n+1)} \setminus U_{1-1/n}$ ist ΦC^∞ . In Polarkoordinaten (d.h. wenn wir $\Psi^{-1} \circ \Phi \circ \Psi$ betrachten mit der Polarkoordinatenabbildung Ψ) sieht die Jacobimatrix so aus:

$$\begin{pmatrix} \partial_x h & * \\ * & E_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist regulär, da $\partial_x h > 0$. Bleiben noch die problematischen Mengen $\partial U_{1-1/n} =: S_{1-1/n}$. Für jedes $n \geq N$ gibt es eine offene Teilmenge U des \mathbb{R}^n , so dass $S_{1-1/n} \subset U$ und für alle $x \in U$ ist

$$\Phi(x) = \frac{x}{\|x\|} \left(\frac{1}{2} \left(\|x\| - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) + f_n(x) \right),$$

daher ist Φ auch dort C^∞ mit invertierbarer Ableitung (Jacobi-Matrix in Polarkoordinaten wie oben, nur mit $1/2$ als oberem linken Eintrag). Φ ist also überall C^∞ mit invertierbarer Ableitung.

Nach Konstruktion bildet die Abbildung Ursprungsgeraden in sich ab und ist dort injektiv, also ist sie überhaupt injektiv. Φ ist aber auch surjektiv, da

$$\bigcup_{x \in S^{n-1}} [0, f(x)[x = C$$

und $[0, f(x)[\subset \Phi(U_1(0))$.

Daher besitzt Φ eine Umkehrfunktion, die nach dem Umkehrsatz differenzierbar ist. Diese Umkehrfunktion ist sogar C^∞ .

□

10.2 Homotopie und Homologie von Wegen

Definition 238. Sei $G \subset V$ offen.

- (i) Zwei Wege $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow G$ mit gleichem Anfangspunkt $c_0(a) = c_1(a)$ und gleichem Endpunkt $c_0(b) = c_1(b)$ heißen *in G homotop*, wenn es eine Abbildung

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$$

gibt, für die gilt:

- Für alle $t \in [a, b]$ ist

$$H(t, 0) = c_0(t), \quad H(t, 1) = c_1(t).$$

- Für alle $s \in [0, 1]$ ist $c_s := H(\cdot, s)$ ein Weg von $c_0(a)$ nach $c_0(b)$.

Die Abbildung H heißt in diesem Fall eine *Homotopie* zwischen c_0 und c_1 .

Bemerkung. Wir setzen alle Abbildungen c_0, c_1 und H als C^∞ -Abbildungen voraus. Oft finden Sie diese Definition auch für (nur) stetige Abbildungen.

- (ii) Ein geschlossener Weg $c : [a, b] \rightarrow G$ heißt *in G nullhomotop*, wenn es eine C^∞ -Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$ gibt, so dass gilt:

- H deformiert c in einen konstanten Weg:

$$H(\cdot, 0) = c, \quad H(\cdot, 1) \text{ konstant.}$$

- Die Wege $H(\cdot, s) = c_s$ sind alle geschlossen:

$$H(a, s) = H(b, s) \text{ für alle } s \in [0, 1].$$

Bemerkung. Wir bestehen nicht darauf, dass dabei der Punkt $H(a, s) = H(b, s)$ fest bleibt. Allerdings macht es keinen Unterschied, ob man das verlangt oder nicht.

- (iii) Zwei k -Ketten $C_0, C_1 \in C_k(G)$ heißen *in G homolog*, wenn gilt

$$\partial C_1 = \partial C_0 \text{ und} \tag{68}$$

$$\text{es gibt eine } (k+1)\text{-Kette } \underline{H} \in C_{k+1}(G) \text{ mit } \partial H = C_1 - C_0 + C_{deg}, \tag{69}$$

wobei C_{deg} eine degenerierte k -Kette ist, d.h. eine ganzzahlige formale Linearkombination von Intervallen $c : I^k \rightarrow G$, deren Differential nirgends injektiv ist. Beachte, dass das Integral jeder k -Form über eine degenerierte k -Kette verschwindet.

Bemerkung. Man kann diese Definition auch ohne " C_{deg} " machen und erhält dann einen *anderen* Homologiebegriff.

- (iv) Ketten, die homolog zu einem konstanten C^∞ -Intervall sind, heißen *nullhomolog*.

Beispiel 239. Wir betrachten zwei homotope Wege $c_0, c_1 : [a, b] \rightarrow G$ mit gleichem Anfangspunkt $c_0(a) = c_1(a)$ und gleichem Endpunkt $c_0(b) = c_1(b)$. Sei $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow G$ eine Homotopie zwischen ihnen.

Wir betrachten die umparametrisierten Wege

$$\tilde{c}_i(t) := c_i(a + t(b - a)), \quad t \in [0, 1]$$

und

$$\tilde{H}(t, s) = H(a + t(b - a), s), \quad (t, s) \in [0, 1]^2.$$

Dann ist $\tilde{H} \in C_2(G)$ und

$$\partial\tilde{H} = \tilde{H}(\cdot, 1) - \tilde{H}(\cdot, 0) - \tilde{H}(1, \cdot) + \tilde{H}(0, \cdot) = \tilde{c}_1 - \tilde{c}_0 - \kappa_{\tilde{c}_0(b)} + \kappa_{\tilde{c}_0(a)}.$$

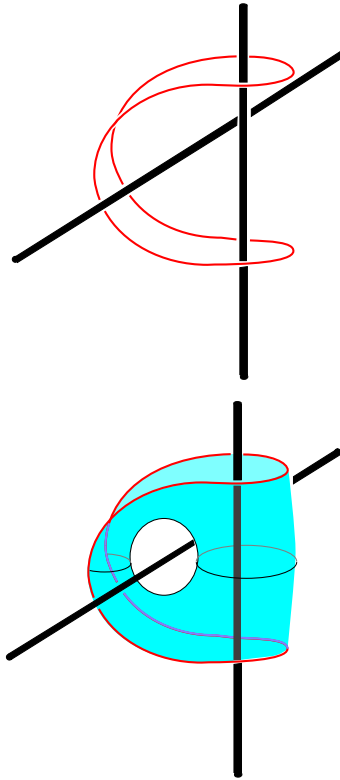
Also sind \tilde{c}_0 und \tilde{c}_1 in G homolog. In leichter Verallgemeinerung der obigen Definition nennen wir zwei Wege c_0 und c_1 auf einem beliebigen Intervall $[a, b]$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten *homolog*, wenn die wie oben umparametrisierten Wege homolog sind. Dann kann man das Ergebnis dieses Beispiels formulieren als:

Homotope Wege sind homolog.

Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. □

Beispiel 240 (Zum Nachdenken). Hier skizziere ich ein Beispiel für einen Weg, der nullhomolog, aber nicht nullhomotop ist.

Im \mathbb{R}^3 betrachten wir das Komplement G von zwei Geraden und darin den skizzierten geschlossenen Weg. Nach etwas Probieren mit einem Gummiband ist man überzeugt, dass sich dieser Weg nicht in G auf einen Punkt zusammenziehen läßt, d.h. dass er nicht nullhomotop ist. Das ist aber schwer zu beweisen.



In diesen Weg kann man nun eine Fläche einspannen, die von dem Weg berandet wird. Allerdings ist diese Fläche keine Kreisscheibe, sondern ein Stück von einer Torusfläche. Es ist dann nicht so schwer, auf dieser Fläche eine 2-Kette zu konstruieren, deren Rand der “gestückelte” vorgegebene Weg ist. Schließlich überlegt man sich, dass der “gestückelte” Weg homolog zum Originalweg ist. □

Beispiel 241 (Homologe Wege und geschlossene Formen). Sind $c_0, c_1 : I \rightarrow G$ in G homologe Wege, so gibt es also ein $C_2(G)$ mit

$$c_1 - c_0 = \partial C - C_{deg}.$$

Weil die degenerierten Wege zum Integral nicht beitragen, gilt also für jede 1-Form ω

$$\int_{c_1} \omega - \int_{c_0} \omega = \int_{\partial C} \omega$$

und für jede *geschlossene* 1-Form ω

$$0 = \int_H d\omega = \int_{c_0} \omega - \int_{c_1} \omega,$$

also

$$\int_{c_0} \omega = \int_{c_1} \omega.$$

Das gilt wegen der Parameterinvarianz der Integrale dann auch für homologe und erst recht für homotope Wege auf einem beliebigen Intervall $[a, b]$.

Das Integral einer geschlossenen 1-Form ist eine *Homologieinvariante* und deshalb erst recht eine *Homotopieinvariante*.

Benutzen Sie das für einen exakten Beweis, dass der Kreis $c(t) := (\cos t, \sin t)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$ sich in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

□

Potentiale von 1-Formen

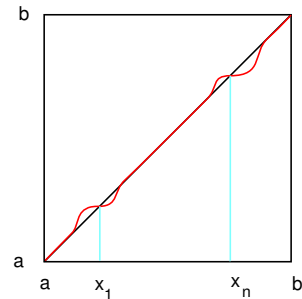
Definition 242. Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend und $\omega \in \Omega^1(G)$. Das Integral von ω heißt *wegunabhängig*, wenn gilt: Für je zwei C^∞ -Wege $c : [a, b] \rightarrow G$ und $\tilde{c} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow G$ mit

$$c(a) = \tilde{c}(\tilde{a}) \text{ und } c(b) = \tilde{c}(\tilde{b})$$

ist

$$\int_c \omega = \int_{\tilde{c}} \omega.$$

Bemerkung. Man kann jeden *stückweise* C^∞ -Weg zu einem C^∞ -Weg umparametrisieren, wobei sich das Integral wegen der Substitutionsregel nicht ändert. Für die Umparametrisierung benutzt man auf dem Intervall $[a, b]$ eine C^∞ -Parametertransformation $\rho : [a, b] \rightarrow [a, b]$, die in der Nähe eines jeden Stückelungspunktes x_i konstant ist. Ein solches ρ findet man mittels Buckelfunktionen, vgl. Analysis I.



Das hat zur Folge, dass Wegunabhängigkeit gegenüber stückweise C^∞ -Kurven gleichbedeutend mit Wegunabhängigkeit gegenüber "echten" C^∞ -Kurven ist.

Satz 243 (Konstruktion von Potentialen). Seien $G \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, nicht-leere wegzusammenhängende Menge und $\omega \in \Omega^1(G)$. Das Integral von ω sei wegunabhängig. Sei p ein fester Punkt in G . Wähle zu jedem x einen stückweise C^∞ -Weg $c : [a, b] \rightarrow G$ von $p = c(a)$ nach $x = c(b)$ und definiere

$$\phi(x) := \int_c \omega.$$

Dann ist ϕ nach Voraussetzung wohldefiniert. Es ist eine C^∞ -Funktion und ein Potential von ω .

Beweis. Sei $x_0 \in G$ und $c : [a, b] \rightarrow G$ ein C^∞ -Weg von p nach x_0 . Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Setze $c(t) := x_0 + (t - b)\mathbf{e}_i$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $c(t) \in G$ für $b \leq t < b + \epsilon$ und

$$\phi(x_0 + (t - b)\mathbf{e}_i) = \int_{c_{[a, b+t]}} \omega = \int_{c_{[a, b]}} \omega + \int_{c_{[b, b+t]}} \omega = \phi(x_0) + \int_b^{b+t} \omega_{x_0 + (\tau - b)\mathbf{e}_i}(\mathbf{e}_i) d\tau.$$

Daher existiert

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x_0) = \omega_{x_0}(\mathbf{e}_i)$$

und ist offenbar stetig. Also ist ϕ differenzierbar mit $d\phi = \omega$. Dann ist ϕ aber sogar C^∞ . \square

Beispiel 244. In der Praxis kann man die Bestimmung eines Potentials durch Integration oft im Kopf durchführen. Die Form

$$\omega = 2xy \, dx + (x^2 + 3z) \, dy + (3y + \cos z) \, dz$$

ist geschlossen auf dem \mathbb{R}^3 (nachrechnen!). Also besitzt sie nach dem Poincaréschen Lemma ein Potential, das man schrittweise so findet:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= x^2 y + \beta(y, z) \\ &= x^2 y + 3yz + \gamma(z) \\ &= x^2 y + 3yz + \sin z. \end{aligned}$$

\square

Korollar 245. Sei $\omega \in \Omega^1(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Das Integral von ω ist wegunabhängig.
- (ii) ω besitzt ein Potential.
- (iii) Für alle $C_1, C_2 \in C_1(G)$ gilt

$$\partial C_1 = \partial C_2 \implies \int_{C_1} \omega = \int_{C_2} \omega.$$

- (iv) Für alle $C \in C_1(G)$ gilt

$$\partial C = 0 \implies \int_C \omega = 0.$$

- (v) Für jede geschlossene Kurve $c : [a, b] \rightarrow G$ gilt

$$\int_c \omega = 0.$$

Für das Integral über geschlossenes c schreibt man suggestiv auch $\oint_c \omega$.

Beweis. Selbst. \square

Definition 246. Eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Jeder geschlossene Weg in G ist in G nullhomotop.
- (ii) Je zwei Wege in G mit gleichen Anfangs- und gleichem Endpunkt sind in G homotop.

Die Implikation (i) \implies (ii) benutzt die C^∞ -Umparametrisierung des geschlossenen Weges, der von zwei Wegen mit gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt gebildet wird.

Korollar 247. Für alle $n \geq 3$ ist $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ einfach zusammenhängend. Daher besitzt jede geschlossene 1-Form ein Potential:

$$H^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0 \text{ für } n \geq 3.$$

Nach Abschnitt 9.4 war hingegen $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$.

Beweis. Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein geschlossener C^∞ -Weg. Der Doppelkegel

$$\{sc(t) \mid s \in \mathbb{R}, t \in [a, b]\}$$

hat eine „Dimension“ $2 < n$ und ist deshalb $\neq \mathbb{R}^n$.

Beweis: Das Differential der Abbildung

$$[a, b] \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (t, s_1, \dots, s_{n-1}) \mapsto s_1 c(t)$$

hat überall $\text{Rang} \leq 2 < n$. Deshalb ist ihr Bild gleich der Menge ihrer kritischen Werte und nach dem Lemma von Sard eine Nullmenge.

Wähle ein $p \in \mathbb{R}^n$, das nicht auf diesem Kegel liegt. Dann definiert

$$H(t, s) := (1 - s)c(t) + sp$$

eine Homotopie in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ von c in die konstante Abbildung vom Wert p . □

10.3 Klassische Integralsätze

10.3.1 Der Hodge-*-Operator

Neben dem äußeren Produkt gibt es eine weitere wichtige algebraische Operation, die wir jetzt beschreiben wollen. Wir betrachten zunächst wieder alternierende k -Formen. Die Operation überträgt sich dann problemlos wertweise auf Differentialformen.

Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum.

Wegen $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ist

$$\Lambda^k V^{**} \cong \Lambda^{n-k} V^{**}.$$

Eine einfache Methode, einen solchen Isomorphismus explizit hinzuschreiben, ist die folgende. Man wähle eine Basis von V und die dazu duale Basis $(\omega_1, \dots, \omega_n)$. Zum Basisvektor

$$\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

von $\Lambda^k V^{**}$ gibt es eindeutig bestimmte $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n$, so dass

$$\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}.$$

Wir definieren dann eine lineare Abbildung $h : \Lambda^k V^{**} \rightarrow \Lambda^{n-k} V^{**}$ durch

$$h(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}) := \pm \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-k}}.$$

Die Vorzeichen können wir beliebig wählen, zum Beispiel stets $+$. Wir wählen aber stattdessen

$$\epsilon_{i_1, \dots, i_k} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1, \dots, k, k+1, \dots, n \\ i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k} \end{pmatrix}$$

Diese Konstruktion hängt von der gewählten Basis von V ab. Andere Basen liefern in der Regel andere Isomorphismen h .

Ist aber $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein *orientierter Euklidischer Vektorraum*, und verwendet man nur *positiv-orientierte ON-Basen*, so hängt h nicht von der Basiswahl ab. Um das zu zeigen, geben wir zunächst eine andere Definition des Isomorphismus. Sei also $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wie angegeben.

Lemma 248 (und Definition). *Es gibt genau ein $\mu \in \Lambda^n V^{**}$ mit*

$$\mu(e_1, \dots, e_n) = 1$$

für jede positiv-orientierte ON-Basis. μ heißt die Volumenform von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Beweis. Ist (e_1, \dots, e_n) eine positiv orientierte ON-Basis, so gibt es, weil $\dim \Lambda^n V^{**} = 1$, genau ein $\mu \in \Lambda^n V^{**}$, welches die Gleichung für *diese* Basis erfüllt. Weil aber

$$\mu(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det(f) \mu(e_1, \dots, e_n)$$

ist, gilt die dann auch für alle andern positiv-orientierten ON-Basen. \square

Definition 249 (Hodgeoperator, *-Operator). Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein n -dimensionaler orientierter Euklidischer Vektorraum mit Volumenform μ . Für $v \in V$ sei $\omega^v := \langle \cdot, v \rangle$. Dann definieren wir für jedes k den Hodgeoperator

$$* : \Lambda^k V^{**} \rightarrow \Lambda^{n-k} V^{**}$$

durch

$$*\omega(v_1, \dots, v_{n-k})\mu := \omega \wedge \omega^{v_1} \wedge \dots \wedge \omega^{v_{n-k}}. \quad (70)$$

Insbesondere ist

$$*1 = \mu, \quad *\mu = 1.$$

Beachten Sie, dass wir für diese Definition zwar die Orientierung und das Skalarprodukt, aber keine Basis benötigt haben.¹²

Den Zusammenhang mit dem oben definierten Isomorphismus h gibt das folgende

Lemma 250. *Seien (e_1, \dots, e_n) eine positiv-orientierte Orthonormalbasis und $\omega_1, \dots, \omega_n$ die duale Basis. Seien $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ und $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-k} \leq n$ mit $\{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\}$. Dann gilt*

$$*(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}) = \epsilon_{i_1 \dots i_k} \omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-k}}.$$

Dabei ist das Vorzeichen $\epsilon_{i_1 \dots i_k} = \pm 1$ gegeben durch¹³

$$\epsilon_{i_1 \dots i_k} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Bis auf das Vorzeichen ist also $*(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})$ gerade das äußere Produkt der komplementären Basisformen.

Beweis. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} *(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})(v_1, \dots, v_{n-k}) &= (\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \wedge \omega^{v_1} \wedge \dots \wedge \omega^{v_{n-k}})(e_1, \dots, e_n) \\ &= \epsilon (\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \wedge \omega^{v_1} \wedge \dots \wedge \omega^{v_{n-k}})(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-k}}) \end{aligned}$$

mit $\epsilon = \epsilon_{i_1 \dots i_k}$. Rechnet man die rechte Seite mit der Determinantenformel (45) aus Satz 157 aus, so erhält man

$$\begin{aligned} &*(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k})(v_1, \dots, v_{n-k}) \\ &= \epsilon \det \begin{pmatrix} \omega_{i_1}(e_{i_1}) & \dots & \omega_{i_1}(e_{i_k}) & \omega_{i_1}(e_{j_1}) & \dots & \omega_{i_1}(e_{j_{n-k}}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{i_k}(e_{i_1}) & \dots & \omega_{i_k}(e_{i_k}) & \omega_{i_k}(e_{j_1}) & \dots & \omega_{i_k}(e_{j_{n-k}}) \\ \omega^{v_1}(e_{i_1}) & \dots & \omega^{v_1}(e_{i_k}) & \omega^{v_1}(e_{j_1}) & \dots & \omega^{v_1}(e_{j_{n-k}}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{v_{n-k}}(e_{i_1}) & \dots & \omega^{v_{n-k}}(e_{i_k}) & \omega^{v_{n-k}}(e_{j_1}) & \dots & \omega^{v_{n-k}}(e_{j_{n-k}}) \end{pmatrix} \\ &= \epsilon \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \omega^{v_1}(e_{i_1}) & \dots & \omega^{v_1}(e_{i_k}) & \omega^{v_1}(e_{j_1}) & \dots & \omega^{v_1}(e_{j_{n-k}}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega^{v_{n-k}}(e_{i_1}) & \dots & \omega^{v_{n-k}}(e_{i_k}) & \omega^{v_{n-k}}(e_{j_1}) & \dots & \omega^{v_{n-k}}(e_{j_{n-k}}) \end{pmatrix} \\ &= \epsilon \det(\omega^{v_\rho}(e_{j_\sigma})) \\ &= \epsilon \det(\langle v_\rho, e_{j_\sigma} \rangle) \\ &= \epsilon \det(\omega_{j_\sigma}(v_\rho)) \\ &= \epsilon_{i_1 \dots i_k} (\omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-k}})(v_1, \dots, v_{n-k}). \end{aligned}$$

¹²Allgemeiner braucht man zur Definition des *-Operators kein positiv-definites Skalarprodukt, es genügt ein nicht-ausgeartetes vom Index ι . Dann steht in der Formel (70) rechts noch ein Faktor $(-1)^\iota$.

¹³Im nicht-positiven Fall ist $\epsilon_{i_1 \dots i_k} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix} < e_{i_1}, e_{i_1} \rangle \dots \langle e_{i_k}, e_{i_k} \rangle$.

□

Wir verzichten auf die explizite Definition des Hodgeoperators für Differentialformen, weil sie so selbstverständlich ist. Wir geben nur eine Version des letzten Lemmas für Differentialformen im \mathbb{R}^n .

Lemma 251. *Im \mathbb{R}^n mit dem kanonischen Skalarprodukt gilt*

$$*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \epsilon_{i_1 \dots i_k} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{n-k}}.$$

Dabei ist das Vorzeichen $\epsilon_{i_1 \dots i_k} = \pm 1$ gegeben durch

$$\epsilon_{i_1 \dots i_k} = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 252. Im \mathbb{R}^3 und $\omega^u = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3$ gilt

$$*\omega^u = u_1 dx_2 \wedge dx_3 - u_2 dx_1 \wedge dx_3 + u_3 dx_1 \wedge dx_2$$

□

In der Physik gibt es wichtige Anwendungen mit nicht positiv-definitem Skalarprodukt. In der Relativitätstheorie und Elektrodynamik stehen Minkowskische Vektorräume im Vordergrund, in der Hamiltonschen Mechanik sind es symplektische Skalarprodukte. Wir schließen mit einem kleinen Beispiel im Minkowskiraum.

Beispiel 253. Im \mathbb{R}^4 mit dem *Minkowski-*(oder *Lorentz-*)*produkt*

$$\langle x, y \rangle_L = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} *dx_1 &= dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4, \\ *dx_4 &= -dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} *(dx_1 \wedge dx_2) &= dx_3 \wedge dx_4, \\ *(dx_3 \wedge dx_4) &= -dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Im Euklidischen \mathbb{R}^4 stehen hier überall $+$ -Zeichen.

□

10.3.2 Klassische Differentialoperatoren und Integralsätze

Seien G offen $\subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^\infty(G, \mathbb{R})$ eine Funktion und $F = (F_1, \dots, F_n) \in C^\infty(G, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld.

Unter den klassischen Differentialoperatoren verstehen wir die folgenden:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f &:= (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) \\ \operatorname{div} F &:= \partial_1 F_1 + \dots + \partial_n F_n \\ \Delta f &:= \operatorname{div} \operatorname{grad} f \\ \operatorname{rot} F &:= (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1), \quad \text{falls } n = 3. \end{aligned}$$

Sie spielen in vielen Anwendungen der Analysis in Physik und Ingenieurwissenschaften eine wichtige Rolle. Wir zeigen in diesem Abschnitt, wie sie sich in das Konzept der Differentialformen einordnen lassen.

Satz 254. *Im Euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:*

(i) $\omega^{\operatorname{grad} f} = df.$

(ii) $\operatorname{div} F = *d * \omega^F.$

(iii) $\Delta f = *d * df.$

(iv) Für $n = 3$ ist $\omega^{\operatorname{rot} F} = *d\omega^F$

Beweis. Die Beweise erfolgen durch Einsetzen der Definitionen. Wir zeigen nur eine Gleichung:

Zu (ii). Es ist

$$\begin{aligned} *d * \omega^F &= *d * \sum_{i=1}^n F_i dx_i \\ &= *d \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= * \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= * \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} (-1)^{i-1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= * \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= * \operatorname{div} F dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \operatorname{div} F. \end{aligned}$$

□

Beispiel 255. Die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum lauten:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E + \dot{B} &= 0 & \operatorname{rot} B - c^{-2} \dot{E} &= \mu_0 J \\ \operatorname{div} B &= 0 & \operatorname{div} E &= \rho \mu_0 c^2. \end{aligned} \quad (71)$$

Das sind Gleichungen für Vektorfelder E, B, J im \mathbb{R}^3 , die überdies aber von der Zeit t abhängen. Der Punkt bezeichnet die Ableitung nach der Zeit. Die Größen c, ρ und μ_0 sind Konstanten.

Wir betrachten nun den $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ mit dem Minkowskiprodukt, vgl. Beispiel 253. Wir fassen die Zeit als vierte Koordinate auf: $t = x_4$, und definieren die elektromagnetische Feldform und die Viererstromform

$$F := c * \omega^B + \omega^E \wedge dx_4, \quad \Gamma := \omega^J - c \rho dx_4,$$

wobei $*\omega^B$ etc. im \mathbb{R}^3 gebildet und in den \mathbb{R}^4 eingebettet werden. Dann schreiben sich die Maxwell'schen Gleichungen mit dem $*$ -Operator von $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$ als

$$dF = 0, \quad *d*F + \mu_0 c \Gamma = 0.$$

Das ist nicht nur einfacher als (71), sondern auch offensichtlich relativistisch invariant: Lineare Abbildungen $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, die das obige Skalarprodukt und die Orientierung erhalten, heißen (eigentliche) Lorentztransformationen. Für sie gilt

$$*(T^*\omega) = T^*(*\omega).$$

Ist also F eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen, so ist auch T^*F eine solche zur transformierten Viererstromform $T^*\Gamma$.

□

Ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein orientierter Vektorraum mit nicht-degeneriertem Skalarprodukt, so kann man unter Verwendung des Isomorphismus $v \mapsto \omega^v$ die klassischen Differentialoperatoren verallgemeinern.

Definition 256 (Nicht-Euklidische Vektorräume). Sind $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein orientierter Vektorraum mit nicht-degeneriertem Skalarprodukt vom Index ι und $G \subset V$ offen, so definieren wir

- (i) den Gradienten $\operatorname{grad} f$ von $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\omega^{\operatorname{grad} f} = df,$$

- (ii) die Divergenz von $F : G \rightarrow V$ durch

$$\operatorname{div} F = (-1)^\iota * d * \omega^F.$$

Weiter definiert man das Kodifferential $\delta : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^{k-1}(G)$ und den Laplaceoperator $\Delta : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^k(G)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta &:= (-1)^{\iota+n(k-1)} * d * : \Omega^k(G) \rightarrow \\ &OO k - 1G. \\ \Delta &:= d\delta + \delta d : \Omega^k(G) \rightarrow \Omega^k(G). \end{aligned}$$

Beispiel 257. Im Minkowskiraum aus Beispiel 255 heißt der Gradient der *Vierergradient*, die Divergenz die *Viererdivergenz* und der Laplaceoperator der *Wellenoperator*. Zum Beispiel ist

$$\square f := \Delta^{\text{Lorentz}} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2}.$$

□

Für die hier eingeführten Differentialoperatoren ergeben sich nun unmittelbar die folgenden klassischen Versionen des Stokesschen Satzes. Vergleichen Sie für die Integraldefinitionen $\int \langle F, ds \rangle$ und $\int \langle F, dO \rangle$ die Beispiele 201, 203.

Satz 258 (Greenscher Satz). Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, $p, q : G \rightarrow \mathbb{R}$ und $C \in C_2(G)$. Dann gilt

$$\int_C \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial C} p dx + q dy.$$

Insbesondere folgt ($q = x$ oder $p = y$) für injektives $c \in I_2(\mathbb{R}^2)$ mit $\det Dc \geq 0$

$$\text{Fläche}(c(I^2)) = \int_c dx \wedge dy = \int_{\partial c} x dy = - \int_{\partial c} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial c} -y dx + x dy.$$

Ein Anwendungsbeispiel für die Flächenformel ist der Satz von Holditch, vgl. Abschnitt 10.4.8

Eine diskrete Variante davon gibt die in der Geodäsie unentbehrliche

Gaußsche Flächenformel. Seien $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$ die Koordinaten der Eckpunkte eines (eingebetteten) n -Ecks. Die Numerierung laufe im mathematisch positiven Sinne. Dann gilt für die Fläche

$$F = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i \Delta_i x, \quad \Delta_i x = x_{i+1} - x_{i-1}.$$

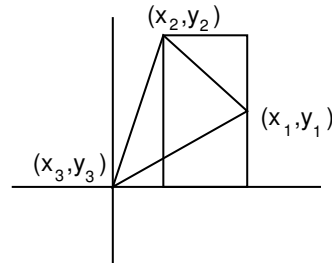
Dabei ist $x_0 = x_n, x_{n+1} = x_1$.

Beim Vergleich mit der Integralformel $F = - \int y dx$ beachte, dass $\Delta_i x = x_{i+1} - x_{i-1} = 2\Delta x_i$. Daher der Faktor $1/2$.

Beweis:

Wir betrachten zunächst ein Dreieck: Dafür ist

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} (y_2 x_2 + (y_1 + y_2)(x_1 - x_2) - y_1 x_1) \\ &= \frac{1}{2} (y_1(x_0 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 y_i \Delta_i x. \end{aligned}$$



Bei Vertauschung von 1 und 2 ergibt sich die negative Fläche. Die Flächenformel ist offenbar invariant unter Translationen, weil $\sum_{i=1}^n \Delta_i x = 0$. Daher folgt die allgemeine Formel aus der Dreiecksformel. □

Satz 259 (Klassischer Satz von Stokes). $G \subset \mathbb{R}^3$ offen, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld und $C \in C_2(G)$ eine 2-Kette (Flächenstück) in G . Dann ist

$$\int_C \langle \operatorname{rot} F, dO \rangle = \int_{\partial C} \langle F, ds \rangle.$$

Satz 260 (Satz von Gauß, Divergenzsatz). $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld und $C \in C_n(G)$ eine n -Kette (Volumen) in G . Dann ist

$$\int_C \operatorname{div} F \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\partial C} \langle F, dO \rangle.$$

10.3.3 Harmonische Funktionen

Dieser Abschnitt erweitert den Abschnitt 9.7.2 über den Cauchyschen Integralsatz.

$u : \mathbb{R}^n \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn $\Delta u = 0$, d.h. wenn $d * du = 0$.

Beispiel 261. Ist $f = u + iv : \mathbb{C} \subset G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so sind u und v harmonisch. □

Beispiel 262. Ist $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, so ist r^{n-2} für $n \geq 3$ harmonisch. □

Satz 263 (Integralsatz für harmonische Funktionen). *Ist $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, so gilt für jedes $C \in C_n(G)$*

$$\int_{\partial C} *du = 0.$$

Für $n = 2$ bedeutet das

$$\int_{\partial C} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = 0.$$

Beweis. Trivial □

Satz 264 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen). *Ist $u : \mathbb{R}^2 \supset G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, und liegt die abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius R um a in G , so gilt*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + Re^{i\phi}) d\phi. \tag{72}$$

Beweis. Für holomorphe Funktionen gilt nach der Cauchyschen Integralformel (Satz 230)

$$f(a) = \int_0^1 f(a + Re^{2\pi it}) dt = \int_{2\pi t=\phi}^{2\pi} f(a + Re^{i\phi} \frac{1}{2\pi}) d\phi.$$

Also gilt die Formel für holomorphe Funktionen. Damit gilt sie auch für den Realteil einer holomorphen Funktion. Wir zeigen nun, dass sich jedes auf G harmonische u lokal so darstellen läßt.

Auf einem offenen Kreis U , der den R -Kreis um a enthält und selbst in G liegt, ist

$$\omega := -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

geschlossen, weil u harmonisch ist. Daher besitzt ω ein Potential $v : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist aber $f := u + iv$ auf U holomorph. □

Satz 265 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen). *Nimmt eine harmonische Funktion auf einer offenen, zusammenhängenden Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ ihr Maximum an, so ist sie konstant.*

Beweis. Sei $a \in G$ ein Punkt, in dem die harmonische Funktion u ihr Maximum annimmt. Nach dem Mittelwertsatz ist $u(a)$ der Mittelwert von u über den Rand jeder abgeschlossenen Kreisscheibe um a , die in G liegt. Weil aber $u(a) \geq u$ bedeutet das, dass $u = u(a)$ auf jedem hinreichend kleinen Kreis um a . Also ist u lokal konstant. Aus dem Zusammenhang von G folgt die globale Konstanz. \square

Wir wollen nun die Mittelwertformel (72) für harmonische Funktionen auf dem Kreis so verallgemeinern, dass sie nicht nur den Wert im Mittelpunkt sondern möglichst in einem beliebigen Punkt liefert: wie die Cauchyformel. Sei z_0 ein innerer Punkt der Kreisscheibe D_R^2 von Radius R um 0. Die gebrochen-lineare Transformation

$$f(z) = R \frac{Rz + z_0}{R + z\bar{z}_0}$$

bildet die Einheitskreisscheibe auf die Kreisscheibe vom Radius R und den Punkt 0 auf z_0 ab.

Ist nun u harmonisch auf D_R^2 , so ist $u(f(z))$ harmonisch auf D_1^2 und nach der Mittelwertformel gilt

$$u(z_0) = u(f(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(f(e^{it})) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(R \frac{Re^{it} + z_0}{R + \bar{z}_0 e^{it}}\right) dt$$

Wir möchten

$$e^{i\phi} = \frac{Re^{it} + z_0}{R + \bar{z}_0 e^{it}}$$

substituieren und berechnen dazu $\frac{dt}{d\phi}$. Wir lösen nach e^{it} auf und erhalten:

$$e^{it} = \frac{Re^{i\phi} - z_0}{R - e^{i\phi} \bar{z}_0}.$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach ϕ :

$$ie^{it} \frac{dt}{d\phi} = \frac{Rie^{i\phi}(R - e^{i\phi} \bar{z}_0) - (Re^{i\phi} - z_0)(-ie^{i\phi} \bar{z}_0)}{(R - e^{i\phi} \bar{z}_0)^2} = \frac{R^2 ie^{i\phi} - ie^{i\phi} z_0 \bar{z}_0}{(R - e^{i\phi} \bar{z}_0)^2}$$

und teilen durch ie^{it} :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\phi} &= \frac{R^2 e^{i\phi} - e^{i\phi} z_0 \bar{z}_0}{(R - e^{i\phi} \bar{z}_0)(Re^{i\phi} - z_0)} = \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{(Re^{-i\phi} - \bar{z}_0)(Re^{i\phi} - z_0)} \\ &= \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{(Re^{i\phi} - z_0)(Re^{i\phi} - z_0)} = \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{|Re^{i\phi} - z_0|^2} \end{aligned}$$

Anwendung der Substitutionsregel liefert nun

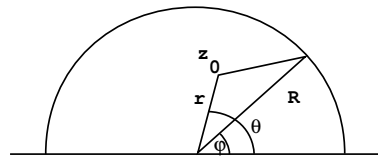
$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - z_0 \bar{z}_0}{|Re^{i\phi} - z_0|^2} d\phi.$$

Schließlich ergibt sich mit $z_0 = re^{i\theta}$ aus dem

Cosinussatz

$$|Re^{i\phi} - z_0|^2 = R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2$$

und damit



Satz 266 (Poissonsche Integralformel). Sei $u(z)$ harmonisch auf der abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius R um 0. Dann gilt für alle r mit $0 \leq r < R$:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi. \quad (73)$$

Für $r = 0$ bekommt man wieder die Mittelwertformel.

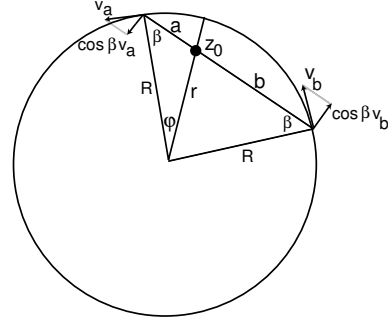
Es gibt für die Poisson-Formel eine sehr anschauliche geometrische Interpretation: Wir betrachten einen inneren Punkt z_0 im Kreis vom Radius R und lassen die Sekante durch diesen Punkt um ihn rotieren. Uns interessiert das Verhältnis der Geschwindigkeit der beiden Schnittpunkte der Sekante mit dem Kreis zueinander.

Nach dem Sekantensatz ist das Produkt ab der Sekantenabschnitte dabei konstant und zwar ist

$$ab = (R + r)(R - r) = R^2 - r^2,$$

wenn r der Abstand von z_0 vom Mittelpunkt ist. Diesen Wert erhält man nämlich, wenn die Sekante durch den Mittelpunkt geht. Das gesuchte Geschwindigkeitsverhältnis ist daher mit den Bezeichnungen der Abbildung

$$\frac{v_b}{v_a} = \frac{\cos \beta v_b}{\cos \beta v_a} = \frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \phi}.$$



Das ist genau der Kern aus der Poisson-Formel. Er beschreibt also die Längenverzerrung, wenn man den Rand des Kreises durch z_0 auf die gegenüberliegende Seite des Kreises projiziert. Randstücke nah bei z_0 werden dabei gestreckt, Stücke fern von z_0 entsprechend gestaucht. Wenn man die Randwertverteilung von u zunächst auf diese Weise durch z_0 projiziert, und dann über den Einheitskreis mittelt, erhält man den Wert $u(z_0)$. Im Bild der Temperaturverteilung für die Kreisscheibe: Randwerte nah bei z_0 haben großen Einfluss auf die Temperatur in z_0 , Randwerte fern von z_0 haben geringen Einfluss.

Ist u harmonisch auf der abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius R , so liefert die Poissonformel also die Werte im Inneren berechnet aus den Randwerten. Aber man kann beweisen, dass man diese Formel auch zur Lösung der Randwertaufgabe benutzen kann:

Satz 267 (Existenzsatz für die 1. Randwertaufgabe). Sei u_0 eine stetige Funktion auf der Kreislinie vom Radius R um 0 . Dann definiert

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi \quad (74)$$

eine auf der abgeschlossenen Kreisscheibe stetige und im Inneren harmonische Funktion u mit $u(Re^{i\phi}) = u_0(Re^{i\phi})$.

Das analoge Verfahren mit der Cauchyschen Integralformel liefert eine analytische Funktion im Inneren, die aber i.a. keine stetige Fortsetzung der auf dem Rand vorgegebenen Funktion ist.

10.4 Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten

10.4.1 Mannigfaltigkeiten

Seien V, W endlich-dimensionale Banachräume.

Definition 268. Sei $A \in V$.

- (i) Eine Abbildung $f : V \supset A \rightarrow W$ heißt eine C^∞ -Abbildung, wenn sie sich zu einer C^∞ -Abbildung auf einer offenen Umgebung von A fortsetzen läßt, d.h. wenn es eine offene Umgebung U von A in V und eine Abbildung $\tilde{f} : V \supset U \rightarrow W$ gibt, für die gilt
- \tilde{f} ist beliebig oft differenzierbar,
 - $\tilde{f}|_A = f$.
- (ii) Eine Abbildung $f : A \rightarrow W$ heißt ein *Diffeomorphismus*, wenn f injektiv ist und sowohl f wie $f^{-1} : f(A) \rightarrow V$ C^∞ -Abbildungen sind.

Beispiel 269. Sei

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

die abgeschlossene Vollkugel im \mathbb{R}^n und sei

$$A := \{x \in D^n \mid x_n < 0\}.$$

Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f(x_1, \dots, x_n) := \left(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)}\right).$$

Dann ist

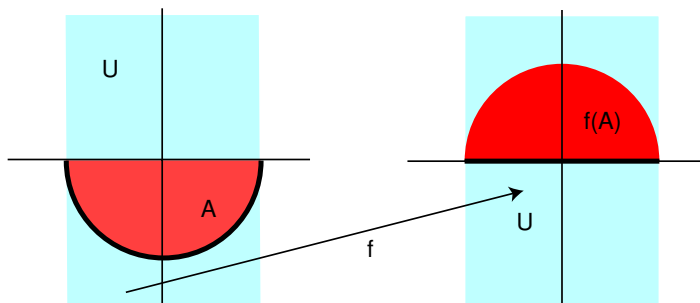
$$A \subset U := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1\},$$

U offen und f setzt sich mit derselben Formel von selbst zu einer C^∞ -Abbildung auf U fort. Überzeugen Sie sich, dass f injektiv ist. Für $(x_1, \dots, x_n) \in A$ gilt

$$-\sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)} \leq x_n < 0,$$

und daher ist

$$f(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_n < \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)}\right\}.$$



Die Umkehrabbildung ist

$$f^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n - \sqrt{1 - (y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2)}\right).$$

Sie erweitert sich ebenfalls “von selbst” zu einer C^∞ -Abbildung auf derselben offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Also ist f ein Diffeomorphismus.

□

Beispiel 270. Weil eine C^∞ -Abbildung $f : A \rightarrow W$ auf einer nicht-offenen Menge A im allgemeinen viele verschiedene Fortsetzungen auf offene Umgebungen besitzt, ist $d_x f : V \rightarrow W$ im allgemeinen nur in inneren Punkten von A eindeutig definiert. Zum Beispiel läßt sich die Nullabbildung auf der x -Achse des \mathbb{R}^2

$$f : \mathbb{R}^2 \supset \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0$$

fortsetzen zu $\tilde{f}(x, y) = 0$ oder zu $\tilde{f}(x, y) = y$ auf ganz \mathbb{R}^2 , und entsprechend sind die Differentiale verschieden.

□

Beispiel 271 (Der Halbraum H^k). Wir werden es im folgenden oft mit Abbildungen des abgeschlossenen oberen Halbraumes

$$f : H^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\} \rightarrow W$$

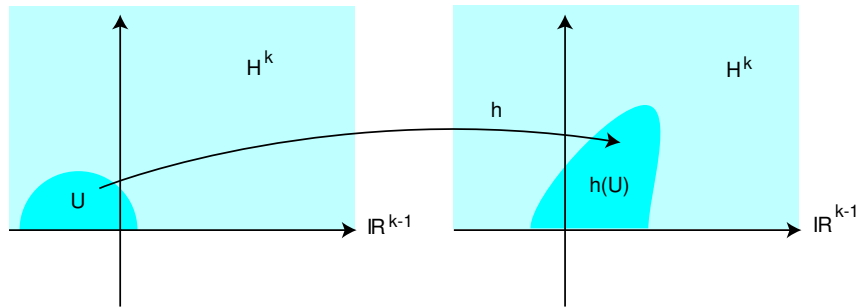
zu tun haben und gehen auf diese Situation hier etwas ausführlicher ein.

Wenn wir von *inneren* ($x_k > 0$) oder von *Randpunkten* ($x_k = 0$) von H^k sprechen, beziehen wir uns auf den umgebenden \mathbb{R}^k , und wir identifizieren den Rand von H^k mit \mathbb{R}^{k-1} .

Ist $f : H^k \supset U \rightarrow W$ eine C^∞ -Funktion auf einer offenen Teilmenge von H^k , so ist im Gegensatz zum letzten Beispiel das Differential $d_x f : \mathbb{R}^k \rightarrow W$ auch in Randpunkten durch f eindeutig bestimmt, weil sich die partiellen Ableitungen allein aus Funktionswerten von f berechnen, egal wie die Fortsetzung aussieht ...

Sei nun $h : H^k \supset U \rightarrow H^k$ ein Diffeomorphismus einer offenen Teilmenge $U \subset H^k$ auf eine offene Teilmenge $h(U)$ von H^k . Nach der Kettenregel angewendet auf $h \circ h^{-1}$ ist das Differential $d_x h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ in allen Punkten invertierbar. Nach dem Umkehrsatz bildet h deshalb innere Punkte von U auf innere Punkte ab. Und weil dasselbe Argument auch für h^{-1} gilt, bildet h Randpunkte in Randpunkte ab:

$$h|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}} : U \cap \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$$



Ist $x \in U \cap \mathbb{R}^{k-1}$ ein Randpunkt, so gilt also

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \in \mathbb{R}^{k-1} \text{ für alle } i \in \{1, \dots, k-1\}$$

und $\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{h(x+t\mathbf{e}_k) - h(x)}{t}$ zeigt in den oberen Halbraum. Es ist also

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \lambda \mathbf{e}_k + v \text{ mit } \lambda > 0 \text{ und } v \in \mathbb{R}^{k-1}$$

und folglich

$$\det\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_k}\right) = \lambda \det\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_{k-1}}, \mathbf{e}_k\right).$$

Hat also $d_x h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ positive Determinante, so gilt dasselbe für die auf den Rand eingeschränkte Abbildung $d_x h|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}} : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$.

□

Wir halten die letzten Ergebnisse noch einmal fest:

Lemma 272. *Ist $h : H^k \supset U \rightarrow H^k$ ein Diffeomorphismus einer offenen Teilmenge $U \subset H^k$ auf eine offene Teilmenge $h(U)$ von H^k , so gilt*

$$h(U \cap \mathbb{R}^{k-1}) \subset \mathbb{R}^{k-1}$$

und $h|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}}$ ist ein Diffeomorphismus einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^{k-1} auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^{k-1} . Ist $\det dh > 0$ positiv auf U , so ist $\det d(h|_{U \cap \mathbb{R}^{k-1}})$ positiv auf $U \cap \mathbb{R}^{k-1}$.

Definition 273 (Berandete Mannigfaltigkeit). (i) Eine Teilmenge $M \subset V$ heißt eine k -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit (oder *Untermannigfaltigkeit*), wenn sie lokal diffeomorph zum abgeschlossenen Halbraum

$$H^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$$

ist, d.h. wenn gilt:

Zu jedem $p \in M$ gibt es eine (in M) offene Umgebung U und einen Diffeomorphismus $u : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ auf eine offene Teilmenge $u(U)$ von H^k .

- (ii) Jedes solche $u : U \rightarrow H^k$ heißt eine *Karte* für M und die Umkehrung $\phi := u^{-1} : H^k \supset u(U) \rightarrow M$ heißt eine *Parametrisierung* für M .
- (iii) Eine Familie von Karten, deren Definitionsbereiche ganz M überdecken, heißt ein *Atlas* für M .
- (iv) Sind $u_1 : U_1 \rightarrow H^k$ und $u_2 : U_2 \rightarrow H^k$ zwei Karten mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, so ist

$$u_2 \circ u_1^{-1} : H^k \supset u_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow u_2(U_1 \cap U_2) \subset H^k$$

ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen von H^k , der auch der *Kartenwechsel* der beiden Karten heißt.

Beispiel 274. Die abgeschlossene Vollkugel D^n ist eine n -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit. Die Abbildung f aus Beispiel 269 liefert eine Karte für jeden Punkt von M mit $x_n < 0$. Analog findet man Karten für die Punkte mit $x_n > 0$ oder $x_i < 0$ bzw. $x_i > 0$ für beliebiges i . Die Abbildung

$$u : \{x \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1\} \rightarrow H^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1 + 1, x_2, \dots, x_n)$$

liefert eine Karte um jeden inneren Punkt von D^n . Ihr Bild liegt im offenen Halbraum $x_n > 0$.

□

Lemma 275 (und Definition: Randpunkte). *Seien M eine k -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit und*

$$u : U \rightarrow u(U), \quad \hat{u} : \hat{U} \rightarrow \hat{u}(U)$$

zwei Karten und $p \in U \cap \hat{U}$. Liegt dann $u(p)$ auf dem Rand von H^k , d.h. ist $u_k(p) = 0$, so ist auch $\hat{u}_k(p) = 0$. Punkte p , die von einer und dann also von jeder Karte in den Rand von H^k abgebildet werden, heißen *Randpunkte der Mannigfaltigkeit M* .

Die Menge der Randpunkte von M , der Rand von M , wird mit ∂M bezeichnet. Sie ist leer oder eine $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit leerem Rand.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Lemma 272. □

Bemerkungen.

1. Die Definition des Randes kollidiert ein wenig mit der topologischen Begriffsbildung: Eine abgeschlossene Kreisscheibe $B \subset \mathbb{R}^3$ im dreidimensionalen Raum ist eine 2-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit. Als Teilmenge des metrischen Raumes \mathbb{R}^3 sind *alle* ihre Punkte Randpunkte, im differentialgeometrischen Sinne aber nur die Punkte auf der Kreislinie.
2. Für berandete Mannigfaltigkeit M mit leerem Rand $\partial M = \emptyset$ wie etwa die offene Vollkugel klingt der Begriff "berandete Mannigfaltigkeit" unsinnig. Wir bezeichnen deshalb mit "Mannigfaltigkeit" in Zukunft sowohl "echt" berandete Mannigfaltigkeiten, wie unberandete Mannigfaltigkeiten ($\partial M = \emptyset$).
3. In der Analysis II hatten wir eine Teilmenge $M \subset V$ eines n -dimensionalen Banachraumes eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit genannt, wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung \tilde{U} von p in V und einen Diffeomorphismus $\phi : V \supset \tilde{U} \rightarrow \phi(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^n$ auf eine offene Menge $\phi(\tilde{U})$ des \mathbb{R}^n gab, so dass mit der üblichen Identifikation $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ galt

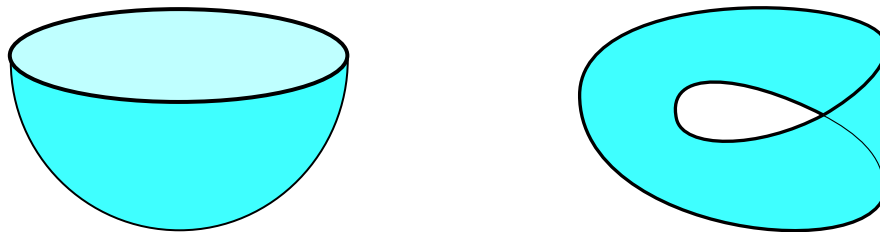
$$\phi(M \cap \tilde{U}) = \mathbb{R}^k \cap \phi(\tilde{U}).$$

Nach Verkleinerung von \tilde{U} können wir annehmen, dass $\mathbb{R}^k \cap \phi(\tilde{U})$ beschränkt ist. Wir setzen $U := M \cap \tilde{U}$. Offenbar ist dann $\phi|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein Diffeomorphismus von U auf die offene Teilmenge $\mathbb{R}^k \cap \phi(\tilde{U})$ des \mathbb{R}^k . Und weil $\mathbb{R}^k \cap \phi(\tilde{U})$ beschränkt ist, können wir ein $a \in \mathbb{R}^k$ so wählen, dass $u := a + \phi|_U$ im Inneren von H^k liegt. Also ist jede k -dimensionale Mannigfaltigkeit im Sinne der Analysis II eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit mit leerem Rand im Sinne der neuen Definition.

Davon gilt auch die Umkehrung: Ein Diffeomorphismus $u : M \supset U \rightarrow u(U) \subset \mathbb{R}^k$ läßt sich nach Definition zu einer C^∞ -Abbildung $\phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^k$ einer offenen Umgebung \tilde{U} von p in V nach $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ fortsetzen. Die Umkehrabbildung u^{-1} wird durch $u^{-1}(x_1, \dots, x_n) := u^{-1}(x_1, \dots, x_k)$ zu einer C^∞ -Abbildung auf der offenen Menge $u(U) \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ fortgesetzt.

Also sind die C^∞ -Mannigfaltigkeiten im Sinne der Analysis II genau die Mannigfaltigkeiten mit leerem Rand im Sinne der neuen Definition.

Beispiel 276 (Zur Veranschaulichung). Eine abgeschlossene Halbsphäre oder ein Möbiusband sind berandete 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3 .



Der Rand ist in beiden Fällen *eine* geschlossene Kurve. □

Beispiel 277 (Zum Nachdenken). Die Menge

$$M = \{x \in D^n \mid x_n < 0\}$$

ist eine berandete n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Was ist ihr Rand? □

10.4.2 Zerlegung der Eins

Sei V ein endlich-dimensionaler Banachraum.

Der folgende Satz ist ein technisches Hilfsmittel zur „Lokalisierung“ globaler Objekte auf einer Mannigfaltigkeit und umgekehrt zum „Verschmelzen“ lokaler Objekte zu globalen Objekten. Wir formulieren und beweisen ihn nur in einer sehr speziellen Situation für kompakte Mannigfaltigkeiten, weil wir ihn allgemeiner nicht benötigen und weil dadurch der Beweis viel einfacher wird.

Satz 278 (Zerlegung der Eins). *Seien $M \subset V$ eine kompakte berandete k -dimensionale Mannigfaltigkeit und $(u_\alpha : U_\alpha \rightarrow H^k)_{\alpha \in A}$ ein Atlas für M . Dann gibt es endlich-viele C^∞ -Funktionen*

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m : M \rightarrow [0, 1]$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) Zu jedem $i \in \{1, \dots, m\}$ gibt es ein $\alpha \in A$ mit

$$\text{supp } \lambda_i := \overline{\{x \mid \lambda_i(x) \neq 0\}} \subset U_\alpha.$$

$\text{supp } \lambda_i$ heißt der Träger von λ_i .

(ii) Für alle $x \in M$ ist

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(x) = 1.$$

Die Familie $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ nennt man auch eine zu $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ passende Zerlegung der Eins.

Beweis. Wähle zu jedem $x \in M$ eine Karte $u_x : U_x \rightarrow H^k$ aus dem gegebenen Atlas aus, für die $x \in U_x$. Dann ist $u_x(U_x)$ eine offene Teilmenge von H^k , und es gibt (vgl. Analysis I, 4.3) eine nicht negative C^∞ -Funktion $\psi_x : H^k \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \psi_x(u_x(x)) &= 1, \\ \text{supp } \psi_x &\subset u_x(U_x). \end{aligned}$$

Setze

$$\tilde{\lambda}_x(y) := \begin{cases} \psi_x(u_x(y)), & \text{falls } y \in U_x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{\lambda}_x$ eine C^∞ -Funktion auf M . Das ist nach der Kettenregel klar auf der offenen Menge U_x und erst recht klar auf der offenen Menge $M \setminus u_x^{-1}(\text{supp } \psi_x)$. Diese beiden offenen Mengen überdecken aber M , und daher ist $\tilde{\lambda}_x$ überall C^∞ .

$(V_x := \tilde{\lambda}_x^{-1}([0, \infty[))_{x \in M}$ ist eine offene Überdeckung der kompakten Mannigfaltigkeit M . Also genügen endlich viele dieser Mengen, um M zu überdecken:

$$M = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}.$$

Dann ist also

$$\sigma := \tilde{\lambda}_{x_1} + \dots + \tilde{\lambda}_{x_m} > 0$$

und für $\lambda_i := \tilde{\lambda}_{x_i} / \sigma$ gilt $\sum \lambda_i = 1$. Der Träger von λ_i liegt in U_{x_i} . Aber $U_{x_i} = U_\alpha$ für ein $\alpha \in A$, und damit folgt die Behauptung. \square

10.4.3 Orientierung

Definition 279. Sei M eine berandete k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von V .

- (i) Eine *Differentialform vom Grad m auf M* ist eine C^∞ -Abbildung

$$\omega : M \rightarrow \Lambda^m V^*.$$

Beachten Sie, dass sich ω nach Definition zu einer C^∞ -Abbildung auf einer offenen Umgebung G von M in V erweitern läßt.

Den Vektorraum der Differentialform vom Grad m auf M bezeichnen wir mit $\Omega^m(M)$.

Ist $\phi : \mathbb{R}^k \supset \tilde{U} \rightarrow M$ eine (lokale) Parametrisierung für M , so ist $\phi^*\omega \in \Omega^m(\tilde{U})$.

- (ii) $p \in M$ heißt eine *Nullstelle* von $\omega \in \Omega^m(M)$, wenn für eine Parametrisierung ϕ für M um p

$$(\phi^*\omega)_{\phi^{-1}(p)} = 0. \quad (75)$$

Hat man zwei Parametrisierungen ϕ_i um p , so gilt

$$\phi_1^*\omega = \underbrace{(u_2 \circ u_1^{-1})}_{\text{Diffeo}}^* \phi_2^*\omega. \quad (76)$$

Also gilt (75) für alle Parametrisierungen, wenn es für eine gilt.

- (iii) Eine Form $\eta \in \Omega^m(M) = \Omega^{\dim M}(M)$ ohne Nullstelle heißt eine *Determinantenform* auf M . M heißt *orientierbar*, wenn es auf M eine Determinantenform gibt.
- (iv) Zwei Determinantenformen η_1, η_2 auf M heißen äquivalent, wenn

$$\frac{\phi^*\eta_1(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)}{\phi^*\eta_2(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)} > 0$$

für jede Parametrisierung ϕ . Das definiert eine Äquivalenzrelation, und jede Äquivalenzklasse heißt eine *Orientierung von M* . Jede Determinantenform auf M definiert also eine Orientierung von M . Ein Mannigfaltigkeit mit einer Orientierung heißt eine *orientierte Mannigfaltigkeit* und die Determinantenformen aus der Orientierung dann *positive* Determinantenformen.

Bemerkungen.

1. Im \mathbb{R}^k ist eine Basis *positiv orientiert*, wenn sie *genauso orientiert ist, wie die Standardbasis*, das heißt, wenn die Basistransformation zwischen den beiden eine positive Determinante hat.
2. Stattdessen kann man auch sagen, eine Basis im \mathbb{R}^k ist positiv orientiert, wenn die Determinante mit den Vektoren der Basis als Argumenten positiv ist.
3. Ein k -dimensionaler reeller Vektorraum hat im Gegensatz zum \mathbb{R}^k keine ausgezeichnete Orientierung. Aber man kann eine auszeichnen, indem man irgendeine Basis als *positiv orientiert* deklariert.
4. Auf den k -tupeln von Vektoren in einem k -dimensionalen Vektorraum hat man im Gegensatz zum \mathbb{R}^k keine ausgezeichnete Determinante. Aber man kann eine wählen, indem man irgendeine alternierende k -Form $\neq 0$ auszeichnet. Das liefert dann gleichzeitig wie in der 2. Bemerkung eine Orientierung für den Vektorraum.

5. Eine Orientierung für eine Mannigfaltigkeit ist anschaulich eine “kohärente” Orientierung für deren Tangentialräume. Machen Sie sich das am Zylinder, am (nicht orientierbaren) Möbiusband und an der 2-Sphäre klar.
6. Wie in der 4. Bemerkung kann man eine Orientierung auf einer Mannigfaltigkeit auszeichnen, indem man (in “kohärenter” Weise) in jedem Tangentialraum eine alternierende k -Form $\neq 0$ vorgibt, eben eine *Determinantenform*.
7. Wir verzichten hier der Einfachheit halber auf die Einführung des Tangentialraums. Daher “akzeptieren” unsere oben definierten Differentialformen in ihren multilinearen Argumenten beliebige Argumente aus dem umgebenden Vektorraum V , und nicht nur Tangentialvektoren an M . Diesen ungewollten Effekt beseitigen wir dadurch, dass wir im wesentlichen die zurückgeholten Formen $\phi^*\omega = (u^{-1})^*\omega$ betrachten. Beachten Sie die definierende Gleichung

$$\phi^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega_{\phi}(\underbrace{d\phi(v_1), \dots, d\phi(v_k)}_{\text{tangential an } M}).$$

Beispiel 280. Auf \mathbb{R}^k oder H^k ist $\eta = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \det$ eine Determinantenform, die also eine Orientierung definiert. Diese bezeichnen wir als die *Standardorientierung* von \mathbb{R}^k bzw. H^k

□

Beispiel 281. Sei $*\omega^X \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ wie im Beispiel 187 und $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten $*\omega^X$ als Element von $\Omega^{n-1}(S^{n-1})$. Ist $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \supset \tilde{U} \rightarrow S^{n-1}$ eine Parametrisierung, so sind also $\partial_1\phi, \dots, \partial_{n-1}\phi$ überall linear unabhängig. Aus $\langle \phi, \phi \rangle = 1$ folgt durch Differenzieren $\langle \phi, \partial_i\phi \rangle = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Also sind auch $\phi, \partial_1\phi, \dots, \partial_{n-1}\phi$ überall linear unabhängig. Daher ist

$$\phi^*(\omega^X)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) = \det(\phi, \partial_1\phi, \dots, \partial_{n-1}\phi)$$

niemals 0 und $*\omega^X$ ist eine Determinantenform auf S^{n-1} . Die zugehörige Orientierung nennen wir die *Standardorientierung* von S^{n-1} .

Das gilt natürlich auch für Sphären von beliebigem Radius $r > 0$.

□

Definition 282. (i) Zwei Karten für eine Mannigfaltigkeit heißen *gleichorientiert*, wenn ihr Kartenwechsel überall positive Funktionaldeterminante hat.

- (ii) Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit. Eine Karte $u : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ für M heißt *positiv orientiert*, wenn

$$(u^{-1})^*\eta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) > 0$$

für eine (und dann für jede) positive Determinantenform $\eta \in \Omega^k(M)$. Entsprechend definiert man *negativ orientierte Karten*

Lemma 283. Sei M eine k -dimensionale kompakte berandete Untermannigfaltigkeit von V . Dann gilt:

- (i) Ist M orientiert, so sind die Kartenwechsel zwischen positiv orientierten Karten gleichorientiert. M besitzt einen Atlas aus gleichorientierten Karten.
- (ii) Besitzt M einen Atlas aus gleichorientierten Karten, so gibt es genau eine Orientierung für M bezüglich der alle Karten aus dem Atlas positiv orientiert sind.

Beweis. Zu (i). Die erste Behauptung ist klar nach (76).

Wir wählen nun für M eine Atlas mit zusammenhängenden Kartengebieten und eine positive Determinantenform η . Dann wechselt $(u^{-1})^*\eta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$ nicht das Vorzeichen. Ist es negativ, so ersetzen wir die erste Komponente u_1 von u durch $-u_1$ und erhalten so eine positiv orientierte Karte mit demselben Kartengebiet. Das tun wir mit jeder Karte und erhalten eine Atlas aus positiv und daher gleichorientierten Karten.

Zu (ii). Es ist klar, dass es nur eine solche Orientierung geben kann.

Sei \mathcal{A} ein Atlas wie in (ii). Wir wählen dazu eine Zerlegung der Eins $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ und zu jedem i eine Karte $(u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k) \in \mathcal{A}$ mit

$$\text{supp } \lambda_i \subset U_i.$$

Wir setzen

$$(\eta_i)_x := \begin{cases} (u_i^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)_x & \text{für } x \in U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachten Sie, dass die η_i im allgemeinen nicht C^∞ sind, wohl aber die $\lambda_i \eta_i \in \Omega^k(M)$. Wir definieren

$$\eta = \sum_{i=1}^m \lambda_i \eta_i \in \Omega^k(M).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (u_j^{-1})^*\eta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) &= \sum_i (\lambda_i \circ u_j^{-1}) ((u_j^{-1})^* u_i^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \\ &= \sum_i (\lambda_i \circ u_j^{-1}) \det(D(u_i u_j^{-1}))(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Nach Definition der Zerlegung der Eins bilden die $\text{supp } \lambda_j$ und deshalb die Kartengebiete U_j eine Überdeckung von M und η ist eine Determinantenform, bezüglich der alle Karten aus dem konstruierten Atlas positiv orientiert sind. \square

Übungsaufgabe. Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit besitzt keine oder genau zwei Orientierungen.

Wir erinnern nun an Lemma 272: Ist $u : U \rightarrow H^k$ eine Karte für M mit $U \cap \partial M \neq \emptyset$, so ist

$$u|_{U \cap \partial M} : U \cap \partial M \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$$

eine Karte für ∂M . Gleichorientierte Karten für M liefern auf diese Weise gleichorientierte Karten für ∂M , und ein Atlas für M mit gleichorientierten Karten induziert einen solchen für ∂M . Deshalb folgt aus dem letzten Lemma:

Satz 284 (und Definition: Randorientierung). Sei $M \subset V$ eine orientierte kompakte k -dimensionale berandete Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand. Dann gibt es auf ∂M genau eine Orientierung mit folgender Eigenschaft:

- Ist $\dim M$ gerade, so induziert jeder Atlas aus positiv orientierten Karten für M einen Atlas aus positiv orientierten Karten für ∂M .
- Ist $\dim M$ ungerade, so induziert jeder Atlas aus positiv orientierten Karten für M einen Atlas aus negativ orientierten Karten für ∂M .

Diese Orientierung heißt die induzierte Randorientierung.

Beispiel 285. Auf der Einheitsvollkugel D^n definiert die Determinantenform

$$\det = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$$

eine Orientierung und nach Beispiel 269 ist

$$u(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1, \dots, x_n + \sqrt{1 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)} \right)$$

eine Karte für D^n . Das Orientierungsverhalten dieser Karte ist gegeben durch das Vorzeichen von

$$(u^{-1})^* \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det \left(\frac{\partial u^{-1}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u^{-1}}{\partial y_n} \right) = 1,$$

weil u^{-1} fast so aussieht wie u , vgl. Beispiel 269. u ist also eine positiv orientierte Karte für die berandete Mannigfaltigkeit D^n . Es liefert in geraden Dimensionen n eine positive, in ungeraden Dimensionen eine negativ orientierte Karte bezüglich der Randorientierung von $S^{n-1} = \partial D^n$.

Wie verhält sich diese Randorientierung zur Standardorientierung, vgl. Beispiel 281?

Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} ((u|_{S^{n-1}})^{-1})^* * \omega^X(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) &= (u^{-1}|_{\mathbb{R}^{n-1}})^* * \omega^X(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) \\ &= \det \left(\frac{u^{-1}(y)}{\|u^{-1}(y)\|}, \frac{\partial u^{-1}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial u^{-1}}{\partial y_{n-1}} \right) \\ &= \det(u^{-1}(y), \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}) \\ &= (-1)^{n-1} \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, u^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Weil $u^{-1}(y)$ negative n -te Koordinate hat, vgl. die Abbildung in Beispiel 269, hat der letzte Ausdruck also Vorzeichen $(-1)^n$. Die Orientierung von S^{n-1} als Rand der kanonisch orientierten Vollkugel D^n ist also die Standardorientierung von S^{n-1} . Das mag mit der Fallunterscheidung in der Definition im Satz 284 versöhnen.

□

Bemerkung. Die Aussagen von Lemma 283 und damit der Satz 284 gelten auch für nicht-kompaktes M . Den Beweis muss man nicht ändern, man braucht nur eine allgemeinere Version des Satzes von der Zerlegung der Eins. Da wir im folgenden Abschnitt ohnehin aber nur kompakte berandete Mannigfaltigkeiten betrachten, reicht unsere "Sparversion".

10.4.4 Integration über Mannigfaltigkeiten

Sei V ein endlichdimensionaler Banachraum.

Definition 286. Seien M eine k -dimensionale kompakte, orientierte berandete Untermannigfaltigkeit von V und $\omega \in \Omega^k(M)$. Nach dem Satz 278 von der Zerlegung der Eins, insbesondere nach der letzten Bemerkung dort, gibt es einen Atlas $(u_i : U_i \rightarrow H^k)_{1 \leq i \leq k}$ mit positiv orientierten Karten und dazu eine Zerlegung der Eins $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ mit $\text{supp } \lambda_i \subset U_i$. Wir bezeichnen mit $\phi_i = u_i^{-1}$ die zugehörigen Parametrisierungen und definieren:

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^m \int_M \lambda_i \omega := \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} \phi_i^*(\lambda_i \omega) := \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} \phi_i^*(\lambda_i \omega)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k.$$

Beachten Sie, daß $\text{supp } \lambda_i$ abgeschlossen, also kompakt ist. Daher ist auch

$$x \mapsto \phi_i^*(\lambda_i \omega)_x(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$$

eine C^∞ -Funktion mit kompaktem Träger $u_i(\text{supp } \lambda_j)$ und die μ_k -Integrale existieren.

Wir müssen zeigen, dass diese Definition unabhängig von den gemachten Wahlen ist. Das liegt im wesentlichen an diesem

Lemma 287. Seien $u_i : U_j \rightarrow H^k$ für $i = 1, 2$ zwei gleich-orientierte Karten für M mit Parametrisierungen $\phi_i := u_i^{-1}$ und $\omega \in \Omega^k(M)$ mit kompaktem Träger

$$S := \text{supp } \omega \subset U_1 \cap U_2.$$

Dann gilt

$$\int_{u_1(S)} \phi_1^* \omega = \int_{u_2(S)} \phi_2^* \omega. \quad (77)$$

Beweis. Nach der Transformationsformel Lemma 199 gilt

$$\int_{u_1(S)} \phi_1^* \omega = \int_{u_1(S)} (u_2 \circ u_1^{-1})^* \phi_2^* \omega = \int_{u_2 \circ u_1^{-1}(u_1(S))} \phi_2^* \omega = \int_{u_2(S)} \phi_2^* \omega.$$

□

Nun zum eigentlichen

Beweis der Unabhängigkeit. Sei $(\tilde{u}_j : \tilde{U}_j \rightarrow \mathbb{R}^k)_{1 \leq j \leq \tilde{m}}$ ein weiterer Atlas wie in der Definition und $(\tilde{\lambda}_j)$ dazu eine Zerlegung der Eins. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} \phi_i^*(\lambda_i \omega) &= \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} \phi_i^* \left(\sum_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{\lambda}_j \lambda_i \omega \right) \\ &= \sum_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1, \dots, \tilde{m}} \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i \cap \text{supp } \tilde{\lambda}_j)} \phi_i^*(\tilde{\lambda}_j \lambda_i \omega) \\ &\stackrel{(77)}{=} \sum_{j=1, \dots, \tilde{m}} \sum_{i=1, \dots, m} \int_{\tilde{u}_j(\text{supp } \tilde{\lambda}_i \cap \text{supp } \tilde{\lambda}_j)} \tilde{\phi}_j^*(\tilde{\lambda}_j \lambda_i \omega) \\ &= \sum_{j=1, \dots, \tilde{m}} \int_{\tilde{u}_j(\text{supp } \tilde{\lambda}_j)} \tilde{\phi}_j^*(\tilde{\lambda}_j \omega). \end{aligned}$$

□

So elegant die Methode der Zerlegung der Eins für die Definition von $\int_M \omega$ auch ist, niemand würde sie benutzen, um konkrete Integrale zu berechnen. Dafür ist das folgende Lemma hilfreich:

Lemma 288. Seien M eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^k(M)$, $k = \dim M$, und

$$\phi : \mathbb{R}^k \supset G \rightarrow M$$

eine C^∞ -Abbildung einer kompakten Menge $G \subset \mathbb{R}^k$ mit folgenden Eigenschaften:

(i)

$$\text{supp } \omega \subset \phi(G).$$

(ii) Es gibt eine μ_k -Nullmenge $N \subset G$, so dass $G \setminus N$ offen in H^k und

$$\phi|_{G \setminus N} : G \setminus N \rightarrow M$$

eine positiv orientierte Parametrisierung von M , d.h. das Inverse einer positiv orientierten Karte für M ist.

Dann ist

$$\int_M \omega = \int_G \phi^* \omega.$$

Beweis. Es genügt, den Beweis zu führen für den Fall, dass $\text{supp } \omega$ enthalten ist im Definitionsbereich einer positiv orientierten Karte $u : U \rightarrow H^k$. Dann ist

$$\int_M \omega = \int_{u(\text{supp } \omega)} (u^{-1})^* \omega.$$

Sei $G' := \{x \in G \mid \phi(x) \in U\}$. Dann ist

$$h := u \circ \phi|_{G'} : G' \rightarrow \mathbb{R}^k$$

auf der offenen Menge $G' \setminus N$ ein orientierungstreuer Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von H^k , die $u(\text{supp } \omega)$ enthält. Daher gilt

$$\begin{aligned} \int_{u(\text{supp } \omega)} (u^{-1})^* \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k &= \int_{h(G')} (u^{-1})^* \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k \\ &= \int_{G'} (u^{-1})^* \omega_h(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \underbrace{\det(Dh)}_{>0} d\mu_k \\ &= \int_{G'} h^* (u^{-1})^* \omega_h(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k \\ &= \int_{G'} \phi^* u^* (u^{-1})^* \omega = \int_{G'} \phi^* \omega = \int_G \phi^* \omega. \end{aligned}$$

□

Beispiel 289. Die Kugelkoordinaten

$$[0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow S^2, (\theta, \phi) \mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

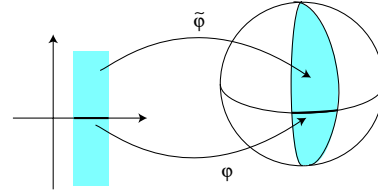
erfüllen die Voraussetzungen des Lemmas, wenn man S^2 mit der Standardorientierung versieht. Darum ist

$$\begin{aligned} \int_{S^2} * \omega^X &= \int_{[0, \pi]} \int_{[0, 2\pi]} \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} d\phi d\theta \\ &= \int_{[0, \pi]} \int_{[0, 2\pi]} \sin \theta d\phi d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

□

Beispiel 290.

Bildet $\phi : \mathbb{R}^{n-1} \supset G \rightarrow S^{n-1}$ die kompakte Menge G surjektiv auf die Sphäre S^{n-1} ab und ist auf dem offenen Komplement einer Nullmenge ein orientierungstreuer Diffeomorphismus, so leistet



$$\tilde{\phi} : G \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow S^n, (x, t) \mapsto (\phi(x) \cos t, \sin t)$$

dasselbe für S^n .

Wir berechnen die Zurückholung $\tilde{\phi}^*(\ast\omega^X)$ der Flussform $\ast\omega^X \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $X = \frac{x}{\|x\|^{n+1}}$.

Dabei beachten wir, dass $\|\phi\| = \|\tilde{\phi}\| = 1$.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^*(\ast\omega^X)_{(x,t)}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) &= \det\left(\tilde{\phi}, \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}\right) \\ &= \det \begin{bmatrix} \phi(x) \cos t & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \cos t & -\phi(x) \sin t \\ \sin t & 0 & \cos t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos t \sin t} \det \begin{bmatrix} \phi(x) \cos t \sin t & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \cos t & -\phi(x) \sin t \cos t \\ \sin^2 t & 0 & \cos^2 t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos t \sin t} \det \begin{bmatrix} \phi(x) \cos t \sin t & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \cos t & 0 \\ \sin^2 t & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\cos t \sin t} \det \begin{bmatrix} \phi(x) \cos t \sin t & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \cos t \\ \sin^2 t & 0 \end{bmatrix} \\ &= \cos^{n-1} t \det \begin{bmatrix} \phi(x) & \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \end{bmatrix} \\ &= \cos^{n-1} t \phi^*(\ast\omega^X)_x(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}), \end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Flussform auf dem \mathbb{R}^n steht. Durch Induktion ergibt sich daraus, dass

$$\int_{S^n} \ast\omega^X = \text{Volumen}(S^n),$$

vgl. Beispiel 73.

□

10.4.5 Der Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten

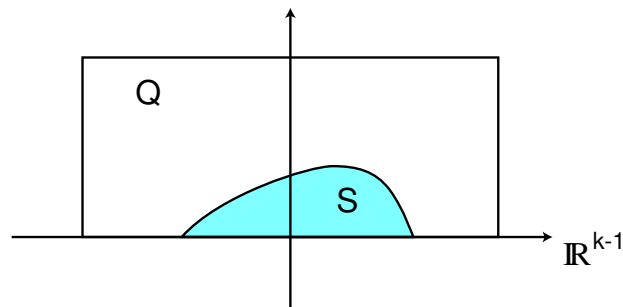
Sei V ein endlich-dimensionaler Banachraum.

Lemma 291. Sei $\omega \in \Omega^{k-1}(H^k)$ mit kompaktem Träger $S \subset H^k$. Wir betrachten \mathbb{R}^{k-1} als Teilmenge $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ von \mathbb{R}^k . Dann gilt

$$\int_S d\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k = (-1)^k \int_{S \cap \mathbb{R}^{k-1}} \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}) d\mu_{k-1}.$$

Beweis. Sei $r > 0$ so gewählt, dass

$$S \subset]-r, r[^{k-1} \times [0, r[\subset [-r, r]^{k-1} \times [0, r] =: Q.$$



Definiere

$$c: I^k \rightarrow Q, \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto (r(2x_1 - 1), \dots, r(2x_{k-1} - 1), rx_k).$$

Dann gilt nach der Transformationsformel Lemma 199 und dem Satz von Stokes für Ketten

$$\int_S d\omega = \int_Q d\omega = \int_{c(I^k)} d\omega = \int_{I^k} c^* d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_{\cos^i} \omega - \int_{\cos_i} \omega \right).$$

Aber allenfalls die untere k -te Seite von c trifft den Träger von ω . Wir erhalten

$$\int_S d\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) d\mu_k = (-1)^k \int_{\cos_k} \omega = (-1)^k \int_{S \cap \mathbb{R}^{k-1}} \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}) d\mu_{k-1}.$$

□

Beachten Sie, dass die Identität eine positiv orientierte Karte von H^k ist. Ihre Einschränkung auf \mathbb{R}^{k-1} ist ebenfalls positiv orientiert bezüglich der *Standardorientierung* von \mathbb{R}^{k-1} . Aber die *Randorientierung* von ∂H^k stimmt damit nur bei geradem k überein. Deshalb kann man die Formel der Lemmas auch schreiben als

$$\int_{H^k} d\omega = \int_{\partial H^k} \omega.$$

Das ist die einfachste Version des Satzes von Stokes für Mannigfaltigkeiten, den wir aber nur für kompakte Mannigfaltigkeiten beweisen:

Satz 292 (Stokes). Seien M eine k -dimensionale kompakte, orientierte berandete Untermannigfaltigkeit von V und $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$. Der Rand ∂M trage die induzierte Randorientierung. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Ist insbesondere $\partial M = \emptyset$, so gilt

$$\int_M d\omega = 0.$$

Beweis. Seien $(u_i : U_i \rightarrow H^k)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ ein Atlas mit positiv orientierten Karten und sei $(\lambda_i : U_i \rightarrow \mathbb{R})_{i \in \{1, \dots, m\}}$ eine Zerlegung der Eins dazu. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \omega\right) = \sum_{i=1}^m \int_M d(\lambda_i \omega) \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} (u_i^{-1})^* d(\lambda_i \omega)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i)} d((u_i^{-1})^* \lambda_i \omega)(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) \\ &\stackrel{\text{(Lemma 291)}}{=} (-1)^k \sum_{i=1}^m \int_{u_i(\text{supp } \lambda_i) \cap \mathbb{R}^{k-1}} (u_i^{-1})^* \lambda_i \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}) \\ &= \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

□

Beispiel 293. Für $0 < R \neq 1$ ist $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (1 - \|x\|)(R - \|x\|) \leq 0\}$ eine $(n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit M deren Rand die beiden Sphären S_R^n und S^n vom Radius R bzw. 1 mit entgegengesetzten Orientierungen bilden. Sei $*\omega^X$ wie im Beispiel 290. Weil $d*\omega^X = 0$ folgt aus dem Satz von Stokes

$$0 = \int_M d*\omega^X = \pm \left(\int_{S_R^n} *\omega^X - \int_{S^n} *\omega^X \right).$$

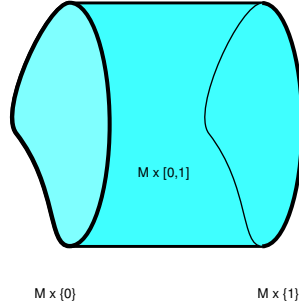
Es folgt also

$$\int_{S_R^n} *\omega^X = \int_{S^n} *\omega^X = \text{Volumen}(S^n).$$

Allgemeiner gilt das für jede kompakte Hyperfläche $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die gemeinsam mit einer Sphäre S_R^n eine kompakte Untermannigfaltigkeit M des \mathbb{R}^{n+1} berandet.

□

Beispiel 294. Ist M eine kompakte unberandete k -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit, so ist $M \times [0, 1] \subset V \times \mathbb{R}$ eine kompakte berandete $(k+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.



Ein Atlas $(u_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k)_{i \in J}$ mit positiv orientierten Karten liefert einen Atlas für $M \times [0, 1]$ mit folgenden Karten:

$$u_i^+ : U_i \times [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^{k+1}, (x, t) \mapsto \begin{pmatrix} u_{i1}(x) \\ u_{i2}(x) \\ \vdots \\ u_{ik}(x) \\ t \end{pmatrix},$$

$$u_i^- : U_i \times]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}, (x, t) \mapsto \begin{pmatrix} -u_{i1}(x) \\ u_{i2}(x) \\ \vdots \\ u_{ik}(x) \\ 1 - t \end{pmatrix}.$$

Man rechnet nach, dass diese Karten gleich-orientiert sind. Wenn man die Randkomponenten $M \times \{0\}$ und $M \times \{1\}$ auf die offensichtliche Weise mit M identifiziert, stimmt bei geradem $k + 1$ die Randorientierung auf $M \times \{0\}$ mit der ursprünglichen Orientierung von M überein, auf $M \times \{1\}$ erhält man die entgegengesetzte Orientierung. Bei ungeradem $k + 1$ kehrt sich das um.

Sei nun N eine weitere k -dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^k(N)$. Seien

$$f_0, f_1 : M \rightarrow N$$

zwei homotope Abbildungen, d.h. es gibt eine C^∞ -Abbildung $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ mit

$$F(\cdot, 0) = f_0, \quad F(\cdot, 1) = f_1.$$

Weil ω vom Grad $k = \dim N$ ist, ist $d\omega = 0$. Also ist auch

$$0 = \int_{M \times [0, 1]} F^* d\omega = \int_{M \times [0, 1]} d(F^* \omega) = \int_{\partial M} F^* \omega = \pm \left(\int_M f_0^* \omega - \int_M f_1^* \omega \right).$$

Für homotope Abbildungen $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ gilt also

$$\int_M f_0^* \omega = \int_M f_1^* \omega.$$

□

Beispiel 295. Wir wenden das an auf den Fall $M = N = S^k$ und die *Antipodenabbildung*

$$\alpha : S^k \rightarrow S^k, x \mapsto -x.$$

Weil die Form $\eta := *\omega^X \in \Omega^k(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\})$ die Orientierung von S^k definiert, ist

$$\int_{S^k} \eta > 0.$$

Nun ist aber

$$(\alpha^*\eta)_p(v_1, \dots, v_k) = \eta_{-p}(-v_1, \dots, -v_k) = \det(-p, -v_1, \dots, -v_k) = (-1)^{k+1} \eta_p(v_1, \dots, v_k).$$

Für gerades k ist also

$$\int_{S^k} \alpha^*\eta < 0$$

und die Antipodenabbildung damit *nicht* homotop zur Identität $\text{id} : S^k \rightarrow S^k$.

Sei nun $T : S^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ eine C^∞ -Abbildung mit

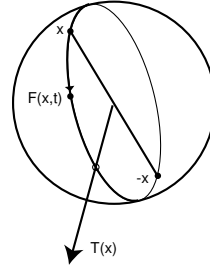
$$\langle x, T(x) \rangle = 0$$

für alle $x \in S^k$. Dann nennt man T auch ein tangenciales Vektorfeld auf der Sphäre S^k .

Hat T keine Nullstelle, so liefert

$$F(x, t) := \cos(\pi t) x + \sin(\pi t) \frac{T(x)}{\|T(x)\|}$$

eine Homotopie $F : S^k \times [0, 1] \rightarrow S^k$ zwischen der Identität und der Antipodenabbildung.



Solche Abbildungen können also nur für ungerades k existieren. (Tun sie auch!) Für gerades k , insbesondere für $k = 2$ hat hingegen jedes tangenciales Vektorfeld auf der k -Sphäre mindestens eine Nullstelle:

Jeder glatt gekämmte Igel hat mindestens einen Glatzpunkt.

□

10.4.6 Der Abbildungsgrad

In diesem Abschnitt skizzieren wir die Definition einer Homotopieinvarianten für Selbstabbildungen der $(n - 1)$ -dimensionalen Einheitskugel

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Lemma 296. *Seien $f : M \rightarrow N$ ein Diffeomorphismus zusammenhängender kompakter k -Mannigfaltigkeiten und $\omega \in \Omega^k(N)$. Dann gilt*

$$\int_M f^* \omega = \pm \int_N \omega.$$

Wir verzichten auf den Beweis. Er benutzt die Definition des Integrals über Mannigfaltigkeiten und das Lemma 199.

Sei wieder $X := \frac{x}{\|x\|^n}$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wir versehen S^{n-1} mit der von $*\omega^X$ induzierten Orientierung. Dann ist

$$c_{n-1} := \int_{S^{n-1}} \omega_{n-1} > 0.$$

$$\omega_{n-1} := *\omega^X \in \Omega(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

(Tatsächlich ist dies das Volumen der Kugel.) Wir setzen im folgenden

$$\omega_{n-1} := \frac{1}{c_{n-1}} *\omega^X.$$

Dann ist also $\int_{S^{n-1}} \omega_{n-1} = 1$.

Satz 297 (Abbildungsgrad). *Sei $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ eine C^∞ -Abbildung. Dann ist*

$$\deg(f) := \int_{S^{n-1}} f^* \omega_{n-1}$$

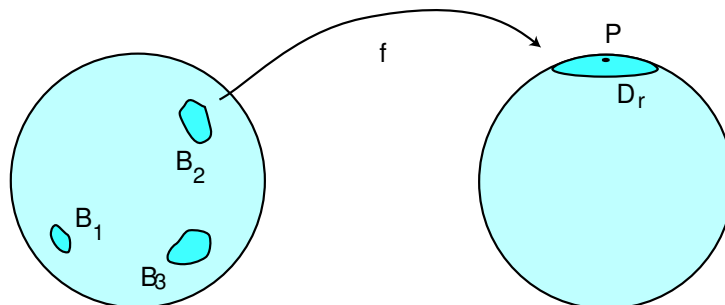
eine ganze Zahl, der sogenannte Abbildungsgrad von f .

Bemerkung. Nach Beispiel 294 ist $\deg(f_0) = \deg(f_1)$, wenn f_0 und f_1 homotop sind.

Beweis. Sei $P := e_n$ der „Nordpol“ von S^{n-1} und für $r > 0$

$$D_r := \{x \in S^{n-1} \mid \|P - x\| \leq r\}$$

die „Polkappe“ vom Radius r .



Wir nehmen zunächst folgendes an:

Es gibt ein $r > 0$, so dass $f^{-1}(D_r)$ die Vereinigung von endlich vielen disjunkten Mengen $B_1, \dots, B_k \subset S^{n-1}$ ist, die jeweils durch f diffeomorph auf D_r abgebildet werden. (*)

Dann ist

$$\int_{S^{n-1}} f^* \omega_{n-1} = \int_{S^{n-1} \setminus \bigcup B_i} f^* \omega_{n-1} + \sum_{i=1}^k \int_{B_i} f^* \omega_{n-1}. \quad (78)$$

Wir betrachten das erste Integral rechts. Nach dem Lemma von Poincaré besitzt ω_{n-1} auf dem sternförmigen Komplement der Halbachse $\{\lambda P \mid \lambda \geq 0\}$ ein Potential θ_{n-2} . Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1} \setminus \bigcup B_i} f^* d\theta_{n-2} &= \int_{S^{n-1} \setminus \bigcup B_i} df^* \theta_{n-2} = \int_{\partial(S^{n-1} \setminus \bigcup B_i)} f^* \theta_{n-2} \\ &= - \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_i} f^* \theta_{n-2} \stackrel{\text{Lemma 296}}{=} - \sum_{i=1}^k \pm \int_{\partial D_r} \theta_{n-2} \\ &= \sum_{i=1}^k \pm \int_{\partial(S^{n-1} \setminus D_r)} \theta_{n-2} = \sum_{i=1}^k \pm \int_{S^{n-1} \setminus D_r} d\theta_{n-2} \\ &= \sum_{i=1}^k \pm \int_{S^{n-1} \setminus D_r} \omega_{n-1} = m \int_{S^{n-1} \setminus D_r} \omega_{n-1} \end{aligned}$$

für ein ganzzahliges m .

Für $r \rightarrow 0$ geht dies gegen $m \int_{S^{n-1}} \omega_{n-1} = m$, während die B_i jeweils auf einen Punkt schrumpfen. Die B_i -Integrale in (78) gehen daher gegen 0 und aus (78) folgt die Behauptung.

Wir skizzieren nun noch, warum man ohne Einschränkung die Annahme (*) machen kann. Wir setzen f durch $\tilde{f}(x) := \|x\| f(\frac{x}{\|x\|})$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fort und wenden darauf das Lemma von Sard an. Man rechnet nach, dass $Q \in \mathbb{R}^n$ genau dann ein regulärer Wert von \tilde{f} ist, wenn dasselbe für $Q/\|Q\|$ gilt. Wir können also o.E. annehmen, dass $P = \mathbf{e}_n$ ein regulärer Wert ist. Nach dem Umkehrsatz bildet f dann eine Umgebung eines jeden Punktes $\in f^{-1}(\{p\})$ diffeomorph ab. Weil S^{n-1} kompakt ist, ist $f^{-1}(\{p\}) = \{p_1, \dots, p_k\}$ endlich und eine Umgebung U_i von p_i wird diffeomorph auf eine offene Umgebung von P abgebildet. Wir können annehmen, dass die U_i disjunkt sind. Wählt man $r > 0$ so klein, dass

$$D_r \subset \left(\bigcap_{i=1}^k f(U_i) \right) \setminus f(S^{n-1} \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i),$$

so folgt (*). □

Bemerkungen.

1. Der Beweis liefert eine anschauliche Interpretation des Abbildungsgrades: Dieser zählt einfach die Urbilder eines regulären Wertes von f mit Vielfachheiten ± 1 abhängig davon, ob f in diesen Punkten die Orientierung erhält oder umkehrt.
2. Eine Standardanwendung des Abbildungsgrades ist diese: Gegeben sei eine Abbildung $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und ein $y \in \mathbb{R}^n$. Man möchte wissen, ob

$$f(x) = y$$

eine Lösung besitzt. Wenn $y \in f(S^{n-1})$ ist das klar. Andernfalls betrachtet man die Abbildungen

$$g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{f(x) - y}{\|f(x) - y\|}.$$

Wenn $\deg(g) \neq 0$, besitzt die Gleichung eine Lösung.

Andernfalls wäre nämlich $f((1-s)x) \neq y$ für alle $s \in [0, 1]$ und

$$G(x, s) : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{f((1-s)x) - y}{\|f((1-s)x) - y\|}$$

eine Homotopie zwischen g und einer konstanten Abbildung, also $\deg(g) = 0$.

3. In der Funktionentheorie spielt die Umlaufzahl eines geschlossenen Weges $c : S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ bezüglich eines Punktes $z_0 \notin c(S^1)$ eine wichtige Rolle. Sie wird definiert als

$$n(c, z_0) := \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{1}{z - z_0} dz$$

Diese Umlaufzahl ist gerade der Abbildungsgrad von

$$g(x) := \frac{c(x) - z_0}{|c(x) - z_0|}.$$

Das beweist man mittels der Identität

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} dz &= \frac{1}{x + iy} (dx + idy) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} (dx + idy) \\ &= \frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) + i \left(\frac{xdy}{x^2 + y^2} + \frac{-ydx}{x^2 + y^2} \right). \end{aligned}$$

10.4.7 Der Antipodensatz

Satz 298 (Antipodensatz von Borsuk-Ulam (1933)). Sei $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ eine ungerade C^∞ -Abbildung, d.h. es gelte

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \in S^{n-1}.$$

Dann ist der Abbildungsgrad von f ungerade, insbesondere also $\neq 0$.

Beweis. Der Beweis benutzt vollständige Induktion über n . Die topologischen Argumente sind ähnlich denen in Beweis von Satz 297.

Wir bezeichnen

$$S := S^{n-1}, \quad S_0 := S^{n-2} \subset S, \quad S_+ := \text{abgeschlossene obere Hemisphäre.}$$

n=1. Dann ist $f(-1) = -f(1)$, also f bijektiv und der Abbildungsgrad daher $= \pm 1$.

n=2. Wir wählen in $S \setminus (f(S_0) \cup S_0)$ einen regulären Wert N von f . Dann ist auch $-N$ ein regulärer Wert. Wir bezeichnen mit $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ die Projektion entlang der Geraden $\mathbb{R}N$ und definieren

$$G : S_+ \setminus f^{-1}(\{N, -N\}) \rightarrow S_0, x \mapsto \frac{\pi \circ f(x)}{\|\pi \circ f(x)\|}.$$

Sei $f^{-1}(\{N, -N\}) \cap S_+ = \{p_1, \dots, p_r\}$ mit paarweise verschiedenen p_i . Das Komplement von $\{p_1, \dots, p_r\}$ in $S_+ \setminus S_0$ besteht aus $r + 1$ Intervallen, die durch G jeweils in einen der zwei Punkte von S_0 abgebildet werden. Weil f in den p_i regulär ist, werden aufeinander folgende Intervalle in verschiedene Punkte von S_0 abgebildet. Weil $G|_{S_0}$ wieder ungerade ist, werden die Punkte von S_0 , also auch die daran angrenzenden Intervalle (das „erste“ und das „letzte“) in verschiedene Punkte von S_0 abgebildet. Damit ist r ungerade, und weil f eine ungerade Abbildung ist, erhalten wir

$$1 \equiv r = \#(f^{-1}(\{N, S\}) \cap S_+) = \frac{1}{2} \#(f^{-1}(\{N, S\})) = \#(f^{-1}(\{N\})) \equiv \deg(f). \quad (79)$$

$(n-1) \rightarrow n, n \geq 3$. Nach dem Satz von Sard ist $f(S_0) \neq S$. Weil $f(S_0)$ überdies kompakt ist, gibt es wieder nach dem Satz von Sard einen regulären Wert N von f im Komplement von $f(S_0) \cup S_0$. Nach der Voraussetzung über f ist dann auch $-N$ ein regulärer Wert von f im Komplement von $f(S_0)$.

Sei $f^{-1}(\{N, -N\}) \cap S_+ = \{p_1, \dots, p_r\}$. Seien $U_1, \dots, U_r \subset S_+ \setminus S_0$ paarweise disjunkte offene Umgebungen um die p_i , die durch f diffeomorph auf eine kleine offene Kugel um N bzw. $-N$ abgebildet werden, vgl. den Beweis zu Satz 297. Wir bezeichnen mit

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

die Projektion entlang der Achse $\mathbb{R}N$ und betrachten die Abbildungen

$$G : S_+ \setminus \left(\bigcup B_i \right) \rightarrow S_0, x \mapsto \frac{\pi \circ f(x)}{\|\pi \circ f(x)\|}, \quad g := G|_{S_0}.$$

Dann ist g wieder ungerade, hat nach Induktionsvoraussetzung also ungeraden Abbildungsgrad. Sei $\omega_{n-2} \in \Omega(\mathbb{R}^{n-1})$ wie im Abschnitt 10.4.6. Dann gilt

$$\int_{\partial(S_+ \setminus (\bigcup B_i))} G^* \omega_{n-2} = \int_{S_+ \setminus (\bigcup B_i)} G^* d\omega_{n-2} = 0. \quad (80)$$

Andrerseits ist aber nach Lemma 296

$$\int_{\partial \bar{U}_i} G^* \omega_{n-2} = \pm \int_{S_0} \omega_{n-2} = \pm 1$$

und daher

$$\int_{\partial(S_+ \setminus (\cup B_i))} G^* \omega_{n-2} = - \int_{S_0} g^* \omega_{n-2} - \sum \left(\int_{\partial \bar{U}_i} G^* \omega \right) = - \deg(g) - \sum_1^r \pm 1. \quad (81)$$

Nach (80), (81) ist also r ungerade. Aus (79) folgt die Behauptung. \square

Korollar 299. Für jede stetige Abbildung $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es ein $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$.

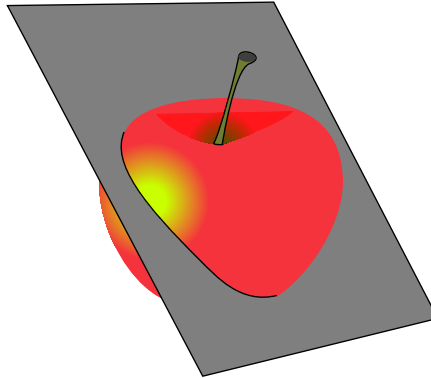
Beweis. Andernfalls wäre $\min_{x \in S^n} \|f(x) - f(-x)\| =: \epsilon > 0$, und man könnte wie im Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer f approximieren durch eine C^∞ -Abbildung $\tilde{f} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\min_{x \in S^n} \|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)\| > \frac{\epsilon}{2}$. Dann ist

$$g(x) := \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)}{\|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(-x)\|}$$

eine ungerade C^∞ -Abbildung $g : S^n \rightarrow S^{n-1} \subset S^n$

Offenbar ist $g(S^n) \neq S^n$ und deshalb ist $\deg(g) = 0$ im Widerspruch zum Antipodensatz. \square

Korollar 300. Man kann einen Apfel durch einen ebenen Schnitt so teilen, dass beide Teile dieselbe Menge an Kalorien, Vitaminen und Schadstoffen enthalten.



Beweis. Wir betrachten den \mathbb{R}^3 als eingebettet in den \mathbb{R}^4 . Seien $k, v, s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Dichteverteilungen der Kalorien, Vitamine bzw. Schadstoffe. Für $x \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$ setzen wir

$$M(x) := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, y \rangle \geq \langle x, e_4 \rangle\} = \{y \mid x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \geq x_4\}.$$

Das ist also ein Halbraum im \mathbb{R}^3 . Wir definieren $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x) := \left(\int_{M(x)} k \, d\mu_3, \int_{M(x)} v \, d\mu_3, \int_{M(x)} s \, d\mu_3 \right)$$

und setzen voraus, dass $f \in C^\infty$. Dann gibt es ein x mit $f(x) = f(-x)$, d.h. von allen drei Ingredienzien liegt genauso viel im Halbraum $M(x)$ wie in seinem Komplement. \square

Korollar 301. Für $m \neq n$ ist \mathbb{R}^m nicht homöomorph zu \mathbb{R}^n .

Beweis. Sei $m < n$. Dann ist die Inklusion $j : S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \subset \mathbb{R}^n$ eine injektive Abbildung. Gäbe es einen Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so wäre $h \circ j : S^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ebenfalls injektiv im Widerspruch zu Korollar 299.

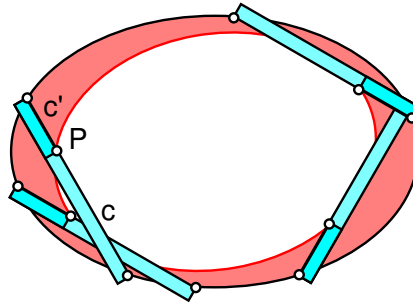
□

Derselbe Beweis liefert: Für $m \neq n$ sind \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n nicht einmal lokal homöomorph. Ist $G \subset \mathbb{R}^m$ offen, nicht leer und homöomorph zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n , so folgt $m = n$.

10.4.8 Der Satz von Holditch

Wir schließen mit einer ebenso „harmlosen“ wie hübschen Anwendung des Satzes von Stokes und der Umlaufzahl auf ein geometrisches Problem in der Ebene.

Satz 302 (Holditch). *A rod CC' of a given length has its two ends in the curve of an ellipse and moved round, having a tracing point P , at the distances c and c' from its ends, tracing a curve. The area contained between the curve and the ellipse $= \pi cc'$, and is therefore independent of the ellipse.*



Der Satz wurde von einem in der Mathematik weiter nicht bekannten Herrn Holditch unter dem Pseudonym „Petrarch“ als „Prize quest XV“ in „The Lady’s and Gentleman’s Diary for the Year of Our Lord 1857“ publiziert. Im nächsten Jahrgang findet man eine „General solution“ des ebenfalls weiter nicht bekannten W.S.B. Woolhouse, mit folgendem Ergebnis:

Let C, C' and P denote the areas of the curves described by those points respectively. Then

$$P = \frac{c'C + cC'}{c + c'} - cc'\pi.$$

In obtaining this remarkable general formula we have assumed the curves to return into themselves and the angle the rod makes with the x -axis to revolve through 2π , but in all other respects the reasoning obviously holds good absolutely. It is not even necessary that the curves described by C, C' should have any algebraic equation. They may, indeed, be any lines drawn at random.

Ich gebe eine moderne Formulierung dieses hübschen Satzes. Siehe auch A. Broman, Holditch’s Theorem, Mathematics Magazine **54**, 1981.

Definition 303. Seien $c, c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschlossene C^∞ -Kurven.

- (i) Setze $\tilde{c}(s, t) := sc_1(t) + (1 - s)c_2(t)$ für $(s, t) \in I^2$ und definiere

$$A(c_1, c_2) := \int_{\tilde{c}} dx \wedge dy.$$

Ist \tilde{c} im wesentlichen injektiv und orientierungstreu, so gibt $A(c_1, c_2)$ die Fläche von $\tilde{c}(I^2)$ an. Deshalb nennt man \tilde{c} die *algebraische Fläche zwischen c_1 und c_2* .

- (ii) Setze

$$A(c) := \int_c x dy = \frac{1}{2} \int_c x dy - y dx.$$

Ist $c : [0, 1] \rightarrow S^1$, so ist also $A(c) = \frac{1}{2} \int_c * \omega^X$.

Lemma 304.

$$A(c_1, c_2) = A(c_1) - A(c_2).$$

Ist insbesondere c_2 konstant, so gilt $A(c_1) = A(c_1, c_2)$, und das ist die von c eingeschlossene algebraische Fläche.

Lemma 305. Definiert man $(c_1 + c_2)(t) := c_1(t) + c_2(t)$, so gilt

$$\begin{aligned} B(c_1, c_2) &:= A(c_1 + c_2) - A(c_1) - A(c_2) \\ &= \int_0^1 (x \circ c_1)(t)(y \circ c_2)'(t) dt + \int_0^1 (x \circ c_2)(t)(y \circ c_1)'(t) dt \end{aligned}$$

Insbesondere ist B in jedem Argument homogen:

$$B(\lambda c_1, c_2) = \lambda B(c_1, c_2) = B(c_1, \lambda c_2).$$

Satz 306 (Holditch/Woolhouse). Seien $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ geschlossene C^∞ -Kurven und $\|c_2 - c_1\| = l > 0$ konstant. Seien $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ mit $l_1 + l_2 = l$ und sei

$$c_3 := c_1 + \frac{l_1}{l}(c_2 - c_1).$$

Dann gilt

$$\frac{l_1 A(c_2) + l_2 A(c_1)}{l} = A(c_3) + n(\gamma, 0)\pi l_1 l_2,$$

wobei $n(\gamma, 0)$ die Umlaufzahl der Kurve

$$\gamma := \frac{c_2 - c_1}{l}$$

(also der „Stabesrichtung“ um 0 ist.

Ist insbesondere $A(c_1) = A(c_2)$, z.B. weil c_1, c_2 (wie bei der ersten Formulierung von Herrn Holditch) bis auf eine Parameterverschiebung dieselbe Kurve sind, so folgt

$$A(c_1, c_3) = A(c_1) - A(c_3) = n(\gamma)\pi l_1 l_2.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} A(c_2) &= A(c_3 + \frac{l_2}{l}(c_2 - c_1)) \\ &= A(c_3) + A(\frac{l_2}{l}(c_2 - c_1)) + B(c_3, \frac{l_2}{l}(c_2 - c_1)) \\ &= A(c_3) + l_2^2 A(\gamma) + l_2 B(c_3, \gamma) \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned} A(c_1) &= A(c_3 - \frac{l_1}{l}(c_2 - c_1)) \\ &= A(c_3) + l_1^2 A(\gamma) - l_1 B(c_3, \gamma), \end{aligned}$$

und daraus folgt durch Elimination von B die Behauptung. \square