THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *UNIVERSITE TOULOUSE III Paul Sabatier*
Discipline ou spécialité : *MATHEMATIQUES FONDAMENTALES*

Présentée et soutenue par *Florian MARTY*
Le *06 juillet 2009*

Titre : *Des Ouverts Zariski et des Morphismes Lisses en Géométrie Relative*

JURY

PR Joseph TAPIA, Membre - PR Vadim SCHECHTMAN, Membre
DR Carlos SIMPSON, Membre - CR Bertrand Toën, Directeur
MCF Gabriele VEZZOSI, Rapporteur – MCF Denis-Charles CISINSKI, Rapporteur

---

Ecole doctorale : *Mathématiques Informatique et Télécommunications de Toulouse*
Unité de recherche : *Institut de Mathématiques de Toulouse - UMR 5219*
Directeur(s) de Thèse : *CR Bertrand Toën*
Rapporteurs : *MCF Gabriele VEZZOSI, MCF Denis-Charles CISINSKI*

Des Immersions Ouvertes et Des Morphismes Lisses en Géométrie Relative

Florian Marty
fmarty@math.ups-tlse.fr
Dirigé par Bertrand Toën

Université Toulouse III - Laboratoire Emile Picard

Table des matières

Remerciements

Cette thèse est l'aboutissement d'un travail de trois ans au cours duquel de nombreuses personnes m'ont soutenues, mathématiquement ou de manière plus personnelle. Ces lignes sont l'occasion de leur rendre hommage.

Tout d'abord, la personne qui fut la plus présente dans ce travail pour m'orienter, me soutenir ou m'encourager au cours de ce voyage dans l'univers des mathématiques, grâce à qui j'ai pu réfléchir trois ans durant sur la géométrie relative - sujet aussi stimulant que plaisant - et sans qui le fruit de ce travail n'aurait pu murir suffisamment vite pour tomber dés à présent du pommier.

Je remercie donc Bertrand Toën, qui m'a dirigé durant ces trois années.

Au cours de ce travail, cette thèse et ma culture mathématique se sont vu étoffés par de nombreuses conversations avec d'autres mathématiciens. A Toulouse, en premier lieu, j'ai pu compter sur la conversation de Mathieu Anel au cours de mon année de D.E.A. mais aussi, quatre ans durant, sur celle de Michel Vaquié. J'ai enfin pu m'appuyer sur mes conversations avec Joseph Tapia, dont le recul, l'expérience et la vision claire de toutes les mathématiques connexes de la théorie des catégories éclairent toujours efficacement la route d'un étudiant en thèse.

Mon travail m'aura aussi conduit vers d'autres universités et d'autres mathématiciens. Je souhaite remercier particulièrement les équipes de Nice S.A. et de Paris VII qui m'ont invité pour parler de mathématiques. En particulier, je remercie André Hirschowitz, Carlos Simpson à Nice, et George Maltsiniotis et Denis-Charles Cisinski à Paris.

Je remercie aussi tous ceux à qui j'ai pu parler à d'autres occasions, lors de mon voyage au fields institute de Toronto ou à sedano mais aussi ceux qui sont venus à Toulouse, en particulier Colas Bardavid qui travaille sur un sujet connexe dans lequel on trouve une question, l'écriture géométrique intrinsèque de la théorie des schémas différentiels, pour laquelle cette thèse fournit une bonne base de réflexion. Je remercie aussi ceux que j'ai croisé plus récemment à Bonn et qui se sont montré intéresses par ce travail, notamment Olivier Lorscheid et Marc Weber.

Durant ces trois ans, mon activité professionnelle à aussi comporté de nombreuse tâches d'enseignement ou de formation qui m'ont permis de faire des mathématiques à un niveau, plus simple, où elles prennent un aspect plus récréatif. Ces moments sont toujours important dans la vie du doctorant pour ne pas perdre confiance et pour qu'il reste convaincu que , contrairement à ce qu'il pourrait s'imaginer, il n'est pas devennu un cancre en mathématique en sortant du D.E.A. . Je remercie tout ceux avec qui j'ai travaillé et en particulier Jacques Sauloy qui proposa un U.V. de modélisation passionnant en L1 et m'y accepta en tant qu'enseignant.

Et comme trois ans de vie, ce ne peux être fait que de recherche et de mathématiques, je tiens aussi à remercier tout ceux qui ont tenu une place importante dans ma vie. En premier lieu , ma famille et en particulier ma femme, Mélanie et nos deux enfants, Paul et Jules.

Parmi ces personnes, je compte aussi tous mes amis et en particulier mon équipe personnelle de soutiens logistique et informatique, Paul Lacoste et Cédric Landet. Il peut y avoir le coeur, la volonté, le talent, les soutiens de vos pères et de ceux qui vous aiment, s'il n'y a pas le bon système d'exploitation et le bon compilateur latex, tu ne peux pas écrire ta thèse.

Je remercie aussi toute l'équipe administrative et technique du laboratoire et des laboratoires qui m'ont accueillis. Je remercie en particulier Jocelyne Picard, Agnès Requis, Patrice Borel et David Bonnafous qui sont les personnes que j'ai le plus sollicité.

Enfin, je remercie tous ceux qui liront cette thèse, et par extension, ceux qui se contenterons de lire les remerciements. Ne rougissez pas, j'ai tenu dans mes mains de nombreuses thèses ces dernières années et j'ai fait de même.

Introduction

Dans cette thèse, nous étudions une théorie géométrique, la géométrie relative, qui trouve son origine dans [TV], et qui prend pour cadre une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$ munie d'hypothèses adéquates que nous appellerons "contexte relatif" (cf section 2). Dans cette théorie, on dispose d'une notion de schéma affine, la catégorie des schémas affine n'étant autre que la catégorie opposée à la catégorie des monoïdes commutatifs dans $\mathcal{C}$. Il existe de plus une topologie de Grothendieck sur la catégorie des monoïdes commutatifs qui permet de les recoller pour former des schémas relatifs à $\mathcal{C}$.

Dans ce degrés de généralité, peu de choses sont connues, néanmoins on s'attend à retrouver une théorie géométrique assez régulière qui permettra non seulement de retrouver la plupart théories connues, telle que la théorie des $\mathbb{Z}$-schémas, la théorie des schémas (pré)-logarithmiques ([KK] et [FK]) mais aussi d'ouvrir la voie à des théories nouvelle ou plus récemment apparues, telle que la théorie des $\mathbb{F}_1$-schémas ([D], [D],[TV],[S][CC]), où $\mathbb{F}_1$ est le corps à un élément ou encore la théorie des $\mathbb{N}$-schémas pour laquelle on nourrit l'espoir d'un lien avec la géométrie tropicale. Notons que le cadre général que l'on se fixe possède des propriété de régularité qui ne se vérifient pas toujours. Un contre exemple que nous expliciterons lorsque nous définiront la notion de contexte relatif est fourni par la théorie des schémas différentiels ([KE]), le problème vient du fait que un produit tensoriel d'anneaux différentiels de présentation finie n'est plus de présentation finie.

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à deux questions. La première est de décrire précisément l'espace topologique de Zariski associé à un schéma affine dont l'existence est prouvée en toute généralité dans [TV]. La seconde est de donner une définition de morphisme lisse relatif, ce qui nécessite un important travail d'algèbre homotopique dont nous expliquerons tant les motivations que les aboutissants.

Nous donnons maintenant des explications détaillées sur ces deux questions. Puis nous discuterons largement des perspectives de ce travail qui l'ont en grande partie motivé.

Des Ouverts Zariski, des Filtres...

Il est prouvé dans [TV] qu'il existe un lieu Zariski associé à un schéma affine X, dont les objets sont les ouverts Zariski de X et que ce lieu admet un espace topologique associé. Néanmoins il ne semble pas aisé de décrire cet espace. Un des principaux problèmes vient de l'absence d'hypothèse d'additivité, qui empêche le raisonnement usuel que nous donnons en section 1.8 dans cette thèse, pour le cas $\mathcal{C} = \mathbb{Z} - mod$ qui est abélien. On contourne cette difficulté en faisant notamment appel à la théorie des faisceaux enrichis de Borceux et Quinteiro. Il est en effet possible d'associer à une schéma une sous catégorie localisante de $A - mod$, i.e. une sous catégorie pleine dont le foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche exact. En rappelant que $A - mod$ n'est autre que la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{B}A$, la catégorie enrichie sur $\mathcal{C}$, à un objet $*$, et dont les endomorphismes de $*$ sont donnés par l'objet $A \in \mathcal{C}$, il vient que l'on fait correspondre à tout ouvert Zariski une sous catégorie de faisceaux, au sens enrichi, de $A - mod$. Il advient alors que ces catégories de faisceaux sont associés à des topologies de Grothendieck au sens enrichi (on a une correspondance bijective, [BQ]) qui ne sont autre que des filtres d'idéaux, caractérisables par des propriétés bien identifiables. Dans un contexte relatif, nous montrons en effet que les structures algébriques usuelles, telles que les idéaux, les idéaux premiers, ou encore les localisations d'un monoïde par un de ses éléments, de même que la notion d'image ou d'ensemble générateur se généralisent. Les filtres que nous auront ainsi mis en évidence seront nommées filtres de Gabriel. On montre en particulier le fait suivant.

Theoreme 1. *Soit $\mathcal{C}$ un contexte relatif. Soit A un monoïde, Spec(B) un ouvert Zariski affine de Spec(A) et F un ouvert de Spec(A). Alors*

- *Le filtre de Gabriel G_B associé à B est quasi-compact primitif.*
- *Le filtre de Gabriel associé à F est localement primitif et il est quasi-compact primitif si F est quasi-compact.*

Un filtre G est quasi-compact pour si tout idéal q du filtre G, G contient un sous idéal finiement engendré de q.

Il est primitif si il est engendré par un seul idéal, plus précisément, G est primitif s'il existe q tel que G soit l'ensemble des idéaux contenant une puissance de q (au sens du produit d'idéaux définit en 2.3.15).

Il est localement primitif s'il est engendré par les éléments d'un seul idéal, plus précisément, G est localement primitif s'il existe q tel que G soit l'ensemble des idéaux de contenant une puissance de chaque élément d'un ensemble générateur de q. La notion d'ensemble générateur est donné en 1.4.25, un élément de f de q est un élément d'un ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(k, q)$ où k est de présentation finie dans $\mathcal{C}$. Une puissance de cet élément est alors un morphisme $k^{\otimes n} \to q$.

On a en particulier les deux faits suivants. Un filtre primitif est localement primitif. Un filtre localement primitif quasi-compact est primitif.

Ce résultat n'est toutefois pas satisfaisant car nous ne savons pas à quelle condition un filtre admet un ouvert Zariski associé. Pour cela nous formulons une hypothèse supplémentaire, celle de la conservativité du foncteur ensemble sous-jacent, définit comme suit

$$(-)_0 : \mathcal{C} \to Ens$$
$$X \to X_0 := Hom_{\mathcal{C}}(1, X)$$

On dit aussi que 1 est générateur. Sous cette hypothèse, les idéaux d'un monoïde A admettent tous des ensembles générateurs dans A_0 et on peut donc les caractériser par leur ensemble sous-jacent q_0. Nous montrons alors la réciproque du théorème précédent et nous pouvons écrire les deux théorèmes suivants.

THEOREME 2. *Soit $\mathcal{C}$ un contexte relatif d'unité génératrice et $Spec(A)$ un schéma affine. Alors les ouverts Zariski de la forme $Spec(A_f)$ forment une base d'ouverts du lieu des ouverts Zariski de $Spec(A)$.*

THEOREME 3. *Soit $\mathcal{C}$ un contexte relatif d'unité génératrice et $Spec(A)$ un schéma affine. Alors les ouverts Zariski de A sont en correspondance bijective avec les filtres de Gabriel localement primitifs. De plus F est un ouvert Zariski quasi-compact de A si et seulement si son filtre associé est quasi-compact.*

Nous travaillons ensuite sur les filtres associés aux ouverts Zariski pour montrer qu'ils sont caractérisés par leurs ensembles d'idéaux premiers. Nous prouvons le théorème suivant.

THEOREME 4. *Soit $\mathcal{C}$ un contexte relatif d'unité génératrice et $Spec(A)$ un schéma affine. Le lieu des ouverts Zariski de $Spec(A)$ est le lieu des ouverts d'un espace topologique sobre $Lp(A)$ dont les points sont les idéaux premiers de A et les ouverts sont les ensembles d'idéaux premiers appartenant au même filtre de Gabriel localement primitif.*

On conclut l'étude de cette première question en citant les exemples connus ou des études similaires ont déjà été effectués et ou le même résultat à été trouvé. Il s'agit du cas usuel des $\mathbb{Z}$-schémas, du cas des $\mathbb{F}_1$-schéma ([D]) ou encore du cas des schémas différentiels.

Et des Morphismes Lisses

Nous nous intéressons ensuite à la question de la notion de morphisme lisse dans un contexte relatif. L'idée qui permet de construire la définition que nous recherchons, vient du fait que l'on sait relier la lissité dans les anneaux à des propriétés d'algèbre homologique. Il s'agit par ailleurs du point de vue adopté par Kontsevitch pour parler de lissité en géométrie non commutative, pour des *dg*-algèbres. Ces propriétés peuvent alors être traduites dans le langage de l'algèbre homotopique par l'intermédiaire de l'équivalence de Dold-Kan. Nous écrivons le théorème suivant, qui exprime la lissité en terme d'algèbre homologique

THEOREME 5. *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux. Il est lisse si et seulement si*

- ◇ *L'anneau B est de présentation finie dans $A - alg$.*
- ◇ *L'anneau B est plat sur A.*
- ◇ *L'anneau B est un complexe de $B \otimes_A B$-modules parfait.*

La définition générale de lissité que nous donnons est quant à elle exprimée en terme d'algèbre homotopique. Cela signifie que pour un contexte relatif $\mathcal{C}$, nous considérons la catégorie des objets simpliciaux dans $\mathcal{C}$, $s\mathcal{C} := \mathcal{C}^{\Delta^{op}}$. Les catégories de modules et d'algèbres dans cette catégorie simpliciales sont aussi notées avec un préfixe s. Dans le cas, $\mathcal{C} = \mathbb{Z} - mod$, on a une équivalence (de Dold-Kan) entre $sA - mod$ et les complexes de chaîne de A-modules en degrés positifs qui induit une équivalence sur les structures de modèles dont sont munies ces catégories. Dans le cas relatif, on munie la catégorie $s\mathcal{C}$ (et ses catégories de modules et d'algèbres) définie à partir du contexte relatif d'une structure de catégorie de modèles monoïdale, en formulant une hypothèse de monadicité sur une catégorie $sEns^J$ où J est un ensemble.

On rappelle qu'une A-algèbre B est homotopiquement de présentation finie dans $A - mod$ (resp $A - alg$), si le foncteur

$$Map_{A-mod}(B,-) \text{ (resp } Map_{A-alg}(B,-))$$

commute aux colimites homotopiques filtrantes.

Pour donner une définition relative de lissité, nous remplaçons les propriétés de finitudes par des propriétés de finitude homotopique, mieux adaptées. Nous choisissons de ne pas généraliser naïvement la platitude mais de la remplacer par une hypothèse de Tor-dimension nulle. Rappelons qu'il y a équivalence entre les deux pour $\mathcal{C} = \mathbb{Z}-mod$, cependant cette équivalence ne se prolonge pas au cas général d'un contexte relatif. Ce choix vient du fait que l'on constate dans la catégorie des ensembles qu'aucun monoïde commutatif n'est plat sur $\mathbb{F}_1$, et on s'attend donc à ce que les morphismes lisses que nous étudierons ne soient en général pas plats. La définition de lissité s'écrit

DEFINITION 1. *Soit $\mathcal{C}$ un contexte relatif. Soit $u : A \to B$ un morphisme de monoïdes commutatifs dans $\mathcal{C}$, alors u est lisse si*

- ▷ *Le monoïde commutatif B est homotopiquement présentation finie dans $sA - alg$.*
- ▷ *Le monoïde commutatif B est de Tor Dimension nulle sur A.*
- ▷ *Le monoïde commutatif B est homotopiquement de présentation finie dans $sB \otimes_A B - mod$.*

De plus, si u ne vérifie que la troisième propriété énoncée ci-dessus, on dit qu'il est formellement lisse.

Pour l'équivalence de cette définition avec la lissité usuelle dans $\mathbb{Z} - mod$, on se réfère notamment à [HAGII] où il est prouvé qu'un morphisme d'anneaux homotopiquement de présentation finie est de présentation finie et qu'un morphisme lisse est homotopiquement de présentation finie. On sait aussi que la platitude est équivalente à la Tor-Dimension nulle pour les anneaux. Enfin, il est dit dans [HAGII] que la correspondance de Dold-Kan induit en particulier une correspondance entre complexes parfaits de modules et modules simpliciaux homotopiquement de présentation finie.

Nous avons donc définit une notion de lissité qui généralise la notion de morphisme d'anneaux lisse. Nous avons aussi montré que cette notion était stable par composition et pushouts homotopiques d'algèbres. Nous avons choisi dans la suite de la thèse de nous intéresser à la recherche d'exemples de morphismes lisses. Cette recherche nous a amené en particulier à étudier la théorie cohomologique des préfaisceaux simpliciaux. Nous donnons en particulier un résultat pratique, la proposition 3.2.34 permettant de mettre en évidence des objets formellement lisses au sens définit ci-dessus, pour le contexte $\mathcal{C} = Ens$. C'est en effet la propriété dont il est le plus difficile de vérifier la validité. Nous expliquons aussi comment les morphismes formellement lisses ou homotopiquement de présentation finie (dans les algèbres) du contexte Ens donnent par changement de base des morphismes respectivement formellement lisses ou homotopiquement de présentation finie dans le contexte $\mathcal{C}$. En particulier, on a le théorème suivant (4.3.6)

THEOREME 6. *La droite affine, $* \to \mathbb{N}$, du contexte $(Ens, \times, \mathbb{F}_1)$ est lisse.*

et cela implique notamment que la droite affine est lisse dans tout contexte ou elle est de Tor dimension nulle.

Perspectives

Plusieurs questions suivant le cours du travail présenté dans cette thèse. Tout d'abord, on peut constater que dans la première partie, on a associé à un schéma affine un espace topologique que l'on va pouvoir munir d'un faisceaux structurel. Il sera alors intéressant de montrer que cet espace muni de ce faisceaux définit dans le cadre relatif permet de retrouver les définitions déjà existantes données dans plusieurs contextes connus tel que celui de la géométrie sur $\mathbb{F}_1$ (notamment [D]), ou de la log-géométrie.

Une multitude d'exemples de contexte s'offrent alors à nous et nécessitent chacun une étude particulière. Il serait intéressant de retrouver les *log* schémas et de réduire le théorème valable pour les prélog schémas à ceux-ci, voire de formaliser la question pour en tirer un résultat plus général, i.e. une notion de contexte où l'on restreint la classe des schémas affines. Nous pouvons aussi tenter de montrer un analogue de ce premier théorème dans le contexte différentiel. Ce dernier contexte est en effet très classique mais peut étudier de manière géométrique intrinsèque. Le fait qu'il ne soit pas aussi régulier qu'un contexte géométrique en fait un exemple intéressant où aspect géométrique de l'espace Zariski associé reste encore à comprendre. On peut encore de s'intéresser plus en détail au contexte des schémas au dessus du corps à un élément qui est une source d'applications comme une source d'inspiration pour des énoncés plus généraux. Enfin, ose poser la question de l'existence d'un lien entre géométrie tropicale et géométrie au dessus de $\mathbb{N}$.

Les mêmes questions se posent aussi pour la notion de lissité. Il serait intéressant de la comparer aux notions déjà existantes, notamment dans le contexte logarithmique ([FK]). Mais la priorité est sans doute d'étudier la lissité des exemples connus donnés dans [TV]. Le développement d'outils de calculs supplémentaires tels que le complexe cotangent relatif s'avèrera certainement indispensable pour comparer mieux cerner la lissité, probablement dans des contextes additifs. A ce sujet Jacob Lurie donne une définition très générale dans ses travaux, dont l'idée d'origine peut s'appliquer ici. Cela est basé sur une équivalence de catégorie bien connue, vraie dans le cas abélien, entre $B - mod$ et $Ab(Comm(\mathcal{C})/B)$ (la catégorie des objets en groupe abélien dans $Comm(\mathcal{C})/B$) pour un monoïde commutatif B. Le complexe cotangent $L_{B/A}$ est construit en remarquant que si $A \to B$ est un morphisme de monoïdes commutatifs, alors $B \in A - alg/B$ donc $B \otimes_A B \in B - alg/B$. On prend donc l'image de $B \otimes_A B$ par le foncteur abélianisation. Il est alors connu que si on a travaillé dans $\mathbb{Z} - mod$, on retrouve le module des différentielles de Kähler, et si on a travaillé dans $s\mathbb{Z} - mod := \mathbb{Z} - mod^{\Delta^{op}}$, on retrouve le complexe cotangent pour les anneaux. La question est alors de savoir quelle propriété vérifie le complexe cotangent d'un morphisme lisse et si l'on peut caractériser la lissité à partir de propriétés vérifiées par le complexe cotangent. Enfin, il faut comparer ce complexe cotangent relatif à ceux déjà définis dans les contextes cités précédemment.

Il reste aussi, de manière plus générale, de nombreuses question à étudier, la lissité des ouverts Zariski, la localité (ou pas) des morphismes lisses, le lien avec d'autres points de vue tels que les extensions infinitésimales. sur cette dernière question, il faudrait déterminer quelles sont les hypothèses nécessaire à l'existence de tels objets. Il est apparut aussi au cours de ce travial qu'il serait sans doute possible de donner une définition de morphisme lisse un peu plus faible en supposant seulement la Tor dimension finie et en se référant à une conjecture de Quillen sur le complexe cotangent ([Q]) prouvée par Avramov. Cette remarque est une preuve supplémentaire de l'importance du complexe cotangent dans un contexte additif et de son potentiel dans des contextes additifs, et pourquoi pas dans contextes semi-additifs ou généraux.

La notion de morphisme lisse définie dans cette thèse est un premier pas dans la construction d'une théorie relative des champs algébriques (au sens de Artin). Il semble assez naturel de se tourner alors vers la théories des infini champs de Bertrand Toën et Gabriele Vezzosi dans [HAGII]. Une telle théorie a potentiellement un immense champ d'actions et d'applications, en particulier dans l'étude des problèmes de modules et ce dans chaque contexte cité précédemment.

La notion de lissité mène enfin à une notion de morphisme étale. Un morphisme étale dans les anneaux peut en effet être regardé comme un morphisme lisse à diagonale lisse. Cela ouvre la voie à la construction d'une notion de topologie étale en géométrie relative mais aussi à toutes sorte de mathématiques dans lesquelles la notion de morphisme étale est essentielle, ne serait-ce que par exemple que la théorie de Galois des schémas.

Chapitre 1

Structures Catégoriques

1.1 Généralités

Nous débuterons cette grande partie de rappels par quelques définitions et lemmes utiles sur les catégories.

Definition 1.1.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie

- ▷ La catégorie $\mathcal{C}$ est dite complète si elle admet des limites petites.
- ▷ La catégorie $\mathcal{C}$ est dite cocomplète si elle admet des colimites petites.
- ▷ La catégorie $\mathcal{C}$ est dite bicomplète si elle est complète et cocomplète.

Definition 1.1.2. Conditions de finitudes

i. Soient $\mathcal{D}$ une catégorie cocomplète , $X \in \mathcal{D}$, on dit que X est de présentation finie dans $\mathcal{D}$ si le foncteur $Hom_{\mathcal{D}}(X, -)$ commute aux colimites filtrantes dans $\mathcal{D}$.

ii. Soient $\mathcal{D}$ une catégorie cocomplète , $u : X \to Y \in \mathcal{D}$, on dit que u est de présentation finie si Y est de présentation finie dans $X/\mathcal{D}$.

Lemme 1.1.3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie bicomplète. On suppose que les colimites filtrantes sont exactes dans $\mathcal{C}$, alors les objets de présentation finie sont stables par colimite finie.*

Preuve
Soient $\mathcal{I}$ une catégorie finie et $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tel que $F(i)$ soit de présentation finie pour tout i dans $\mathcal{I}$. Soient $\mathcal{J}$ une petite catégorie filtrante et $G : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. On a

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(Colim_{i\in\mathcal{I}}F(i), Colim_{j\in\mathcal{J}}G(j)) &\backsimeq Lim_{i\in\mathcal{I}}Hom_{\mathcal{C}}(F(i), Colim_{j\in\mathcal{J}}G(j)) \\ &\backsimeq Lim_{i\in\mathcal{I}}Colim_{j\in\mathcal{J}}Hom_{\mathcal{C}}(F(i), G(j)) \\ &\backsimeq Colim_{j\in\mathcal{J}}Lim_{i\in\mathcal{I}}Hom_{\mathcal{C}}(F(i), G(j)) \\ &\backsimeq Colim_{j\in\mathcal{J}}Hom_{\mathcal{C}}(Colim_{i\in\mathcal{I}}F(i), G(j)) \end{aligned}$$

♦

Corollaire 1.1.4. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie bicomplète. On suppose que les colimites filtrantes sont exactes dans $\mathcal{C}$, alors les morphismes de présentation finie de source X sont stables par colimite finie dans $X/\mathcal{C}$. Plus précisément, si $\mathcal{I}$ est un diagramme fini et $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ un foncteur tel que pour tout $i \in \mathcal{I}$, $F(i)$ est de présentation finie dans $X/\mathcal{C}$ alors $Colim(F)$ est de présentation finie dans $X/\mathcal{C}$.*

Remarque 1.1.5. Dans une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{D}$, où il existera deux notions de morphismes de monoïdes de présentation finie (une dans la catégorie elle même et une dans la catégorie des monoïdes commutatifs), on emploiera le terme d'objet *compact* pour désigner un objet de présentation finie dans la catégorie $\mathcal{D}$ elle même.

Lemme 1.1.6. *Soient X, Y dans $\mathcal{C}$ et i et s deux morphismes tels que $i : X \to Y$, $s : Y \to X$ et $i \circ s = Id_Y$ alors si i est un monomorphisme ou si s est un épimorphisme, s et i sont des isomorphismes.*

Preuve
Supposons que i soit un monomorphisme. Soit $Z \in \mathcal{C}$, on a des morphismes d'ensembles induits:

$$(i \circ -)_Z : Hom_{\mathcal{C}}(Z,X) \to Hom_{\mathcal{C}}(Z,Y)$$
$$(s \circ -)_Z : Hom_{\mathcal{C}}(Z,Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)$$

De plus i étant un monomorphisme, l'évaluation en Z $(i \circ -)_Z$ de la transformation naturelle $(i \circ -)$ est injective, et $(i \circ -)_Z \circ (s \circ -)_Z(f) = i \circ s \circ f = f$ d'où $(i \circ -)_Z$ surjective. On a donc que pour tout Z, $(i \circ -)_Z$ est une bijection. Par conséquent la famille des $(i \circ -)_Z$ définit un isomorphisme fonctoriel de h_X dans h_Y image de i par le foncteur de Yoneda (de $\mathcal{C}^{op}$). Comme ce dernier est pleinement fidèle, il est conservatif et donc i est un isomorphisme. La démonstration de l'autre cas est identique.

♦

1.2 Catégories Monoïdales Symétriques

Dans un premier temps, nous allons expliciter la structure de base sur laquelle nous allons travailler, c'est à dire pour commencer, la structure monoïdale. C'est ce point de vue catégorique qui permet une généralisation de la théorie des schémas et se pose en base de la géométrie relative.

Definition 1.2.1. Une catégorie monoïdale symétrique est la donnée d'un triplet $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ muni des structures suivantes:

i. Une catégorie $\mathcal{C}$.

ii. Un foncteur produit tensoriel $- \otimes - : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

iii. Un objet identité 1 dans $\mathcal{C}$ pour le produit tensoriel.

iv. Pour $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, des isomorphismes fonctoriels :

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$$
$$l_X : 1 \otimes X \to X$$
$$r_X : X \otimes 1 \to X$$
$$S(X,Y) : X \otimes Y \to Y \otimes X$$

Tels que les diagrammes suivants commutent $\forall X, Y, W, Z \in \mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
 & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "a_{W,X,Y\otimes Z}"] & \\
((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z) \arrow[ur, "a_{W\otimes X,Y,Z}"] \arrow[d, "a_{W,X,Y}\otimes Id_z"] & & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \\
(W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[rr, "a_{W,X\otimes Y,Z}"] & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[u, "Id_W \otimes A_{X,Y,Z}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes 1) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,1,Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes Id_Y"'] & & X \otimes (1 \otimes Y) \arrow[dl, "Id_X \otimes l_Y"] \\
 & (X \otimes Y) &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
X \otimes 1 \arrow[rr, "S(X,1)"] \arrow[dr, "r_X"'] & & 1 \otimes X \arrow[dl, "l_X"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[rr, "S(X,Y)"] \arrow[dr, "Id(X\otimes Y)"'] & & Y \otimes X \arrow[dl, "S(Y,X)"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "S(X\otimes Y,Z)"] \arrow[d, "a_{X,Y,Z}"'] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[d, "a^{-1}_{Z,Y,X}"] \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "Id_X \otimes S(Y,Z)"'] & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[d, "S(Z,X)\otimes Id_Y"] \\
X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "a^{-1}_{X,Z,Y}"'] & (X \otimes Z) \otimes Y
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "S(X,Y\otimes Z)"] \arrow[d, "a^{-1}_{X,Y,Z}"'] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[d, "a_{Y,Z,X}"] \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "S(X,Y)\otimes Id_Z"'] & Y \otimes (Z \otimes X) \arrow[d, "Id_Y \otimes S(Z,X)"] \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "a_{Y,X,Z}"'] & Y \otimes (X \otimes Z
\end{tikzcd}$$

Definition 1.2.2. Un foncteur monoïdal faible symétrique de $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ dans $(\mathcal{C}', \odot, 1')$ est la donnée

i. D'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$.

ii. Pour tout couple $(X,Y) \in \mathcal{C}$, d'un morphisme $S_F(X,Y) : F(X) \odot F(Y) \to F(X \otimes Y)$.

iii. D'un morphisme $1_f : 1' \to F(1)$.

Tels que, pour $X, Y, Z \in \mathcal{C}$, les diagrammes suivant commutent

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \odot F(Y)) \odot F(Z) \arrow[r, "S_F(X,Y) \odot Id"] \arrow[d, "a_{F(X),F(Y),F(Z)}"'] & F(X \otimes Y) \odot F(Z) \arrow[r, "S_F(X \otimes Y, Z)"] & F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[d, "F(a_{X,Y,Z})"] \\
F(X) \odot (F(Y) \odot F(Z)) \arrow[r, "Id \odot S_F(Y,Z)"'] & F(X) \odot F(Y \otimes Z) \arrow[r, "S_F(X, Y \otimes Z)"'] & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1' \odot F(X) \arrow[r, "l_{F(X)}"] \arrow[d, "1_F \odot Id"'] & F(X) \\
F(1) \odot F(X) \arrow[r, "S_F(1,X)"'] & F(1 \otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \odot 1' \arrow[r, "r_{F(X)}"] \arrow[d, "Id \odot 1_F"'] & F(X) \\
F(X) \odot F(1) \arrow[r, "S_F(X,1)"'] & F(X \otimes 1) \arrow[u, "F(r_X)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \odot F(Y) \arrow[r, "S_F(X,Y)"] \arrow[d, "S(F(X),F(Y))"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "F(S(X,Y))"] \\
F(Y) \odot F(X) \arrow[r, "S_F(Y,X)"'] & F(Y \otimes X)
\end{tikzcd}$$

Definition 1.2.3. Un foncteur monoïdal fort symétrique est la donné d'un foncteur monoïdal faible symétrique F dont les morphismes structurels 1_F et S_F sont des isomorphismes.

La complexité de ces définitions est contrebalancée par le théorème de cohérence de Mc Lane, pour lequel nous nous référons à [McL], qui permet de considérer les isomorphismes structurels d'associativité et d'unité comme des égalités pour vérifier des propriétés stables par équivalences de catégories.

THEOREME 1.2.4. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale, alors elle est équivalente, via deux foncteurs monoïdaux forts à une catégorie monoïdale stricte, i.e. où les morphismes d'associativité et d'unité sont des identités.*

Dans la suite, pour toutes les démonstrations concernant des propriétés stables par équivalences, on pourra donc se restreindre sans perte de généralités au cas d'une catégorie monoïdale où les morphismes d'associativité et d'unité seront des identités. On conservera parfois les notations utilisées pour les morphismes d'unité qui clarifient des détails techniques et facilite la rédaction au cours de certaines démonstrations. En réalité, l'apport de cette démarche, notamment au niveau de la lisibilité, vient surtout de la possibilité de considérer les morphismes d'associativité comme des identités. Pour certaines démonstration, il ne sera pas possible de se ramener à des identités et il est utile de rappeler le théorème suivant que l'on peut trouver dans [McL].

THEOREME 1.2.5. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique. Pour tout n-uplet $(X_i)_{i=1..n}$ d'objets de $\mathcal{C}$ et tout couple de mots (v, w) de longueur n formés des X_i, il existe un unique morphisme naturel de permutation $\sigma : v \to w$ obtenue à partir du morphisme de symétrie.*

Les catégories monoïdales que nous considèrerons, auront pour l'essentiel les propriétés définies ci-dessous.

Definition 1.2.6. Une catégorie monoïdale est dite fermée si pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$, le foncteur:

$$\begin{gathered}
\mathcal{C}^{op} \to Ens \\
Z \to Hom_{\mathcal{C}}(Z \otimes X, Y)
\end{gathered}$$

est représentable par un objet $\underline{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \in \mathcal{C}$.

Cette dernière propriété trouve une utilité pratique immédiate dans le lemme suivant.

Lemme 1.2.7. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique fermée. Alors le produit tensoriel est distributif par rapport aux colimites petites.*

Preuve
Soit $\mathcal{J}$ un diagramme petit. Soit X, Y des objets de $\mathcal{C}$. Alors

$$\begin{aligned}
Hom_{\mathcal{C}}(colim_{\mathcal{J}} Z_i \otimes X, Y) &\backsimeq Hom_{\mathcal{C}}(colim_{\mathcal{J}} Z_i, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) \\
\backsimeq lim_{\mathcal{J}} Hom_{\mathcal{C}}(Z_i, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)) &\backsimeq Hom_{\mathcal{C}}(colim_{\mathcal{J}}(Z_i \otimes X), Y)
\end{aligned}$$

♦

Nous allons maintenant décrire plus précisément les structures des objets d'une catégorie monoïdale: monoïdes commutatifs et modules. Ce sera précisément la catégorie des monoïdes commutatifs qui jouera le rôle de catégorie des schémas affines.

Definition 1.2.8. Un monoïde commutatif dans $\mathcal{C}$ est la donnée de :

i. Un objet A

ii. Un morphisme $m_A : A \otimes A \to A$

iii. Un morphisme $i_A : 1 \to A$

tels que les diagrammes suivant commutent:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \otimes 1 \arrow[dl, "r_A"'] \arrow[dr, "Id_A \otimes i_A"] & \\
A & & A \otimes A \arrow[ll, "m_A"] \\
 & 1 \otimes A \arrow[ul, "l_A"] \arrow[ur, "i_A \otimes Id_A"'] &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "s(A,A)"] \arrow[dr, "m_A"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m_A"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "Id_A \otimes m_A"] \arrow[d, "(m_A \otimes IdA) \circ a^{-1}_{A,A,A}"'] & A \otimes A \arrow[d, "m_A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m_A"'] & A
\end{tikzcd}
$$

Definition 1.2.9. Un morphisme u de monoïdes de A dans B est un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que les diagrammes suivants commutent:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "i_A"'] & 1 \arrow[d, "i_B"] \\
A \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "u \otimes u"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
A \arrow[r, "u"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Definition 1.2.10. Soit A un monoïde commutatif dans $\mathcal{C}$, Un A-module est la donnée de:

i. Un objet $M \in \mathcal{C}$

ii. Un morphisme $\mu_M : A \otimes M \to M$

Tels que les diagrammes suivant commutent:

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes M \arrow[r, "m_A \otimes Id_M"] \arrow[d, "(Id_A \otimes \mu_M) \circ (a_{A,A,M})"'] & A \otimes M \arrow[d, "\mu_M"] \\
A \otimes M \arrow[r, "\mu_M"'] & M
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
1 \otimes M \arrow[rr, "i_A \otimes Id_M"] \arrow[dr, "l_M"'] & & A \otimes M \arrow[dl, "\mu_M"] \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

Notons que les diagrammes commutatifs ci-dessus, implique pour tout monoïde commutatif A dans $\mathcal{C}$ et pour tout A-module M que le diagramme suivant est aussi commutatif

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes 1 \arrow[rr, "Id_M \otimes i_A"] \arrow[dr, "r_M"'] & & M \otimes A \arrow[dl, "\mu_M \circ S(M,A)"] \\
 & M &
\end{tikzcd}
$$

Definition 1.2.11. Un morphisme u de A-module de M dans N est un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que le diagramme suivant commute:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "Id_A \otimes u"] \arrow[d, "\mu_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\mu_N"] \\
M \arrow[r, "u"'] & N
\end{tikzcd}
$$

Definition 1.2.12. On notera $Comm(\mathcal{C})$ la catégorie des monoïdes commutatifs dans $\mathcal{C}$ et $A - mod$ la catégorie des A-modules dans $\mathcal{C}$ pour A dans $Comm(\mathcal{C})$.

Remarque 1.2.13. La définition de module donnée ici est en fait la définition de module à droite. On a de même une définition de module à gauche. La catégorie $\mathcal{C}$ étant symétrique, ces deux catégories sont isomorphes. Cela explique pourquoi nous parlons de la catégorie des modules, sans préciser s'il s'agit de module à gauche ou à droite. Chacun de ces modules est muni d'une structure de module à gauche comme d'une structure de module à droite. La multiplication de module à gauche est obtenue en composant avec l'isomorphisme structurel de symétrie à partie de la multiplication à droite. Par abus de notation, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïtés, nous noterons ces deux multiplications de la même manière, i.e. μ_M pour un module M.

On démontre d'abord la proposition suivante.

Proposition 1.2.14. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale fermée*

- ◇ *Si $\mathcal{C}$ est complète alors pour tout A dans $Comm(\mathcal{C})$, $A-mod$ est complète.*
- ◇ *Si $\mathcal{C}$ est cocomplète alors pour tout A dans $Comm(\mathcal{C})$, $A-mod$ est cocomplète.*
- ◇ *Si $\mathcal{C}$ est complète alors $Comm(\mathcal{C})$ est complète.*
- ◇ *Si $\mathcal{C}$ est cocomplète alors $Comm(\mathcal{C})$ est cocomplète.*

Preuve

Ces propriétés sont stables par équivalence, on se ramène donc pour commencer au cas où les morphismes structurels sont des identités. On en fera apparaître certain par commodité lors de la rédaction en les notant de manière usuelle, chacun d'entre eux étant égal à un morphisme identité.

- Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$, le foncteur d'oubli i de $A-mod$ dans $\mathcal{C}$ créé les limites petites.

  En effet, soit $F : \mathcal{I} \to A-mod$ un foncteur d'une catégorie petite $\mathcal{I}$ dans $A-mod$. Il nous faut munir $M := lim(i \circ F)$ dans $\mathcal{C}$ d'une structure A-module telle que les morphismes naturels $M \to F(j)$ soient des morphismes de A-modules. On a $M \otimes A = lim_{j\in\mathcal{I}}(i \circ F(j)) \otimes A$. Les morphismes naturels

$$lim_{j\in\mathcal{I}}(i \circ F(j)) \otimes A \to F(j) \otimes A \to F(j)$$

  induisent donc un morphisme $\mu_M : M \otimes A \to M$. De plus, pour $j \in \mathcal{I}$, les diagrammes suivants, commutatifs dans $\mathcal{C}$, montrent que ce morphisme fait bien de M un A-module et que les morphismes $M \to F(j)$ sont bien des morphismes de A-modules.

$$\begin{tikzcd}
M\otimes A\otimes A \arrow[drrr, bend left, "Id_M\otimes m_A"] \arrow[dr] \arrow[dddrr, bend right, "\mu_M\otimes Id_A"'] & & & \\
& F(j)\otimes A\otimes A \arrow[r, "Id_{F(j)}\otimes m_A"] \arrow[d, "\mu_{F(j)}\otimes Id_A"'] & F(j)\otimes A \arrow[d, "\mu_{F(j)}"] & M\otimes A \arrow[l] \arrow[d, "\mu_M"] \\
& F(j)\otimes A \arrow[r, "\mu_{F(j)}"'] & F(j) & M \arrow[l] \\
& & M\otimes A \arrow[ul] \arrow[ur, "\mu_M"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr] & & & & M\otimes 1 \arrow[llll, "r_M"'] \arrow[dl] \arrow[dddll, bend left, "Id_M\otimes i_A"] \\
& F(j) & & F(j)\otimes 1 \arrow[ll, "r_{F(j)}"'] \arrow[dl, "Id_{F(j)}\otimes i_A"] & \\
& & F(j)\otimes A \arrow[ul, "\mu_{F(j)}"] & & \\
& & M\otimes A \arrow[u] \arrow[uuull, bend left, "\mu_M"] & &
\end{tikzcd}$$

  On en conclut donc que la limite de F dans $A-mod$ est représentable et que $lim(i \circ F) \simeq lim(F)$ dans $\mathcal{C}$.

  ♦

- Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$, le foncteur d'oubli i de $A-mod$ dans $\mathcal{C}$ créé les colimites petites.

  En effet, soit $F : \mathcal{I} \to A-mod$ un foncteur d'une catégorie petite $\mathcal{I}$ dans $A-mod$. Il nous faut munir $M := Colim(i \circ F)$ dans $\mathcal{C}$ d'une structure A-module telle que les morphismes naturels $F(j) \to M$ soient des morphismes de A-modules. On a $M \otimes A = Colim_{j\in\mathcal{I}}(i \circ F(j)) \otimes A \simeq Colim_{j\in\mathcal{I}}(i(F(j) \otimes A))$ d'aprés 1.2.7. Les morphismes naturels $\mu_{F(j)}F(j) \otimes A \to F(j) \to Colim_{j\in\mathcal{I}} i \circ F(j) = M$ induisent donc un morphisme $\mu_M : M \otimes A \to M$. De plus, pour $j \in \mathcal{I}$, les diagrammes suivants, commutatifs dans $\mathcal{C}$, montrent que ce morphisme fait bien de M un A-module et que les morphismes $F(j) \to M$ sont bien des morphismes de A-modules.

$$
\begin{tikzcd}
M\otimes A\otimes A \arrow[drrr, bend left, "Id_M\otimes m_A"] \arrow[dddrr, bend right, "\mu_M\otimes Id_A"'] & & & \\
& F(j)\otimes A\otimes A \arrow[ul] \arrow[r, "Id_{F(j)}\otimes m_A"] \arrow[d, "\mu_{F(j)}\otimes Id_A"'] & F(j)\otimes A \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{F(j)}"] & M\otimes A \arrow[d, "\mu_M"] \\
& F(j)\otimes A \arrow[r, "\mu_{F(j)}"'] \arrow[dr] & F(j) \arrow[r] & M \\
& & M\otimes A \arrow[ur, "\mu_M"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
M & & & & M\otimes 1 \arrow[llll, "r_M"] \arrow[dddll, bend left, "Id_M\otimes i_A"] \\
& F(j) \arrow[ul] & & F(j)\otimes 1 \arrow[ll, "r_{F(j)}"'] \arrow[ur] \arrow[dl, "Id_{F(j)}\otimes i_A"] & \\
& & F(j)\otimes A \arrow[ul, "\mu_{F(j)}"] \arrow[d] & & \\
& & M\otimes A \arrow[uuull, bend left, "\mu_M"] & &
\end{tikzcd}
$$

On en conclut donc que la colimite de F dans $A-mod$ est représentable et que $Colim(i\circ F)\simeq Colim(F)$ dans $\mathcal{C}$.

♦

- Le foncteur d'oubli de $Comm(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{C}$, que nous appellerons toujours i par commodité, crée les limites petites.

  En effet, soit $F:\mathcal{I}\to Comm(\mathcal{C})$ un foncteur d'une catégorie petite $\mathcal{I}$ dans $Comm(\mathcal{C})$. Il nous faut munir $A:=lim(i\circ F)$ dans $\mathcal{C}$ d'une structure monoïde commutatif telle que les morphismes naturels $A\to F(j)$ soient des morphismes de monoïdes commutatifs. On a $A\otimes A=lim(i\circ F)\otimes lim(i\circ F)$. Les morphismes naturels

$$lim(i\circ F)\otimes lim(i\circ F)\to F(j)\otimes F(j)\to F(j)$$

  induisent donc un morphisme $m_A:A\otimes A\to A$. Le morphisme d'unité $i_A:1\to A$ est quant à lui induit naturellement par les morphismes $i_{F(j)}:1\to F_j$. De plus, pour $j\in\mathcal{I}$, les diagrammes suivants, commutatifs dans $\mathcal{C}$, montrent que ces morphismes font bien de A un monoïde commutatif et que les morphismes $A\to F(j)$ sont bien des morphismes de monoïdes commutatifs.

$$
\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[dr] \arrow[drrr, bend left, "Id_A\otimes m_A"] \arrow[dddrr, bend right, "m_A\otimes Id_A"'] & & & \\
& F(j)\otimes F(j)\otimes F(j) \arrow[r, "Id_{F(j)}\otimes m_{F(j)}"] \arrow[d, "m_{F(j)}\otimes Id_{F(j)}"'] & F(j)\otimes F(j) \arrow[d, "m_{F(j)}"] & A\otimes A \arrow[l] \arrow[d, "m_A"] \\
& F(j)\otimes F(j) \arrow[r, "m_{F(j)}"'] & F(j) & A \arrow[l] \\
& & A\otimes A \arrow[ul] \arrow[ur, "m_A"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[dr] & & & & A\otimes 1 \arrow[llll, "r_A"] \arrow[dl] \arrow[dddll, bend left, "Id_A\otimes i_A"] \\
& F(j) & & F(j)\otimes 1 \arrow[ll, "r_{F(j)}"'] \arrow[dl, "Id_{F(j)}\otimes i_{F(j)}"] & \\
& & F(j)\otimes F(j) \arrow[ul, "\mu_{F(j)}"] & & \\
& & A\otimes A \arrow[u] \arrow[uuull, bend left, "m_A"] & &
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr] & & & & 1 \otimes A \arrow[llll, "l_A"'] \arrow[dl] \arrow[ddll, bend left, "i_A \otimes Id_A"] \\
& F(j) & & 1 \otimes F(j) \arrow[ll, "l_{F(j)}"'] \arrow[dl, "i_{F(j)} \otimes Id_{F(j)}"] & \\
& & F(j) \otimes F(j) \arrow[ul, "\mu_{F(j)}"] & & \\
& & A \otimes A \arrow[u] \arrow[uuull, bend left, "m_A"] & &
\end{tikzcd}$$

On en conclut donc que la limite de F dans $A - mod$ est représentable et que $lim(i \circ F) \simeq lim(F)$ dans $\mathcal{C}$.

♦

- Pour la cocompetude, nous allons commencer par montrer que le foncteur d'oubli i créé les colimites filtrantes. Soit $F : \mathcal{I} \to Comm(\mathcal{C})$ un foncteur d'un diagramme filtrant petit $\mathcal{I}$ dans $Comm(\mathcal{C})$. Il suffit de montrer que $B := Colim_{\mathcal{I}} i \circ F$ est un monoïde et que les morphismes naturels $F(j) \to B$ sont des morphismes de monoïde. Pour cela remarquons que $B \otimes B = Colim_{j \in \mathcal{I}} F(j) \otimes Colim_{k \in \mathcal{I}} F(k) \simeq Colim_{j,k \in \mathcal{I}^2} F(j) \otimes F(k)$ d'après 1.2.7. Or $\mathcal{I}$ étant filtrant, pour tout couple (j,k), il existe l tel que $j \to l$ et $k \to l$ on a donc $F(j) \otimes F(k) \to F(l) \otimes F(l)$. Notons $C := Colim_{l \in I} F(l) \otimes F(l)$, on a alors par propriété universelle de la colimite qu'il existe un morphisme $B \otimes B \to C$ et un morphisme $C \to B \otimes B$. Leur composition sur $B \otimes B$ (resp sur C) est l'unique endomorphisme commutant avec les morphismes $F(j) \otimes F(k) \to B \otimes B$, $k, j \in \mathcal{I}$ (resp les morphismes $F(l) \otimes F(l) \to C$, $l \in \mathcal{I}$) i.e. est l'identité. On en déduit donc $C \simeq B \otimes B$. En particulier, les morphismes $F(l) \otimes F(l) \to B$ induisent un morphisme $m_B : B \otimes B \to B$. On doit maintenant définir le morphisme unité i_B de B. On choisi $j \in \mathcal{I}$ et on pose $i_B^j := 1 \to F(j) \to B$. Il faut vérifier que cette définition ne dépend par du choix de j, pour cela, prenons $j, k \in \mathcal{I}$ et vérifions qu'ils induisent le même morphisme. $\mathcal{I}$ étant filtrant, il existe l tel que $j \to l$ et $k \to l$ et on a donc $i_B^j = i_B^l = i_B^k$. On vérifie finalement que ces morphismes munissent B d'une structure de monoïde en remarquant que comme précédemment $B \otimes B \otimes B \simeq colim_{l \in I} F(l) \otimes F(l) \otimes F(l)$ et en construisant les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \otimes B \arrow[rrr, bend left, "Id_B \otimes m_B"] \arrow[ddrr, bend right, "m_B \otimes Id_B"'] & & & \\
& F(l) \otimes F(l) \otimes F(l) \arrow[ul] \arrow[r, "Id_{F(l)} \otimes m_{F(l)}"] \arrow[d, "m_{F(l)} \otimes Id_{F(l)}"'] & F(l) \otimes f(l) \arrow[r] \arrow[d, "m_{F(l)}"] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\
& F(l) \otimes F(l) \arrow[r, "m_{F(l)}"'] \arrow[dr] & F(l) \arrow[r] & B \\
& & B \otimes B \arrow[ur, "m_B"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B & & & & B \otimes 1 \arrow[llll, "r_B"'] \arrow[ddll, bend left, "Id_B \otimes i_B"] \\
& F(l) \arrow[ul] & & F(l) \otimes 1 \arrow[ll, "r_{F(l)}"'] \arrow[dl, "Id_{F(l)} \otimes i_{F(l)}"] \arrow[ur] & \\
& & F(l) \otimes F(l) \arrow[ul, "m_{F(l)}"] \arrow[d] & & \\
& & B \otimes B \arrow[uuull, bend left, "m_B"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B & & & & 1\otimes B \arrow[llll, "l_B"'] \arrow[ddd, bend left, "i_B\otimes Id_B"] \\
& F(l) \arrow[ul] & & 1\otimes F(l) \arrow[ll, "l_{F(l)}"'] \arrow[ur] \arrow[dl, "i_{F(l)}\otimes Id_{F(l)}"] & \\
& & F(l)\otimes F(l) \arrow[ul, "m_{F(l)}"] \arrow[d] & & \\
& & B\otimes B \arrow[uull, bend left, "m_B"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B\otimes B \arrow[rrrr, "S(B,B)"] \arrow[dddrr, bend right, "m_B"'] & & & & B\otimes B \arrow[dddll, bend left, "m_B"] \\
& F(l)\otimes F(l) \arrow[ul] \arrow[rr, "S(F(l),F(l))"] \arrow[dr, "m_{F(l)}"] & & F(l)\otimes F(l) \arrow[ur] \arrow[dl, "m_{F(l)}"'] & \\
& & F(l) \arrow[d] & & \\
& & B & &
\end{tikzcd}$$

Finalement, la colimite filtrante de F est représentable dans $Comm(\mathcal{C})$ et on a un isomorphisme dans $\mathcal{C}$ $Colim(i\circ F) \backsimeq colim(F)$. Le foncteur d'oubli Créé donc les colimites filtrantes dans $Comm(\mathcal{C})$. Or Les sommes disjointes finies sont elles même représentables dans $Comm(\mathcal{C})$ d'après 1.2.16. Et $Comm(\mathcal{C})$ admet l'unité de $\mathcal{C}$ comme objet initial. D'après le dual du théorème 2, partie V.2 de [McL], les colimites finies sont représentables dans $Comm(\mathcal{C})$. Si on se donne maintenant un foncteur $F : \mathcal{J} \to Comm(\mathcal{C})$, où $\mathcal{J}$ est une petite catégorie. Pour toute sous catégorie finie $\mathcal{I}$ de $\mathcal{J}$, $F_{\mathcal{I}} := colim_{\mathcal{I}}(F)$ est représentable dans $Comm(\mathcal{C})$ et $colim_{\mathcal{J}}(F)$ est isomorphe à la colimite filtrante $Colim_{\mathcal{I}\subset\mathcal{J}\ fini}F_{\mathcal{I}}$ qui est représentable dans $Comm(\mathcal{C})$.

♦

Proposition 1.2.15. *Supposons que $\mathcal{C}$ admette des conoyaux. Soit A dans $Comm(\mathcal{C})$*

- ◇ *La catégorie $A-mod$ est une catégorie monoïdale symétrique d'unité A admettant le produit tensoriel suivant:*

$$(M,N) \to M\otimes_A N := Coker(\ M\otimes(A\otimes N) \underset{Id_M\otimes\mu_N}{\overset{[(\mu_M\circ S(X,A))\otimes Id_N]\circ a^{-1}_{M,A,N}}{\rightrightarrows}} M\otimes N\ )$$

- ◇ *Les monoïdes dans A-mod forment une catégorie équivalente aux monoïdes de $\mathcal{C}$ au dessus de A i.e.:*

$$Comm(A-mod) \backsimeq A/Comm(C)$$

On notera $A-alg$ cette catégorie.

Preuve:

- On ne peut se réduire à une catégorie monoïdale stricte car il faudrait alors montrer que l'équivalence permet de construire une structure de catégorie monoïdale sur le $A-mod$ de notre catégorie de départ à partir de la structure stricte que nous déduirions facilement pour le $A-mod$ de la catégorie stricte. Et cela reviendrait à la même démonstration.

  On procède donc à une démonstration directe. On construit les morphismes structurels d'associativité, d'unité et de symétrie. Soit $X\in A-mod$, On a

$$X\otimes_A A \backsimeq Coker(\ X\otimes(A\otimes A) \rightrightarrows X\otimes A\ )$$

  De plus, le morphisme $\mu_X : X\otimes A \to X$ est scindé par le morphisme $(Id_X\otimes i_A)\circ r_X^{-1}$, i.e. $Id_X = \mu_X\circ(Id_X\otimes i_A)\circ r_X^{-1}$. Le morphisme μ_X induit un morphisme toujours noté $r_X : X\otimes_A A \to X$. Comme μ_X est un épimorphisme, il est clair que X vérifie la propriété universelle de cette colimite et donc que r_X ainsi construit est un isomorphisme. On construit le morphisme unité l_X par une méthode parfaitement symétrique.

  Pour le morphisme de symétrie, remarquons que pour $X, Y \in A-mod$, on a

$$X \otimes_A Y \simeq Coker(X \otimes A \otimes Y \rightrightarrows X \otimes Y)$$

On a un morphisme naturel

$$f \circ S(X,Y) := X \otimes Y \xrightarrow{S(X,Y)} Y \otimes X \longrightarrow Y \otimes_A X$$

On commence par montrer qu'il égalise les deux flèches

$$X \otimes A \otimes Y \rightrightarrows X \otimes Y$$

Notons $f : Y \otimes X \to Y \otimes_A X$, on a

$$f \circ S(X,Y) \circ ((\mu_X \circ S(X,A)) \otimes Id_Y) \circ a^{-1}_{X,A,Y} = f \circ (Id_Y \otimes (\mu_X \circ S(X,A)) \circ S(X \otimes A, Y) \circ a^{-1}_{X,A,Y}$$

$$= f \circ (Id_Y \otimes \mu_X) \circ (Id_Y \otimes S(X,A)) \circ S(X \otimes A, Y) \circ a^{-1}_{X,A,Y}$$

Or f égalise $Id_Y \otimes \mu_X$ et $((\mu_Y \circ S(Y,A)) \otimes Id_X) \circ a^{-1}_{Y,A,X}$ donc

$$= f \circ ((\mu_Y \circ S(Y,A)) \otimes Id_X) \circ a^{-1}_{Y,A,X} \circ (Id_Y \otimes S(X,A)) \circ S(X \otimes A, Y) \circ a^{-1}_{X,A,Y}$$

$$= f \circ (\mu_Y \otimes Id_X) \circ (S(Y,A) \otimes Id_X) \circ a^{-1}_{Y,A,X} \circ (Id_Y \otimes S(X,A))) \circ S(X \otimes A, Y) a^{-1}_{X,A,Y}$$

D'après 1.2.5 la composé de morphisme de symétrie et d'associativité qui apparaît ici est égale à $S_{X,A\otimes Y}$ d'où

$$= f \circ (\mu_Y \otimes Id_X) \circ S_{X,A\otimes Y} = f \circ S(X,Y) \circ (Id_X \otimes \mu_Y)$$

Comme $f \circ S(X,Y)$ égalise ces deux flèches, on a un morphisme induit $X \otimes_A Y \to Y \otimes_A X$. Ce morphisme que nous noterons toujours $S(X,Y)$ est notre morphisme structurel de symétrie.

Pour l'associativité, on se donne X, Y, Z dans $A - mod$ et on cherche un morphisme

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes_A Y) \otimes_A Z \to X \otimes_A (Y \otimes_A Z)$$

On note f le morphisme naturel $X \otimes (Y \otimes Z) \to X \otimes_A (Y \otimes_A Z)$. On commence par remarquer que $f \circ a_{X,Y,Z}$ égalise les deux morphismes

$$(X \otimes Y) \otimes (A \otimes Z) \rightrightarrows (X \otimes Y) \otimes Z$$

On cherche à calculer

$$g := f \circ a_{X,Y,Z} \circ ((\mu_{X\otimes Y} \circ S(X \otimes Y, A)) \otimes Id_Z) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,A,Z}$$

Or le produit de deux A-modules est muni d'une structure de A-module qui peut être décrite par

$$\mu_{X\otimes Y} = (\mu_X \otimes Id_Y) \circ a^{-1}_{A,X,Y} : A \otimes (X \otimes Y) \to X \otimes Y$$

Ce qui donne donc

$$g = f \circ a_{X,Y,Z} \circ ((((\mu_X \otimes Id_Y) \circ a^{-1}_{A,X,Y}) \circ S(X \otimes Y, A)) \otimes Id_Z) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,A,Z}$$
$$= f \circ a_{X,Y,Z} \circ (\mu_X \otimes Id_Y \otimes Id_Z) \circ \sigma$$

Où σ est le morphisme de permutation canonique donné par 1.2.5

$$\sigma : (X \otimes Y) \otimes (A \otimes Z) \to ((A \otimes X) \otimes Y) \otimes Z$$

d'où

$$g = f \circ (\mu_X \otimes Id_Y \otimes Id_Z) \circ a_{A\otimes X,Y,Z} \circ \sigma = f \circ (\mu_X \otimes Id_Y \otimes Id_Z) \circ \sigma'$$

Où σ' est l'unique morphisme canonique $(X \otimes Y) \otimes (A \otimes Z) \to (A \otimes X) \otimes (Y \otimes Z)$ On obtient Or f égalise $Id_X \otimes \mu_{Y\otimes Z}$ et $((\mu_X \circ S(X,A)) \otimes Id_{Y\otimes Z}) \circ A^{-1}_{X,A,Y\otimes Z}$. Et on a aussi $\mu_{Y\otimes Z} = (Id_Y \otimes \mu_Z) \circ \sigma''$.où $\sigma'' : A \otimes (Y \otimes Z) \to Y \otimes (A \otimes Z)$. On obtient donc

$$g = f \circ (Id_{X\otimes Y} \otimes \mu_Z) \circ \sigma^{(3)}$$

avec $\sigma^{(3)} : (X \otimes Y) \otimes (A \otimes Z) \to X \otimes (Y \otimes (A \otimes Z))$ soit finalement, par fonctorialité de l'associativité.

$$g = f \circ a_{X,Y,Z} \circ (Id_{X \otimes Y} \otimes \mu_Z)$$

Donc $f \circ a_{X,Y,Z}$ égalise les deux flèches du conoyau et il y a donc un relèvement de ce morphisme $(X \otimes Y) \otimes_A Z \to X \otimes_A (Y \otimes_A Z)$.

On obtient par une méthode similaire l'existence d'un relèvement, que nous noterons toujours $a_{X,Y,Z}$

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes_A Y) \otimes_A Z \to X \otimes_A (Y \otimes_A Z)$$

Ce relèvement est notre morphisme d'associativité.

Tous les diagrammes commutatifs structurels des morphismes que l'on vient de définir s'obtiennent comme dans la proposition précédente, i.e. en montrant à l'aide de diagrammes que les digrammes commutatifs structurels des morphismes structurels de $\mathcal{C}$ se relève naturellement.

♦

- Pour démontrer l'équivalence de catégorie $Comm(A-mod) \simeq A/Comm(\mathcal{C})$, on construit d'abord deux foncteurs. Soit $B \in Comm(A - mod)$. Rappelons que le morphisme unité $B \otimes_A A \to B$ est induit par le morphisme de multiplication $\mu_B : B \otimes A \to B$. On va montrer que B est munit naturellement d'une structure de monoïde commutatif au dessous de A et par conséquent qu'il existe un foncteur d'oubli de $Comm(A - mod)$ dans $A/Comm(\mathcal{C})$. On rappelle que l'on utilise les même notations pour les morphisme structurels des catégories monoïdales $A - mod$ et $\mathcal{C}$. Le morphisme unité de B est donné par $1 \xrightarrow{i_A} A \xrightarrow{i_B} B$ et le morphisme multiplication par $B \otimes B \longrightarrow B \otimes_A B \xrightarrow{m_B} B$. On construit les diagrammes commutatifs suivants pour vérifier que ces morphismes munissent B d'une structure de monoïde commutatif dans $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_A A \arrow[r, "\mu_B"] & B \\
B \otimes A \arrow[u] \arrow[ur, "\mu_B"] & B \otimes 1 \arrow[l, "Id_B \otimes i_A"] \arrow[u, "r_B"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \otimes_A B \arrow[rr, "S(B,B)"] \arrow[dr, "m_B"] & & B \otimes_A B \arrow[dl, "m_B"'] \\
B \otimes B \arrow[u] \arrow[r, "m_B"'] \arrow[rr, bend right, "S(B,B)"'] & B & B \otimes B \arrow[u] \arrow[l, "m_B"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes_A B \arrow[r, "\mu_B \circ S(B,B)"] & B \\
A \otimes B \arrow[u, bend left] \arrow[ur, "\mu_B \circ S(B,B)"] & 1 \otimes B \arrow[l, "i_A \otimes Id_B"] \arrow[u, "l_B"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \otimes B \arrow[rrr, "Id_B \otimes m_B"] \arrow[dd, "m_B \otimes Id_B"'] \arrow[dr] & & & B \otimes B \arrow[dl] \arrow[ddl, bend left, "m_B"] \\
& B \otimes_A B \otimes_A B \arrow[r, "m_B \otimes_A Id_B"] \arrow[d, "Id_B \otimes_A m_B"'] & B \otimes_A B \arrow[d, "m_B"] & \\
B \otimes B \arrow[rr, bend right, "m_B"'] & B \otimes_A B \arrow[r, "m_B"'] & B &
\end{tikzcd}$$

Une vérification analogue permet de montrer que tout morphisme de $Comm(A - mod)$ définit un morphisme de monoïde commutatif au dessous de A et que l'on a donc un foncteur d'oubli (fidèle), que l'on notera i, de $Comm(A - mod)$ dans $A/Comm(\mathcal{C})$.

Soit maintenant $B \in A/Comm(\mathcal{C})$. On a un morphisme naturel de monoïdes commutatifs $A \to B$ qui fait de B un A-module dont le morphisme structurel est donné par $B \otimes A \to B \otimes B \to B$. De manière analogue à la première partie de la preuve, les diagrammes structurels commutatifs du monoïde B permettent de construire des diagrammes similaires pour la A-algèbre B. On vérifie, toujours par la même méthode, qu'un morphisme de $A/Comm(\mathcal{C})$ est dans $Comm(A-mod)$. Cela construit un foncteur d'oubli adjoint. On vérifie alors aisément que ces deux foncteurs définissent des isomorphismes inverses de catégorie entre $A/Comm(\mathcal{C})$ et $Comm(A - mod)$.

♦

Proposition 1.2.16. *Les sommes amalgamées sont représentables dans $Comm(\mathcal{C})$, on les décrit de la manière suivante. Soient $C \in Comm(\mathcal{C})$ et $A, B \in C-alg$, alors $A \otimes_C B \simeq A \coprod_C B$. En particulier, si $C = 1$ on a $A \otimes B \simeq A \coprod B$.*

Preuve

Il suffit de montrer dans $\mathcal{C}$ que pour $A, B \in Comm(\mathcal{C})$, $A \otimes B$ vérifie la propriété universelle de la somme disjointe. Soit donc $D \in Comm(\mathcal{C})$ tel qu'il existe $f_1 : A \to D$ et $f_2 : B \to D$. On définit alors un morphisme de $A \otimes B$ dans D par $h := m_D \circ (f_1 \otimes f_2)$. On veut montrer qu'il est l'unique morphisme de $A \otimes B$ dans D tel que $h \circ (Id_A \otimes i_B) \circ r_A^{-1} = f_1$ et $h \circ (i_A \otimes Id_B) \circ r_A^{-1} = f_2$. Soit donc f un morphisme vérifiant cette même propriété. Calculons $h = m_D \circ (f_1 \otimes f_2)$ en fonction de f.

$$m_D \circ (f_1 \otimes f_2) = m_D \circ [f \circ (Id_A \otimes i_B) \circ r_A^{-1} \otimes f \circ (i_A \otimes Id_B) \circ r_B^{-1}]$$
$$\text{Par compatibilité de } \circ \text{ et } \otimes\text{, on a}$$
$$= m_D \circ (f \otimes f) \circ [(Id_A \otimes i_B) \circ r_A^{-1} \otimes (i_A \otimes Id_B) \circ r_B^{-1}]$$
$$\text{Et } f \text{ est un morphisme de monoïdes donc}$$
$$= f \circ m_{A\otimes B} \circ [(Id_A \otimes i_B) \circ r_A^{-1} \otimes (i_A \otimes Id_B) \circ r_B^{-1}]$$
$$\text{Or } m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B) \circ (Id_A \otimes S(B,A) \otimes Id_B)$$
$$\text{D'où } m_D \circ (f_1 \otimes f_2) = f \circ [(m_A \circ (Id_A \otimes i_A) \circ r_A^{-1}) \otimes (m_B \circ (i_B \otimes Id_B) \circ r_B^{-1})]$$
$$= f \text{ d'après les diagrammes structurels d'unité des monoïdes } A \text{ et } B.$$

♦

Proposition 1.2.17. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale fermée bicomplète alors, pour tout A dans $Comm(\mathcal{C})$, $A - mod$ est fermée. Soit $M \in A - mod$, alors le foncteur $M \otimes_A - : A - mod \to A - mod$ à un adjoint à droite défini par:*

$$\underline{Hom}_{A-mod}(M, -) := M' \to ker[\ \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M') \underset{g}{\overset{\mu_M^*}{\rightrightarrows}} \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(M \otimes A, M')\ ]$$

où g est définit comme étant l'adjoint du morphisme

$$\underline{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M') \otimes A \to \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M' \otimes A) \overset{\mu_{M'*}}{\to} \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M')$$

Preuve

Le Hom interne ainsi définit admet bien les diagrammes structurels attendus. On le vérifie encore grâce au foncteur $Colim_{\mathcal{I}}$ pour $I := * \rightrightarrows *$.

Ecrivons l'adjonction voulue plus précisément

$$Hom_{A-mod}(M \otimes_A N, M') \backsimeq Hom_{A-mod}(M, \underline{Hom}_{A-mod}(N, M'))$$

On doit montrer que la définition que l'on a donnée vérifie bien cette propriété. On a :

$$Hom_{A-mod}(M \otimes_A N, M') \backsimeq Hom_{A-mod}(Coker(\ M \otimes A \otimes N \underset{Id_M \otimes \mu_N}{\overset{\mu_M \otimes Id_N}{\rightrightarrows}} M \otimes N\ ), M')$$

$$\backsimeq Ker(\ Hom_{A-mod}(M \otimes N, M') \underset{(Id_M \otimes \mu_N)^*}{\overset{(\mu_M \otimes Id_N)^*}{\rightrightarrows}} Hom_{A-mod}(M \otimes A \otimes N, M')\ )$$

$$\backsimeq Ker(\ Hom_{A-mod}(M, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')) \overset{\mu_M^*}{\rightrightarrows} Hom_{A-mod}(M \otimes A, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M'))\ )$$

$$\backsimeq Ker(\ Hom_{A-mod}(M, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')) \rightrightarrows Hom_{A-mod}(M, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes N, M'))\ )$$

Il nous faut maintenant décrire les deux derniers morphismes. Le morphisme $(Id_M \otimes \mu_N)^*$ se transforme naturellement en $Hom_{A-mod}(M, \mu_N^*)$ pour lequel nous choisirons la notation plus commode $(\mu_N^*)_*$. Pour décrire le second morphisme, on écrit les deux diagrammes commutatifs suivants, le premier concerne la A-linéarité des morphismes considérés et le second les propriétés de commutativité des adjonctions. Soit f un morphisme de A-module de M dans $\underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')$. On rappelle que $\underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')$ est muni d'une structure de A-module dont la multiplication est l'adjoint de g, que nous noterons g', décrit dans la définition ci-dessus.

$$\begin{tikzcd}
M \otimes A \arrow[r, "f \otimes Id_A"] \arrow[d, "\mu_M"'] & \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M') \otimes A \arrow[d, "g'"] \\
M \arrow[r, "f"] & \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} Hom_{A-mod}(M \otimes A, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes N, M')) & \xleftarrow{(f\otimes Id_A)^*} & Hom_{A-mod}(\underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M') \otimes A, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Hom_{A-mod}(M, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')) & \xleftarrow{f^*} & Hom_{A-mod}(\underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M'), \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')) \end{array}$$

On obtient donc d'après le premier diagramme, en considérant le morphisme

$$\mu_M^* : Hom_{A-mod}(M, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')) \to Hom_{A-mod}(M \otimes A, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M'))$$

que le morphisme $\mu_M^*(f) = f \circ \mu_M$ est égal au morphisme $g' \circ (f \otimes Id_A)^*$ et d'après le second diagramme, ce morphisme est égal à $f^*(g) = g \circ f$. Finalement, on obtient

$$Hom_{A-mod}(M \otimes_A N, M') \backsimeq Ker(\ Hom_{A-mod}(M, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N, M')) \overset{g}{\underset{(\mu_N^*)_*}{\rightrightarrows}} Hom_{A-mod}(M, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes N, M'))\ )$$

Et comme ces deux morphismes ne dépendent pas de M:

$$\backsimeq Hom_{A-mod}(M, ker[\ \underline{Hom}(N, M') \overset{g}{\underset{\mu_N^*}{\rightrightarrows}} \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(N \otimes A, M')\ ])$$

♦

1.3 Adjonctions dans une Catégorie Monoïdale Symétrique

Nous allons ici détailler les adjonctions entre une catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{C}$ et les catégories associées $Comm(\mathcal{C})$, $A - mod,\ A \in Comm(\mathcal{C})$. D'où nous déduirons des résultats analogue pour les catégories monoïdales symétrique $A - mod,\ A \in Comm(\mathcal{C})$.

Proposition 1.3.1. *Le foncteur monoïde libre engendré définit par:*

$$\begin{array}{c} L : \mathcal{C} \to Comm(\mathcal{C}) \\ X \to L(X) = \coprod_{n \in N} (X^{\otimes n})/S_n \end{array}$$

Où S_n est le groupe des permutations d'un ensemble de n élément, est adjoint à gauche au foncteur d'oubli.

Preuve

Tout d'abord,on doit montrer que L est bien défini, pour cela on se doit d'expliciter le produit que l'on prend pour $L(X)$ ainsi que le morphisme $1 \to L(X)$. Pour le morphisme unité $1 \to L(X)$, rappelons que par convention, on prend $X^{\otimes 0} := 1$ et cela nous définit bien un morphisme unité. On note p_n et j_n les morphismes naturels

$$\begin{array}{c} p_n : X^{\otimes n} \to X^{\otimes n}/S_n \\ j_n : x^{\otimes n}/S_n \to L(X) \end{array}$$

Pour la multiplication, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} X^{\otimes n} \otimes X^{\otimes m} \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "p_n \otimes p_m"'] & X^{\otimes(n+m)} \arrow[r, "p_{(n+m)}"] \arrow[d, "p_{(n+m)}"] & (X^{\otimes(n+m)})/S_{(n+m)} \arrow[d, "j_{(n+m)}"] \\ (X^{\otimes n})/S_n \otimes (X^{\otimes m})/S_m \arrow[r, "\nu_{(n,m)}"] \arrow[d, "j_n \otimes j_m"'] & (X^{\otimes(n+m)})/S_{n+m} \arrow[r, hook, "j_{(n+m)}"] & L(X) \arrow[d, "Id"] \\ L(X) \otimes L(X) \arrow[rr, "m_{L(X)}"'] & & L(X) \end{tikzcd}$$

Où $\nu_{(n,m)}$ est induit par $p_{(n+m)} \circ Id$ et $m_{L(X)}$ est induit par $j_{(n+m)} \circ \nu_{(n,m)}$.

On doit vérifier que la multiplication ainsi définie est commutative et respecte l'unité. Pour l'unité, compte tenu du fait qu'il s'agit de l'inclusion j_0, il suffit de remplacer m par 0 dans le diagramme précédent. Pour la commutativité, on a le diagramme commutatif suivant:

$$
\begin{tikzcd}
(X^{\otimes n})/S_n \otimes (X^{\otimes m})/S_m \arrow[rr, "S((X^{\otimes n})/S_n,(X^{\otimes m})/S_m)"] \arrow[dr, "j_n \otimes j_m"] \arrow[dd, "\nu_{(n,m)}"'] & & (X^{\otimes m})/S_m \otimes (X^{\otimes n})/S_n \arrow[dr, "j_m \otimes j_n"] \arrow[dd, "\nu_{(m,n)}"] & \\
& L(X) \otimes L(X) \arrow[rr, "S(L(X),L(X))"] \arrow[dd, "m_{L(X)}"] & & L(X) \otimes L(X) \arrow[dd, "m_{L(X)}"] \\
(X^{\otimes (n+m)})/S_{(n+m)} \arrow[rr, "Id"] \arrow[dr, "j_{(n+m)}"'] & & (X^{\otimes (n+m)})/S_{(n+m)} \arrow[dr, "j_{(n+m)}"] & \\
& L(X) \arrow[rr, "Id"'] & & L(X)
\end{tikzcd}
$$

On doit, pour terminer de montrer que L est bien défini, montrer que pour $u : X \to Y \in \mathcal{C}$ $L(u) = \coprod_{n \in N} (u^{\otimes n})/S_n$ est un morphisme dans $Comm(\mathcal{C})$. On écrit en fait le diagramme commutatif:

$$
\begin{tikzcd}
(X^{\otimes n})/S_n \otimes (X^{\otimes m})/S_m \arrow[r, bend left, "(u^{\otimes n})/S_n \otimes (u^{\otimes m})/S_m"] \arrow[ddd, bend right, "\nu_{(n,m)}"'] & (Y^{\otimes n})/S_n \otimes (Y^{\otimes m})/S_m \arrow[ddd, bend left, "\nu_{(n,m)}"] \\
X^{\otimes n} \otimes X^{\otimes m} \arrow[r, "u^{\otimes n} \otimes u^{\otimes m}"] \arrow[u, "p_n \otimes p_m"] \arrow[d, "Id"] & Y^{\otimes n} \otimes Y^{\otimes m} \arrow[u, "p_n \otimes p_m"'] \arrow[d, "Id"'] \\
X^{\otimes (n+m)} \arrow[r, "u^{\otimes (n+m)}"] \arrow[d, "p_{(n+m)}"] & Y^{\otimes (n+m)} \arrow[d, "p_{(n+m)}"'] \\
(X^{\otimes (n+m)})/S_{(n+m)} \arrow[r, bend right, "(u^{\otimes (n+m)})/S_{(n+m)}"'] & (Y^{\otimes (n+m)})/S_{(n+m)}
\end{tikzcd}
$$

et on obtient donc aussi :

$$
\begin{tikzcd}
(X^{\otimes n})/S_n \otimes (X^{\otimes m})/S_m \arrow[rr, "(u^{\otimes n})/S_n \otimes (u^{\otimes m})/S_m"] \arrow[dr, "j_n \otimes j_m"] \arrow[dd, "\nu_{(n,m)}"'] & & (Y^{\otimes n})/S_n \otimes (Y^{\otimes m})/S_m \arrow[dr, "j_n \otimes j_m"] \arrow[dd, "\nu_{(n,m)}"] & \\
& L(X) \otimes L(X) \arrow[rr, "L(u) \otimes L(u)"] \arrow[dd, "m_{L(X)}"] & & L(Y) \otimes L(Y) \arrow[dd, "m_{L(Y)}"] \\
(X^{\otimes (n+m)})/S_{(n+m)} \arrow[rr, "(u^{\otimes (n+m)})/S_n"] \arrow[dr, "j_{(n+m)}"'] & & (Y^{\otimes (n+m)})/S_{(n+m)} \arrow[dr, "j_{(n+m)}"] & \\
& L(X) \arrow[rr, "L(u)"'] & & L(Y)
\end{tikzcd}
$$

Passons maintenant à l'adjonction en elle même, on construit, pour $X \in \mathcal{C}$ et $A \in Comm(\mathcal{C})$:

$$
\begin{gathered}
\psi : Hom_{\mathcal{C}}(X, A) \to Hom_{Comm(\mathcal{C})}(L(X), A) \\
u \to \pi \circ L(u)
\end{gathered}
$$

Où π est le morphisme induit par les multiplications $(A^{\otimes n})/S_n \to A$. On définit alors ψ^{-1} par :

$$v \to v \circ j_1$$

Il est alors clair que $\psi^{-1} \circ \psi = Id$. Pour l'autre sens, il faut montrer:

$$\pi \circ \coprod_{n \in N} ((v \circ j_1)^{\otimes n})/S_n = v$$

Il suffit de montrer que $\forall n \in N$:

$$\pi \circ \coprod_{n\in N}((v\circ j_1)^{\otimes n})/S_n \circ j_n = v \circ j_n$$

Or $\pi \circ \coprod_{n\in N}((v\circ j_1)^{\otimes n}/S_n \circ j_n = \nu_{(A,n)} \circ (v\circ j_1)^{\otimes n})/S_n$(avec $\nu_{(A,n)}$ induit par $(m_A)^{\otimes(n-1)}$) par construction de p. On remarque ensuite que l'on a: $m_{L(X)} \circ j_1 \otimes j_1 = j_2 \circ \nu_{(1,1)}$ (reprendre le diagramme commutatif avec $n = m = 1$). Or $\nu_{(1,1)} = p_2$ par construction. En itérant on a de même:

$$(m_{L(X)})^{\otimes(n-1)} \circ j_1^{\otimes n} = j_n \circ p_n$$

On obtient les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
X^{\otimes n} \arrow[r, "j_1^{\otimes n}"] \arrow[d, "p_n"'] & L(X)^{\otimes n} \arrow[r, "v^{\otimes n}"] \arrow[d, "(m_{L(X)})^{\otimes(n-1)}"] & A^{\otimes n} \arrow[d, bend left, "(m_A)^{\otimes(n-1)}"] \\
(X^{\otimes n})/S_n \arrow[r, "j_n"'] \arrow[ur, "(j_1^{\otimes n})/S_n"] & L(X) \arrow[r, "v"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X^{\otimes n}/S_n \arrow[r, "(j_1^{\otimes n})/S_n"] \arrow[d, "Id"'] & (L(X)^{\otimes n})/S_n \arrow[r, "(v^{\otimes n})/S_n"] \arrow[d, "\nu_{(L(X),n)}"] & (A^{\otimes n})/S_n \arrow[d, "\nu_{(A,n)}"] \\
(X^{\otimes n})/S_n \arrow[r, "j_n"'] & L(X) \arrow[r, "v"'] & A
\end{tikzcd}$$

Où $\nu_{(A,n)}$ et $\nu_{(L(X,n))}$ sont induit par $(m_A)^{\otimes(n-1)}$ et $(m_{L(X)})^{\otimes(n-1)}$. Finalement le dernier diagramme donne le résultat cherché.

♦

Corollaire 1.3.2. *Pour $A \in Comm(\mathcal{C})$, on dispose d'un foncteur A-Algèbre libre associée, noté L_A de $A - mod$ dans $A - alg$ adjoint à gauche au foncteur d'oubli.*

Preuve
On applique la proposition précédente à la catégorie monoïdale $(A - mod, \otimes_A, A)$.

♦

Proposition 1.3.3. *Le foncteur A-Module associé définit par:*

$$\begin{gathered}\mathcal{C} \to A - mod \\ X \to X \otimes A\end{gathered}$$

est adjoint à gauche du foncteur d'oubli.

Preuve
Pour commencer, remarquons que ce foncteur est bien définit. On choisi en effet $\mu_{X\otimes A} = Id_X \otimes m_A$. Pour X dans $\mathcal{C}$ et M dans $A - mod$, on doit construire une application bijective de $Hom_{\mathcal{C}}(X, M)$ dans $Hom_{A-mod}(X \otimes A, M)$. On définit φ et son inverse comme suit:

$$\varphi : f \to \mu_M \circ Id_A \otimes f$$

$$\varphi^{-1} : g \to g \circ (Id_X \otimes i_A \circ r_X^{-1})$$

Commençons par montrer $\varphi^{-1} \circ \varphi = Id$. On réécrit $\varphi(f)$ et $\varphi^{-1}(g)$ comme suit:

$$\varphi(f) := \; X \otimes A \xrightarrow{f\otimes Id_A} M \otimes A \xrightarrow{\mu_M} M$$

$$\varphi^{-1}(g) := \; X \xrightarrow{r_X^{-1}} X \otimes 1 \xrightarrow{Id_X\otimes i_A} X \otimes A \xrightarrow{g} M$$

On peut donc décomposer $\varphi^{-1} \circ \varphi(f)$ de la façon suivante :

$$X \xrightarrow{r_X^{-1}} x \otimes 1 \xrightarrow{Id_X\otimes i_A} X \otimes A \xrightarrow{f\otimes Id_A} M \otimes A \xrightarrow{\mu_M} M$$

Or par compatibilité du produit tensoriel et de la composition, on a:

$$(f \otimes Id_A) \circ (Id_X \otimes i_A) = f \otimes i_A = (Id_M \otimes i_A) \circ f \otimes Id_1$$

On obtient donc :

$$X \xrightarrow{r_X^{-1}} X \otimes 1 \xrightarrow{f \otimes Id_1} M \otimes 1 \xrightarrow{Id_M \otimes i_A} M \otimes A \xrightarrow{\mu_M} M$$

Or $\mu_M \circ (Id_M \otimes i_A) = r_M$. On a donc:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes 1 \arrow[r, "f \otimes Id_1"] \arrow[d, "r_X"'] & M \otimes 1 \arrow[d, "r_M"] \\
X \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

On a donc $\varphi^{-1} \circ \varphi(f) = f$

Passons maintenant au second sens. Il faut donc montrer $\varphi \circ \varphi^{-1}(g) = g$. On décompose ce morphisme comme suit:

$$X \otimes A \xrightarrow{r_X^{-1} \otimes Id_A} X \otimes 1 \otimes A \xrightarrow{Id_X \otimes i_A \otimes Id_A} X \otimes A \otimes A \xrightarrow{g \otimes Id_A} M \otimes A \xrightarrow{\mu_M} M$$

Or $g \in A - mod$ donc $\mu_M \circ (g \otimes Id_A) = g \circ (Id_X \otimes m_A)$. On a donc:

$$X \otimes A \xrightarrow{r_X^{-1} \otimes Id_A} X \otimes 1 \otimes A \xrightarrow{Id_X \otimes i_A \otimes Id_A} X \otimes A \otimes A \xrightarrow{Id_X \otimes m_A} X \otimes A \xrightarrow{g} M$$

Or $(Id_X \otimes m_A) \circ (Id_X \otimes (i_A \otimes Id_A)) = Id_X \otimes (m_A \circ (i_A \otimes Id_A)) = r_X \otimes Id_A$.

Pour la dernière égalité, il faut écrire le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes 1 \otimes A \arrow[rr, "Id_X \otimes i_A \otimes Id_A"] \arrow[dr, "r_X \otimes Id_A"'] & & X \otimes A \otimes A \arrow[dl, "Id_X \otimes m_A"] \\
& X \otimes A &
\end{tikzcd}$$

On a enfin $g \circ (r_X^{-1} \otimes Id_A) \circ (r_X \otimes Id_A) = g$.

♦

Corollaire 1.3.4. *Pour $A \to B$ dans $Comm(\mathcal{C})$, on dispose d'un foncteur $- \otimes_A B$ de $A - mod$ dans $B - mod$, qui à X associe $X \otimes_A B$ adjoint à gauche du foncteur d'oubli.*

Preuve

On applique la proposition précédente à la catégorie monoïdale $(A - mod, \otimes_A, A)$.

♦

Corollaire 1.3.5. *Pour $A \to B$ dans $Comm(\mathcal{C})$, on dispose d'un foncteur $- \otimes_A B$ de $A - alg$ dans $B - alg$, qui à C associe $C \otimes_A B$ adjoint à gauche du foncteur d'oubli.*

Preuve

Par restriction aux algèbres de l'adjonction donnée par le corollaire précédent. Il faut vérifier l'image d'une Algèbre par un de ces foncteur à une structure d'algèbre canonique.

Soit $C \in B - alg$, il faut le munir d'une structure de A-algèbre. La multiplication et l'unité sont donnés par

$$C \otimes_A C \to C \otimes_B C \to C$$
$$A \to B \to C$$

On vérifie que ces morphismes munissent C d'une structure de A-algèbre par une méthode analogue à celle développée dans la preuve 1.2.14, i.e. en construisant chaque diagrammes pour mettre en évidence le fait que les diagrammes structurels pour $B - alg$ se relèvent en des diagrammes structurels pour $A - alg$.

Pour $C \in A - alg$, il nous faut munir $C \otimes_A B$ d'un structure de B-algèbre. L'unité est donnée par le morphisme naturel

$$B \to C \otimes_A B$$

et d'après ce qui précède, B est muni d'une structure de A-algèbre et la multiplication est donné par (on peut ici considérer les morphismes d'associativité et de symétrie comme des identités)

$$C \otimes_A B \otimes_A C \otimes_A B \to C \otimes_A C \otimes_A B \otimes_A B \to C \otimes_A B$$

L'existence des diagrammes commutatifs structurels est encore donnée par la méthode de 1.2.14

♦

Corollaire 1.3.6. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique et $A \in Comm(\mathcal{C})$. Soient X dans $\mathcal{C}$ (resp $A - mod$) et B, C dans $Comm(\mathcal{C})$ (resp $A - alg$). Si X est compact alors $L(X)$ (resp $L_A(X)$) est de présentation finie dans $Comm(\mathcal{C})$ (resp $A - alg$)) et $X \otimes B$ (resp $X \otimes_A B$) est de présentation finie dans $B - mod$.*

Preuve
Les foncteurs adjoints préservent les colimites filtrantes, d'après 1.2.14.

♦

d

1.4 Catégories ω-Localement Présentables et Contextes Relatifs

Definition 1.4.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite ω-localement présentable si la sous catégorie $\mathcal{C}_0$ petite formée des objets de présentation finie est génératrice, dans le sens où le foncteur de Yoneda :

$$i : \mathcal{C} \hookrightarrow Pr(\mathcal{C}_0)$$

est pleinement fidèle. Où $Pr(\mathcal{C}_0)$ est la catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{C}_0$.

Dans le cadre de cette thèse, toutes les catégories ω-localement présentable que nous regarderons seront bicomplètes.

Remarque 1.4.2. Si $\mathcal{C}$ est ω-localement présentable on a donc pour tout morphisme $u : X \to Y \in \mathcal{C}$, l'équivalence suivante

$$u \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow u_* : Hom_{\mathcal{C}}(Z, X) \to Hom_{\mathcal{C}}(Z, Y) \text{ est un isomorphisme } \forall Z \in \mathcal{C}_0$$

De plus, si $\mathcal{C}$ est cocomplète, pour tout X dans $\mathcal{C}$ on a $X \backsimeq colim_{Y \in \mathcal{C}_0/X} Y$. On dit aussi que la catégorie $\mathcal{C}_0$ est génératrice par épimorphismes stricts. On peut en effet montrer que tout objet de $\mathcal{C}$ est un quotient d'un objet de $\mathcal{C}_0$ par un épimorphisme strict. Un épimorphisme strict étant un épimorphisme $X \to Y$ tel que $Y \backsimeq X/(X \times_Y X)$

On définit la catégorie suivant qui nous sert à construire un adjoint de i.

Definition 1.4.3. Soit $F \in Pr(\mathcal{C}_0)$. La catégorie des éléments de F, notée $\mathcal{C}_0^F$ est donnée par

- ▷ Un ensemble d'objets formé des couples (k, f) où $k \in \mathcal{C}_0$ et $f \in F(k)$
- ▷ Pour deux objets $(u, f), (u', f')$, un ensemble de morphismes formé des morphismes $u : k \to k'$ tels que $u^* : F(k') \to F(k)$ envoi f' sur f.

Lemme 1.4.4. *Soit $\mathcal{C}$ ω-localement présentable et bicomplète, le foncteur $K : Pr(\mathcal{C}_0) \to \mathcal{C}$ définit par*

$$K(F) := Colim_{\mathcal{C}_0^F} k$$

est adjoint à gauche de i.

Preuve
Pour $X \in \mathcal{C}$ et $F \in Pr(\mathcal{C}_0)$ on doit construire un isomorphisme de $Hom_{Pr(\mathcal{C}_0)}(F, i(X))$ dans $Hom_{\mathcal{C}}(K(F), X)$. Soit $p : F \to i(X)$. Le morphisme p induit naturellement un foncteur $\bar{p} : \mathcal{C}_0^F \to \mathcal{C}_0^X$, on a donc un morphisme associé $Colim^F_{\mathcal{C}_0} k \to Colim^X_{\mathcal{C}_0} k$. Comme on a un morphisme naturel de diagrammes de $\mathcal{C}_0^X$ dans le diagramme constant égal à X, on a $Colim^X_{\mathcal{C}_0} k \to X$ et on obtient par composition avec le morphisme précédent un morphisme $\varphi(p) : Colim^F_{\mathcal{C}_0} k \to X$. Le morphisme $\varphi : p \to \varphi(p)$ est par construction injectif.

Réciproquement, on se donne un morphisme $p : K(F) \to X$. On définit pour tout k un morphisme $p_k ; F(k) \to Hom_{\mathcal{C}}(k, X)$ qui à f associe le morphisme induit $k \to K(F) \to X$. Cette famille est fonctorielle en k car la famille des morphismes de k dans $K(F)$ l'est.

Cela prouve finalement que le morphisme φ est non seulement injectif mais aussi surjectif.

♦

Definition 1.4.5. Un catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est dites ω-localement présentable si

- $\triangleright$ Elle est ω-localement présentable en tant que catégorie.
- $\triangleright$ Son unité 1 est compacte.
- $\triangleright$ Les objets compact dans $\mathcal{C}$ sont stable par produit tensoriel.

Definition 1.4.6. Soit $k \in \mathcal{C}_0$, on définit les foncteurs "ensemble sous-jacent"

- $\triangleright$ $(-)_0 : X \to X_0 := Hom_{\mathcal{C}}(1, X)$
- $\triangleright$ $(-)_k : X \to X_k := Hom_{\mathcal{C}}(k, X)$

Lorsque nous parlerons dorénavant d'éléments d'un objet $X \in \mathcal{C}$, on fera référence à un élément d'un de ces ensemble sous-jacent.

Dans le lemme suivant, nous présentons les conséquences immédiate de cette propriété qui vont par la suite être utile dans notre construction. Ce lemme nécessite d'introduire au préalable les notions suivantes.

Definition 1.4.7. Un épimorphisme est dit régulier si c'est le conoyau d'un couple de morphismes.

Definition 1.4.8. Une catégorie complète et cocomplète est dite régulière au sens de Barr si les épimorphismes réguliers sont stables par changement de base.

Remarque 1.4.9. La régularité au sens de Barr est en fait définie pour toute catégorie, mais il faut alors ajouter à la définition des propriétés d'existences de certaines limites ou colimites.

La régularité au sens de Barr fait partie des notions nécessaires à la théorie des faisceaux enrichis. Nous n'utiliseront explicitement que le fait que $Pr(\mathcal{C}_0)$ est régulière et uniquement dans le lemme suivant.

Definition 1.4.10. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $X \in \mathcal{C}$

- $\triangleright$ On définit $\mathcal{C}_X$ la sous catégorie de $X/\mathcal{C}$ dont les objets sont les couples (Y, j), où j est un monomorphisme et dont les morphismes sont les monomorphismes (au dessous de X).
- $\triangleright$ Un sous objet de X est la donnée d'une classe d'isomorphismes dans $\mathcal{C}_X$. On note $Sub(X)$ la catégorie des sous objets de X.

Lemme 1.4.11. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ω-localement présentable bicomplète.*

i. Un morphisme f de $\mathcal{C}$ tel que $i(f)$ est un épimorphisme est un épimorphisme.

ii. La famille des sous objets d'un objet donné X i.e. des classes d'isomorphisme de couples (Y, j), où $Y \xrightarrow{j} X$ et j est un monomorphisme, est un ensemble.

iii. Les colimites filtrantes sont exactes dans $\mathcal{C}$.

Preuve

i. Soit $X \to X' \in \mathcal{C}$ tel que $i(X) \to i(X')$ soit un épimorphisme. Or dans un topos tout épimorphisme est régulier. $i(X')$ est en effet le conoyau de $i(X) \times_{i(X')} i(X) \rightrightarrows i(X)$ or i commute aux limites car il provient du foncteur de Yoneda d'où $i(X) \times_{i(X')} i(X) = i(Y)$ avec $Y = X \times_{X'} X$. par conséquent $i(X')$ est un conoyau d'objet qui sont dans l'image de i et est lui même dans l'image de i, donc X' est conoyau de $X \times_{X'} X \rightrightarrows X$. C'est donc un épimorphisme.

♦

ii. Les classes d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{C}_0$ forment un ensemble. Notons $cl(\mathcal{C}_0)$ la catégorie des classes d'isomorphismes d'objets de $\mathcal{C}_0$. Les sous objets d'un objet F donné de $Pr(\mathcal{C}_0)$ se plongent dans

$$\prod_{i \in cl(\mathcal{C}_0)} subset(F(i))$$

qui est en tant que produit d'ensembles sur un ensemble est lui même un ensemble. Le foncteur i étant fidèle et préservant les produits, donc les monomorphismes, la famille des sous objets d'un objet donné de $\mathcal{C}$ s'injecte dans cet ensemble et forme donc elle-même un ensemble.

♦

iii. Le foncteur i est pleinement fidèle, il commute aux limites petites et aux colimites filtrantes par définition de $\mathcal{C}_0$. Comme les colimites filtrantes sont exactes dans les catégories de préfaisceaux, elles le sont aussi dans $\mathcal{C}$.

♦

Remarque 1.4.12. C'est le point 2 qui va nous permettre maintenant de définir la notion d'image ci-dessous. Nous avons besoin en effet de prendre une limite sur une famille d'objets inclus dans la famille des sous objets du but. Et pour que cette limite existe, il faut que les objets de sa catégorie d'indices forment un ensemble.

passons maintenant à la notion d'image.

Definition 1.4.13. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$, catégorie ω-localement présentable bicomplète.

i. Un sous objet Z de Y *contient l'image de* X si il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & Z \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On notera $sub_f(Y)$ la catégorie des sous objets de Y *contenant l'image de* f, ayant pour morphismes les inclusions (classes d'isomorphisme de monomorphismes).

ii. L'image de $f : X \to Y$ est donnée par

$$Im(f) := lim_{sub_f(Y)} Z$$

Où la limite est prise dans $\mathcal{C}$.

Remarque 1.4.14. L'image ne dépend pas des représentants choisis pour les classes d'isomorphismes (les sous objets). L'image de $u : X \to Y$ étant définie comme une limite de sous objets de Y, on vérifie $Im(u) \times_Y Im(u) \backsimeq Im(u)$ qui implique que $Im(u)$ est lui même un sous objet de Y.

On a un premier résultat.

Lemme 1.4.15. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie ω-localement présentable bicomplète et $u : X \to Y \in \mathcal{C}$ un monomorphisme, alors $X \backsimeq Im(u)$.*

Preuve

L'objet X est un sous objet de Y, par conséquent il est initial dans la catégorie $Sub_u(Y)$. On a donc $X \backsimeq Im(u)$.

♦

La pleine fidélité du foncteur i nous indique qu'il s'agit de la notion d'image dans la sous catégorie pleine de $Pr(\mathcal{C}_0)$ image par i de $\mathcal{C}$. Cela revient à dire que l'image de X dans Y est le plus petit sous objet $Im_f(x)$ de Y tel que pour tout k dans $\mathcal{C}_0$, $Hom_{\mathcal{C}}(k, Im_f(x))$ contient l'image par $Hom_{\mathcal{C}}(k, f)$ de $Hom_{\mathcal{C}}(k, x)$.
Nous devons nous assurer d'une certaine cohérence de cette notion et pour cela on va remarquer que l'on peut l'obtenir à l'aide d'une autre propriété universelle donnée par une colimite filtrante. Cela nous permettra, à l'aide d'une hypothèse donnée dans la suite, d'assurer que les morphismes images par Yoneda des $\mathcal{C}$ préservent la structure *d'être dans L'image essentielle par i de* $\mathcal{C}$. En particulier cela assure que pour $u : X \to Y \in \mathcal{C}_0$, $X_0 \to Im(u)_0$ est surjectif. Ce qui revient à dire que les morphismes de $\mathcal{C} = 1 - mod$ sont ceux qui préservent la structure de 1-module dans $Pr(\mathcal{C}_0)$... ce qui est tautologique et est donc nécessaire pour assurer la cohérence des hypothèses.

Definition 1.4.16. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ω-localement présentable bicomplète régulière au sens de Barr et $u : X \to Y \in \mathcal{C}$. Alors on définit

$$|u| := Conoyau(\ X \times_Y X \rightrightarrows X \ )$$

où le Conoyau est pris dans $\mathcal{C}$.

Proposition 1.4.17. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie ω-localement présentable bicomplète régulière au sens de Barr et $u : X \to Y \in \mathcal{C}$. Alors*

$$Im(u) \backsimeq |u|$$

Preuve
On montre d'abord qu'il existe un unique morphisme de $|u|$ vers $Im(u)$ qui commute avec les inclusions dans les sous objets Y' de Y contenant l'image de u. Soit en effet $j : Y' \hookrightarrow Y$ un sous objet de Y tel que le morphisme u se factorise par un morphisme $u' : X \to Y'$. On a alors deux morphismes de $X \times_Y X$ dans Y' qui sont égalisés par le monomorphisme j donc égaux. Le morphisme u' égalise donc les deux morphismes de $X \times_Y X$ dans X. Par la propriété universelle du conoyau, il existe par conséquent un unique morphisme de $|u|$ vers Y' qui factorise u. Cela étant vrai pour tout sous objet de Y contenant l'image de u (au sens de 1.4.13, i) et l'image étant une limite prise sur ces sous objets, il existe donc un unique morphisme de $|u|$ vers $Im(u)$.

Pour la réciproque, il nous faut montrer que $|u|$ est un sous objet de Y, soit que le morphisme $I(u) \to Y$, est un monomorphisme. Pour cela, on va montrer que $|u| \times_Y |u| \backsimeq |u|$. Commençons tout d'abord par remarquer le fait suivant,

$$|u| \times_Y |u| \backsimeq Conoyau(\ X \times_Y X \times_Y |u| \rightrightarrows X \times_Y |u|\ )$$

Nous allons prouver que $X \times_Y |u| \backsimeq |u|$. On commence par remarquer que $X \to |u|$ est un épimorphisme régulier. La catégorie étant supposée régulière, ceux-ci sont stables par changement de base. On a donc

$$|u| \times_Y X \backsimeq Conoyau(\ X \times_Y X \times_Y X \rightrightarrows X \times_Y X\ )$$

On note $p : X \times_Y X \to X$ alors on remarque que ce dernier conoyau est $|p|$. Le morphisme p admet une section, s, telle que $p \circ s = Id$. On note r le morphisme $X \times_Y X \to |p|$, q le morphisme $|p| \to X$, et $t = r \circ s$. On écrit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y X \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, shift left, "p"] & & {|p|} \arrow[dl, shift left, "q"] \\
& X \arrow[ul, shift left, "s"] \arrow[ur, shift left, "t"] &
\end{tikzcd}$$

On a $q \circ t = q \circ r \circ s = p \circ s = Id$. On montre $t \circ q = Id$. comme r est un épimorphisme, il suffit de montrer $t \circ q \circ r = r$. Or $t \circ q \circ r = r \circ s \circ q \circ r$. Par construction de q, on a $q \circ r = p$ et donc $t \circ q \circ r = r \circ s \circ p = r$.

On obtient donc $|u| \times_Y X \backsimeq X$. L'isomorphisme $|u| \times_Y |u| \backsimeq |u|$ en découle directement.

On conclut en remarquant que $|u|$ étant un sous objet de Y qui factorise u, $Im(u)$ envoi de manière naturelle sur lui. On a donc $Id_{|u|} : |u| \to Im(u) \to |u|$ qui fait du morphisme $Im(u) \to I(u)$ un épimorphisme scindé. Comme c'est aussi un monomorphisme, c'est un isomorphisme (1.1.6).

♦

Pour assurer la cohérence de cette notion, on aura besoin d'une hypothèse particulière sur $\mathcal{C}$, décrite dans le définition suivante.

Definition 1.4.18. Une catégorie monoïdale symétrique ω-localement présentable bicomplète $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ *respecte les images si l'unité* 1 *est projective par rapport aux épimorphismes réguliers. Plus précisément,* $(-)_0$ *envoi les épimorphismes réguliers sur des surjections.*

Afin de nous faciliter la tâche au lecteur compte tenu du nombre d'hypothèses sur la catégorie $\mathcal{C}$ étudiée dans cette thèse, nous donnons un récapitulatif de ses hypothèses et nous nommons dorénavant les catégories qui les vérifient, contextes relatifs. Compte tenu de l'importance de la définition précédente, il était nécessaire d'attendre jusque là pour donner cette caractérisation des objets étudiés.

Definition 1.4.19. Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ définit un contexte relatif $\mathcal{C}$ si

- ▷ La catégorie $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est monoïdale symétrique fermée.
- ▷ La catégorie $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est une catégorie monoïdale ω-localement présentable.
- ▷ La catégorie $\mathcal{C}$ est bicomplète.
- ▷ La catégorie $\mathcal{C}$ est régulière au sens de Barr.
- ▷ La catégorie $\mathcal{C}$ respecte les images.

Remarque 1.4.20. Dans un contexte relatif, pour $u : X \to Y$, le morphisme $X \to Im(u)$ est un épimorphisme régulier. En particulier, comme $\mathcal{C}$ *respecte les images, on obtient que* $X_0 \to Im(u)_0$ *est un épimorphisme régulier d'ensembles i.e. un morphisme surjectif. Par conséquent* $Im(u)_0 = \{y \in Y_0 \ tq \ \exists \, x \in X_0 \ tq \ u_*(x) = y\}$ *i.e. est l'image de* u_* *dans la catégorie des ensembles.*

Nous continuons par deux propositions qui assurent la cohérence de notre notion de contexte relatif en montrant qu'elle se prolonge naturellement aux catégories $A-mod$ et qu'elle assure une certaine régularité des catégories $A-alg$, $A \in Comm(\mathcal{C})$. Pour cela on rappelle un résultat important de [SGAIV], section $I.7.2$.

THEOREME 1.4.21. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie cocomplète. Alors $\mathcal{C}$ est ω-localement présentable si et seulement si tout objet X de $\mathcal{C}$, la catégorie $\mathcal{C}_0/X$ est filtrante et $X \simeq colim_{\mathcal{C}/X} Y$.*

Proposition 1.4.22. *Soient $\mathcal{C}$ un contexte relatif et $A \in Comm(\mathcal{C})$. Alors $A - mod$ est un contexte relatif.*

Preuve
On sait déjà que $A - mod$ est monoïdale symétrique fermée bicomplète. Il est clair qu'elle est régulière au sens de Barr et respecte les images. On montre donc qu'elle est ω-localement présentable.

Soit $A - mod_0$ la sous catégorie pleine de $A - mod$ formée des objets de présentation finie. On considère $\mathcal{C}_{A,0}$, la plus petite sous catégorie de $A - mod$ contenant $A - mod_0$ et stable par colimite filtrante indicées par des diagrammes de la forme $\mathcal{A} - /M$, $M \in A - mod$. Cette catégorie est une catégorie formée de Ind-objets. En se référant au corollaire 8.8.2 de [SGAIV], $\mathcal{C}_0$ étant stable par colimite finie, on en déduit que la catégorie des Ind-objets dans $\mathcal{C}_0$ est elle même stable par colimite finie. Cela implique donc que $\mathcal{C}_{A,0}$ est stable par colimite finie.

Or $\mathcal{C}_{A,0}$ contient les A-modules libres, i.e. les modules de la forme $A \otimes X$, $X \in \mathcal{C}$, car $\mathcal{C}_0$ est génératrice dans $\mathcal{C}$ donc

$$X \simeq Colim_{\mathcal{C}_0/X} k$$

Ce qui implique, $\mathcal{C}$ étant fermée, que

$$A \otimes X \simeq colim_{A\otimes(\mathcal{C}_0/X)} A \otimes k$$

D'après 1.3.6, les objets $A \otimes k$ sont compact dans $A - mod$. De plus,cette colimite est filtrante, on a des morphismes

$$colim_{A\otimes(\mathcal{C}_0/X)} A \otimes k \to Colim_{A-mod_0/(A\otimes X)} k \to A \otimes X$$

Dont la composition est un isomorphisme, ce qui implique

$$Colim_{A-mod_0/(A\otimes X)} k \simeq A \otimes X$$

On conclut en remarquant que tout A-module est un conoyau, donc une colimite finie, de A-module libre. En effet $M \simeq M \otimes_A A$ qui est définit comme un conoyau de modules libres.

♦

Proposition 1.4.23. *Soit $\mathcal{C}$ un contexte relatif, alors $Comm(\mathcal{C})$ est une catégorie ω-localement présentable.*

Preuve
La démonstration est analogue à celle de la proposition précédente. On note $Comm(\mathcal{C})_0$ la catégorie des monoïdes de présentation finie et $\mathcal{C}_{c0}$ la plus petite sous catégorie pleine de $Comm(\mathcal{C})$ contenant $\mathcal{C}_{c0}$ et stable par colimite filtrante indexées pare des diagrammes de la forme $\mathcal{C}_{c0}/A$, $A \in Comm(\mathcal{C})$. Cette catégorie contient les monoïdes libres, i.e. les monoïdes de la forme $L(X)$, $X \in \mathcal{C}$. En effet, on a

$$X \simeq Colim_{\mathcal{C}_0/X} k$$

et donc

$$L(X) \simeq Colim_{L(\mathcal{C}_0)/L(X)} L(k)$$

Et d'après 1.3.6, les objets $L(k)$ sont de présentation finie dans $Comm(\mathcal{C})$. de plus, on a une composition

$$Colim_{L(\mathcal{C}_0)/L(X)} L(k) \to Colim_{Comm(\mathcal{C})_0/L(X)} k \to L(X)$$

Et donc

$$Colim_{Comm(\mathcal{C})_0/L(X)} k \simeq L(X)$$

Or, comme dans la preuve précédente, $\mathcal{C}_{c0}$ est stable par colimite finie et pour tout $A \in Comm(\mathcal{C})$, on a

$$A \simeq Conoyau(\ L(L(A)) \rightrightarrows L(A)\ )$$

En effet, $L(A) \to A$ égalise clairement ces deux flèches et pour tout monoïde B en dessous de $L(A)$, on a par adjonction un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L(A) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & B \\ A \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Où le morphisme de A dans B hérite d'une structure de morphisme de monoïde en tant que composé du morphisme $A \to L(A)$ et du morphisme $L(A) \to B$.

Finalement, tout objet de $Comm(\mathcal{C})$ est colimite finie d'objets de $\mathcal{C}_{c0}$ soit appartient à $\mathcal{C}_{c0}$.

♦

Notons qu'il n'est pas nécessaire que $Comm(\mathcal{C})$ respecte les images au sens large dans la mesure où une image dans $Comm(\mathcal{C})$ est en fait une image dans $\mathcal{C}$. Nous le prouvons dans le lemme suivant.

Lemme 1.4.24. *Soit $\mathcal{C}$ un contexte relatif. Soit $u : A \to B \in Comm(\mathcal{C})$, alors l'image de u dans $\mathcal{C}$ est munie d'une structure de monoïde commutatif et est isomorphe à l'image de u dans $Comm(\mathcal{C})$.*

Preuve
Notons $u' : A \to Im(u)$. On a un morphisme unité $u' \circ i_A$. Le produit tensoriel $\otimes$ est distributif par rapport aux colimites petites ($\mathcal{C}$ est fermée). On a donc

$$Im(u) \otimes Im(u) \backsimeq Conoyau(\ A \times_B A \otimes Im(u) \rightrightarrows A \otimes Im(u)\ )$$

Or comme remarqué dans la proposition précédente, le foncteur d'oubli de $A - mod$ dans $\mathcal{C}$ commute aux colimites petites donc aux images. Le morphisme u étant un morphisme de A-modules, $Im(u)$ est muni d'une structure de A-module. On a donc un morphisme naturel $\mu_{Im(u)} : A \otimes Im(u) \to Im(u)$. Il nous faut montrer qu'il égalise les deux flèches du conoyau précédent. La catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ étant fermée, les foncteurs de la forme $Z \otimes -$, $Z \in \mathcal{C}$ préservent les épimorphismes de $\mathcal{C}$. On en déduit donc que le morphisme $Id \otimes u' : A \times_B A \otimes A \to A \times_B A \otimes Im(u)$ est un épimorphisme. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \times_B A \otimes A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "Id\otimes u'"'] & A \otimes A \arrow[d, "Id_A\otimes u'"] & \\ A \times_B A \otimes Im(u) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & A \otimes Im(u) \arrow[dr, "\mu_{Im(u)}"] & \\ & & Im(u) \end{tikzcd}$$

Dans lequel le morphisme $Id_A \otimes u'$ égalise les deux morphismes du haut car $A \otimes Im(f)$ est leur conoyau. On en déduit donc que $\mu_{Im(u)}$ égalise les deux morphismes de $A \times_B A \otimes A$ dans $A \otimes Im(u)$. Finalement, $Id \otimes u'$ étant un épimorphisme, $\mu_{Im(u)}$ égalise les deux morphismes de $A \times_B A \otimes Im(u)$ dans $A \otimes Im(u)$ et se relève donc en un morphisme $m_{Im(u)}$ de leur conoyau vers $Im(u)$, soit

$$m_{Im(u)} : Im(u) \otimes Im(u) \to Im(u)$$

Les diagrammes commutatifs structurels sont construits de manière analogue à la preuve de 1.2.14. Cela ne présente pas de difficulté particulière.

♦

On termine par quelques remarques essentielles sur les générateurs, plus précisément les objets engendrés par une famille d'éléments de leurs ensembles sous-jacents et quelques résultats les concernant.

Definition 1.4.25. Soit $\mathcal{C}$ un contexte relatif. Soient $X \in \mathcal{C}$ et $F = (f_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de X (i.e. de l'ensemble $\coprod_{k \in \mathcal{C}_0} X_k$). On note $\mathcal{C}_F$ la sous catégorie pleine de $Sub(X)$ dont les objets sont les sous objets Y de X contenant la famille F. Alors, on définit l'objet engendré par la famille F par

$$X_F := Lim_{\mathcal{C}_F} Y$$

où la limite est prise dans $\mathcal{C}$.

L'existence dans $\mathcal{C}$ de cette limite est donnée par le fait que $\mathcal{C}_F$ est petite (lemme 1.4.11). La limite ne dépend pas des représentants choisis pour les classes d'isomorphismes.

Comme pour l'image, on dispose d'une définition équivalente. Nous allons montrer l'équivalence en question dans le lemme suivant. On donne tout d'abord une définition.

Definition 1.4.26. Soient $\mathcal{C}$ un contexte relatif, $X \in \mathcal{C}$ et $F = (f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de X. Alors le préfaisceaux associé à F, noté F' est définit par

$$F' : k \to F(k) := \{f \in X_k \ tq \ \exists \ h : k \to k' \ et \ g \in F \cap X_{k'} \ tq \ f = g \circ h\}$$

Remarquons qu'il s'agit bien d'un préfaisceau par construction, en fait il s'agit de l'image du morphisme de préfaisceaux $\coprod_F k \to X$. De plus il est clair que si l'on considère la famille, toujours notée F', $F' := \coprod_k F'(k)$, on a $X_{F'} \simeq X_F$.

Lemme 1.4.27. *Soient $\mathcal{C}$ un contexte relatif, $X \in \mathcal{C}$, $F = (f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de X et F' son préfaisceau associé.*

- *On a un morphsime naturel*

$$p : K(F') := Colim_{\mathcal{C}_0^{F'}} k \to X$$

- *On a un isomorphisme entre l'image de ce morphisme et X_F.*

Où $\mathcal{C}_0^{F'}$ est définie en 1.4.3.

Preuve
Il est clair par adjonction avec i que les catégories données dans la définition de l'image (pour le morphisme p), $sub_p(X)$ et dans la définition d'objet engendré (pour F) $\mathcal{C}_F$ sont isomorphes. Les deux limites indexées par ces catégories sont donc elle-même isomorphes.

♦

Lemme 1.4.28. *Soient $\mathcal{C}$ un contexte relatif et $X \in \mathcal{C}$ engendré par $F = (f_i)_{i\in I}$.*

i. Soit $Y \in Sub(X)$. Alors $F \subset Y \Rightarrow Y \simeq X$.

ii. Soient $Y, Y' \in Sub(X)$ alors si ils ont les mêmes générateurs, ils sont isomorphes.

iii. Si $(-)_0$ est conservatif, alors X_0 est une famille génératrice de X.

iv. Soit $u : X \to Y \in \mathcal{C}$ alors $u_*(F)$ engendre $Im(u)$.

v. La famille F est épimorphique.

vi. Toute famille épimorphique d'éléments est génératrice.

vii. Un morphisme est un épimorphisme si et seulement si il préserve les familles génératrices.

viii. Soit $A, B \in \mathcal{C}$ alors $i(A) \times i(B)$ engendre $A \otimes B$.

ix. Soient $u : A \to B$ et C, dans $\mathcal{C}$. Alors L'image de $u \otimes Id_C$ est engendrée par $Im(u) \otimes C$.

x. Soit $\mathcal{G}$ le diagramme des parties finies de F, dont les morphismes sont les inclusions. Alors $X \simeq Colim_{G\in\mathcal{G}} X_G$.

xi. Si X est de présentation finie dans $\mathcal{C}$, il admet une sous famille finie de F génératrice.

Preuve

i. Par définition.

♦

ii. Par définition.

♦

iii. Supposons $(-)_0$ conservatif. X contient les éléments de X_0. Soit Y engendré par X_0, on a alors $Y \subset X$, mais aussi $X_0 \subset Y_0$ d'où $X_0 \simeq Y_0$. Finalement, par conservativité $X \simeq Y$.

♦

iv. Il est clair que $Im(u)$ contient l'image de la famille génératrice. Notons $Im(u)_I$ le sous objet de $Im(u)$ engendré par cette famille. Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que u se factorise par $Im(u)_I$. Or $F \to Im(u)_I$ donc par la propriété universelle de l'ensemble générateur F, le morphisme u se factorise par $Im(u)_I$ dans $\mathcal{C}$.

v. Immédiat, à partir des points précédents.

♦

vi. Soit F' une famille épimorphique. Alors pour tout Y dans $\mathcal{C}$, on a $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(K(F'),Y)$ soit $X \simeq K(F')$ par Yoneda (opposé).

♦

vii. Immédiat d'après le point précédent.

♦

viii. On a $A \otimes B \simeq K(i(A)) \otimes K(i(B))$, d'où

$$A \otimes B \simeq colim_{(k,f),(k',f') \in \mathcal{C}_0^A \times \mathcal{C}_0^B} k \otimes k' \simeq K(F)$$

où $F := i(A) \times i(B)$.

♦

ix. Le morphisme $u \otimes Id_C$ se factorise naturellement par $Im(u) \otimes C$ qui admet comme ensemble générateur $i(Im(u)) \times i(C)$. Or le morphisme $i(A) \times i(C) \to i(Im(u)) \times i(C)$ est surjectif. On en déduit que l'image de $u \otimes Id_C$ est isomorphe à l'image de $Im(u) \otimes C \to B \otimes C$. Cette image est par définition le sous objet de $B \otimes C$ engendré par $i(Im(u)) \times i(C)$.

♦

x. On commence par montrer que la colimite des X_G est un sous objet de X. Comme le foncteur de Yoneda $i : \mathcal{C} \to Pr(\mathcal{C}_0)$ commute aux colimites filtrantes, il suffit de calculer cette colimite dans $Pr(\mathcal{C}_0)$. On a $colim(X_G)_k \simeq Colim((X_G)_k)$. Les $(X_G)_k$ étant des sous objets de X_k, leur colimite est elle même un sous objet de X_k. Ceci étant vrai pour tout k, on obtient donc que la colimite des X_G est un sous objet de X dans $\mathcal{C}$. De plus, tout élément de $i(X)$ appartient à l'un des $i(X_G)$ et par conséquent à la colimite. Leurs préfaisceaux sous-jacent étant isomorphes, X est isomorphe par conservativité à la colimite des X_G.

♦

xi. On considère $\mathcal{I}$ la catégorie dont les objets sont les sous-ensembles finis de I et les morphismes sont les inclusions et $G : \mathcal{I} \to Sub(X)$ qui envoi J sur X_J et qui envoi une inclusion sur le monomorphisme correspondant. On a alors $X \simeq Colim(G)$ car $Colim(G)$ contient la famille génératrice F. X étant de présentation finie, on en déduit qu'il existe J fini tel que cet isomorphisme se factorise par X_J. Le morphisme $X_J \to X$ est donc un monomorphisme et un épimorphisme scindé, c'est donc un isomorphisme (lemme 1.1.6). La sous-famille finie $(f_j)_{j \in J}$ engendre donc X.

♦

1.5 Catégories Enrichies

Dans cette partie, $\mathcal{C}$ sera une catégorie monoïdale symétrique fermée. Toutes les notions dont on va avoir besoin se trouvent dans [K]. On va regarder des catégories enrichies sur $\mathcal{C}$ que l'on va appeler $\mathcal{C}$-catégories. Suivant la notation standard, les notions enrichies seront précédés du préfixe $\mathcal{C}$-. Une $\mathcal{C}$-catégorie à une catégorie sous-jacente dont les *Homs* sont les images par $(-)_0$ des *Homs* enrichis. Le foncteur $(-)_0 := Hom_{\mathcal{C}}(1,-)$ joue donc ici un rôle important, en particulier, on a toujours $\underline{Hom}_{\mathcal{C}}(1,-) \simeq Id$.

Definition 1.5.1. Une $\mathcal{C}$-catégorie $\mathcal{B}$ est la donnée d'un ensemble d'objets $ob(\mathcal{B})$, pour chaque couple d'objets (X,Y), d'un objet de $\mathcal{C}$ $\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y)$, pour tout objet X dans $\mathcal{C}$, d'un morphisme 'identité' $i : 1 \to \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,X)$ et d'une loi de composition

$$M_{X,Y,Z} : \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Z) \otimes \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y) \to \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Z)$$

vérifiant pour W,X,Y,Z dans $\mathcal{B}$:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Z)\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(W,X) \arrow[rddd, bend left, "M_{W,X,Z}"] & \\
(\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Z)\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y))\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(W,X) \arrow[u, "M_{X,Y,Z}\otimes Id"] \arrow[d, "a"] & \\
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Z)\otimes(\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y)\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(W,X)) \arrow[d, "Id\otimes M_{W,X,Y}"] & \\
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Z)\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(W,Y) \arrow[r, "M_{W,Y,Z}"] & \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(W,Z)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Z)\otimes 1 \arrow[rd, "r"] \arrow[dd, "Id\otimes i"] & & \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Y)\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Z) \arrow[ld, "M_{Y,Y,Z}"'] \\
& \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Z) & \\
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Z)\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Z,Z) \arrow[ru, "M_{Y,Z,Z}"] & & 1\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Z) \arrow[lu, "l"'] \arrow[uu, "i\otimes Id"']
\end{tikzcd}
$$

Remarque 1.5.2. Une $\mathcal{C}$-catégorie admet une catégorie sous-Jacente. Les objets de cette catégorie sont les mêmes et les morphismes sont donnés par $Hom_{\mathcal{B}}(X,Y) = \underline{Hom}_B(X,Y)_0$. Dans les cas qui vont nous intéresser, la structure sous-jacente sera toujours explicite et il n'est donc pas nécessaire de la définir à partir de la structure enrichie. De plus nous noterons la catégorie sous-jacente et la catégorie enrichie de la même façon.

Donnons maintenant les définitions essentielles concernant le cadre enrichi.

Definition 1.5.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale.

- ▷ Un $\mathcal{C}$-foncteur de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ est la donnée pour tout objet X de $\mathcal{B}$ d'un objet $F(X)$ de $\mathcal{B}'$ et pour tout couple d'objet (X,Y) de $\mathcal{B}$ d'un morphisme dans $\mathcal{C}$

$$\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y) \xrightarrow{F_{X,Y}} \underline{Hom}_{\mathcal{B}'}(F(X),F(Y))$$

tel que, pour $X,Y,Z \in \mathcal{B}$, les diagrammes suivant commutent

$$
\begin{tikzcd}
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y)\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y,Z) \arrow[r, "M_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "F_{X,Y}\otimes F_{Y,Z}"'] & \underline{Hom}_{\mathcal{B}'}(F(X),F(Y))\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}'}(F(Y),F(Z)) \arrow[d, "M_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \\
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Z) \arrow[r, "F_{X,Z}"'] & \underline{Hom}_{\mathcal{B}'}(F(X),F(Z))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y) \arrow[rr, "F_{X,Y}"] & & \underline{Hom}_{\mathcal{B}'(F(X),F(Y))} \\
& 1 \arrow[lu, "i"] \arrow[ru, "i"'] &
\end{tikzcd}
$$

- ▷ Un $\mathcal{C}$-foncteur $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ est $\mathcal{C}$-pleinement fidèle si pour tout $X,Y \in \mathcal{B}$, $F_{X,Y}$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}$.

- ▷ Une $\mathcal{C}$-transformation naturelle entre deux $\mathcal{C}$-foncteurs F et G de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ est la donnée pour chaque X dans $\mathcal{B}$ d'un morphisme $n_X : 1 \to \underline{Hom}_{\mathcal{B}'}(F(X),G(X))$ vérifiant:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y) \arrow[r, "l^{-1}"] \arrow[d, "r^{-1}"'] & 1\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y) \arrow[d, "n_Y\otimes F_{X,Y}"] \\
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y)\otimes 1 \arrow[d, "S(X,Y)\otimes n_X"'] & \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(F(Y),G(Y))\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),F(Y)) \arrow[d, "M_{F(X),F(Y),G(Y)}"] \\
\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(G(X),G(Y))\otimes\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),G(X)) \arrow[r, "M_{F(X),G(X),G(Y)}"'] & \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(F(X),G(Y))
\end{tikzcd}
$$

▷ Une équivalence de $\mathcal{C}$-catégorie est la donnée d'un $\mathcal{C}$-foncteur $\mathcal{C}$-pleinement fidèle dont le foncteur sous-jacent est essentiellement surjectif.

▷ Un $\mathcal{C}$-foncteur $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ est adjoint à gauche s'il existe un foncteur $G : \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$, et des transformation naturelles $\eta : Id \to GF$ (unité) et $\epsilon : FG \to Id$ (counité) satisfaisant les égalités triangulaires $G\epsilon.\eta G = Id$ et $\epsilon F.F\eta = Id$.

Il existe une autre définition équivalente (cf [K]), comme dans le cas des ensembles. Pour tout $B \in \mathcal{B}, B' \in \mathcal{B}'$ on a ainsi un isomorphisme dans $\mathcal{C}$

$$\underline{Hom}_B(B, G(B')) \backsimeq \underline{Hom}_{B'}(F(B), B')$$

qui fait commuter des diagrammes décrit dans [K], 1.7 que nous n'avons pas besoin de décrire ici.

On a alors aussi besoin de la notion de $\mathcal{C}$-module qui est liée à celle de $\mathcal{C}$-catégorie.

Definition 1.5.4. Un $\mathcal{C}$-module est la donnée de:

i. une catégorie $\mathcal{B}$

ii. un foncteur $\mathcal{C} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ qui envoi (X, Y) sur $X \otimes_{ext} Y$

iii. Des isomorphismes naturels dans $\mathcal{B}$, pour (X, Y, Z) dans $\mathcal{C}^2 \times \mathcal{B}$

$$b_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes_{ext} Z \to X \otimes_{ext} (Y \otimes_{ext} Z)$$
$$e_Z : 1 \otimes_{ext} Z \to Z$$

Tels que les diagrammes suivants commutent $\forall W, X, Y, Z \in \mathcal{C}^3 \times \mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd}
 & (W \otimes X) \otimes_{ext} (Y \otimes_{ext} Z) \arrow[dr, "b_{W,X,Y\otimes Z}"] & \\
((W \otimes X) \otimes Y) \otimes_{ext} Z) \arrow[ur, "b_{W\otimes X,Y,Z}"] \arrow[d, "a_{W,X,Y}\otimes_{ext} Id_Z"] & & W \otimes_{ext} (X \otimes_{ext} (Y \otimes_{ext} Z)) \\
(W \otimes (X \otimes Y)) \otimes_{ext} Z \arrow[rr, "b_{W,X\otimes Y,Z}"] & & W \otimes_{ext} ((X \otimes Y) \otimes_{ext} Z) \arrow[u, "Id_W \otimes_{ext} b_{X,Y,Z}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes 1) \otimes_{ext} Z \arrow[rr, "b_{X,1,Z}"] \arrow[dr, "r_X \otimes_{ext} Id_Z"] & & X \otimes_{ext} (1 \otimes Z) \arrow[dl, "Id_X \otimes_{ext} e_Z"] \\
 & (X \otimes_{ext} Z) &
\end{tikzcd}$$

Definition 1.5.5. Un Morphisme de $\mathcal{C}$-module de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ est la donnée d'un foncteur F et pour tout (X, Y) dans $\mathcal{C} \times \mathcal{B}$ d'un isomorphisme naturel $v_{X,Y} : F(X \otimes_{ext} Y) \backsimeq X \otimes_{ext} F(Y)$ vérifiant, pour tout W, X, Y dans $\mathcal{C}^2 \times \mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd}
 & W \otimes_{ext} F(X \otimes_{ext} Y) \arrow[dr, "Id_W \otimes_{ext} v_{X,Y}"] & \\
F(W \otimes_{ext} (X \otimes_{ext} Y)) \arrow[ur, "v_{W,X\otimes_{ext} Y}"] & & W \otimes_{ext} (X \otimes_{ext} F(Y)) \\
F((W \otimes X) \otimes_{ext} Y) \arrow[u, "F(b_{W,X,Y})"] \arrow[rr, "v_{W\otimes X,Y}"] & & (W \otimes X) \otimes_{ext} F(Y) \arrow[u, "b_{W,X,F(Y)}"']
\end{tikzcd}$$

Definition 1.5.6. Une équivalence de $\mathcal{C}$-modules $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est la donné d'un morphisme de $\mathcal{C}$-modules F de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ essentiellement surjectif et pleinement fidèle.

Les catégories enrichies ont aussi une notion propre de limite et colimite, qui seront incontournables par la suite. Nous allons voir que cette notion est en fait assez proche de la notion classique de limite et de la notion d'objet exponentiel.

Definition 1.5.7. Limites et colimites enrichies

◇ Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{C}$-catégorie . Soient $\mathcal{K}$ une $\mathcal{C}$-catégorie petite et F un $\mathcal{C}$-foncteur de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{C}$. Soit G un $\mathcal{C}$-foncteur de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{B}$. Alors si le foncteur:

$$\Xi_{F,G} : \mathcal{B}^{op} \to \mathcal{C}$$

$$B \to \underline{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{K}}}(F, \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(B, G-))$$

est représentable par un objet $lim_F(G)$, on dit que G admet une $\mathcal{C}$-limite suivant F.

◇ Une $\mathcal{C}$-catégorie $\mathcal{B}$ est dite $\mathcal{C}$-complète si pour toute $\mathcal{C}$-catégorie petite $\mathcal{K}$, pour tout $\mathcal{C}$-foncteur F de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{C}$ et pour tout $\mathcal{C}$-foncteur de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{B}$, le foncteur $\Xi_{F,G}$ est représentable. On a alors une adjonction:

$$\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(B, lim_F(G)) \backsimeq \underline{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{K}}}(F, \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(B, G-))$$

◇ Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{C}$-catégorie. Soient $\mathcal{K}$ une $\mathcal{C}$-catégorie petite et F un $\mathcal{C}$-foncteur de $\mathcal{K}^{op}$ dans $\mathcal{C}$. Soit G un $\mathcal{C}$-foncteur de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{B}$. Alors si le foncteur:

$$\Omega_{F,G} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}^{\mathcal{K}}$$

$$B \to \underline{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{K}^{op}}}(F, \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(G-, B))$$

est représentable par un objet $colim_F(G)$, on dit que G admet une $\mathcal{C}$-colimite suivant F.

◇ Une $\mathcal{C}$-catégorie $\mathcal{B}$ est dite $\mathcal{C}$-cocomplète si pour toute $\mathcal{C}$-catégorie petite $\mathcal{K}$, pour tout $\mathcal{C}$-foncteur F de $\mathcal{K}^{op}$ dans $\mathcal{C}$ et pour tout $\mathcal{C}$-foncteur de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{B}$, le foncteur $\Omega_{F,G}$ est représentable. On a alors une adjonction:

$$\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(colim_F(G), B) \backsimeq \underline{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathcal{K}^{op}}}(F, \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(G-, B))$$

◇ Une $\mathcal{C}$-catégorie $\mathcal{K}$ est finie si l'ensemble de ses objets est fini et pour tout couple d'objets (X, Y), $\underline{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ est de présentation finie dans $\mathcal{C}$.

◇ Une $\mathcal{C}$-limite (resp $\mathcal{C}$-colimite) est finie si elle est indexée par un foncteur $F : \mathcal{K}(resp\mathcal{K}^{op}) \to \mathcal{C}'$ tel que $\mathcal{K}$ est fini et $\mathcal{C}'$ est une sous catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée d'objets de présentation finie. (dans le cas d'une catégorie ω-localement présentable, on aura toujours $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_0$.)

◇ Un $\mathcal{C}$-foncteur est $\mathcal{C}$-exact à gauche (resp à droite) si il commute aux $\mathcal{C}$-limites finies (resp aux $\mathcal{C}$-colimites finies). Il est $\mathcal{C}$-exact s'il est $\mathcal{C}$-exact à gauche et à droite.

◇ Si $\mathcal{K} = *$ est la $\mathcal{C}$-catégorie unité i.e. a un seul objet tel que $\underline{Hom}_{\mathcal{K}}(*, *) = 1$. Alors des $\mathcal{C}$-foncteurs $F : * \to \mathcal{C}$ et $G : * \to \mathcal{B}$ s'identifient respectivement à des objets $X \in \mathcal{C}$ et $B \in \mathcal{B}$ et on note $B^X := lim_F(G)$. Cet objet est appelé objet exponentiel, il joue une rôle dual a celui du produit tensoriel, en particulier $\underline{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B^X) \backsimeq \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(A, B))$.

Remarque 1.5.8. L'existence des $\mathcal{C}$-limites et son lien avec les limites et colimites classiques trouve une réponse dans les chapitres 2 et 3 de [K]. Nous allons maintenant étudier ce problème de façon détaillée.

Definition 1.5.9. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux $\mathcal{C}$-catégories. On leur associe une $\mathcal{C}$-catégorie $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ dont l'ensemble d'objet est $ob(\mathcal{A}) \times ob(\mathcal{B})$ et tel que pour tout couple $(X, Y), (Z, T) \in (ob(\mathcal{A}) \times ob(\mathcal{B}))^2$, $\underline{Hom}_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}((X, Y), (Z, T)) := \underline{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \otimes \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, T)$. (cf [K] 1.4)

Definition 1.5.10. Soient $T : \mathcal{K}^{op} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ un $\mathcal{C}$-foncteur et $A, B \in \mathcal{K}$.

◇ Le morphisme $\rho_{A,B} : T(A, A) \to \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B), T(A, B))$ est définit comme étant l'adjoint du morphisme

$$\underline{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B) \xrightarrow{T(A,-)} \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(T(A, A), T(A, B))$$

◇ Le morphisme $\sigma_{A,B} : T(B, B) \to \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B), T(A, B))$ est définit comme étant l'adjoint du morphisme

$$\underline{Hom}_{\mathcal{K}^{op}}(B, A) \xrightarrow{T(-,B)} \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(T(B, B), T(A, B))$$

◇ Le End de T, s'il existe, est définit par

$$\int_{K \in \mathcal{K}} T(K, K) := coker(\prod_{K \in \mathcal{K}} T(K, K) \underset{\sigma}{\overset{\rho}{\rightrightarrows}} \prod_{K, K' \in \mathcal{K}} \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(\underline{Hom}_{\mathcal{K}}(K, K'), T(K, K'))\ )$$

La notion de End va nous permettre de faire le lien voulu entre limites simples et limites enrichies, dans la mesure où il est définit uniquement à l'aide de limites et colimites simples.

Lemme 1.5.11. *[K]* 3.10
Soit $T : \mathcal{K}^{op} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ un $\mathcal{C}$-foncteur. Alors

$$\int_{K \in \mathcal{K}} T(K,K) \simeq lim_{\underline{Hom}_{\mathcal{K}}}(T).$$

A partir de ce lemme, on extrapole pour définir une notion de $Coend$ de la façon suivante

Definition 1.5.12. Soit $T : \mathcal{K}^{op} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ un $\mathcal{C}$-foncteur. Alors le $Coend$ de T est définit par

$$\int^{K \in \mathcal{K}} T(K,K) := colim_{\underline{Hom}_{\mathcal{K}}}(T)$$

On va maintenant voir dans les lemmes suivants que toute colimite ou limite enrichie peut s'exprimer sous certaines conditions à l'aide de End et de $Coend$.

Definition 1.5.13. Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{C}$-catégorie. Alors on dit que $\mathcal{B}$ est munie d'une structure de $\mathcal{C}$-module si elle les $\mathcal{C}$-colimite suivant le diagramme final $*$ sont représentables et si le foncteur

$$- \otimes_{ext} - : \mathcal{C} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$$
$$X, B \to X \otimes_{ext} B := Colim_X B$$

muni $\mathcal{B}$ d'une structure de $\mathcal{C}$-module.

Lemme 1.5.14. *[K]* 3.69, 3.70
Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{C}$-catégorie munie d'un structure de $\mathcal{C}$-module et admettant des objets exponentiels. Soit $\mathcal{K}$, une $\mathcal{C}$-catégorie petite. Soient $F : \mathcal{K} \to \mathcal{C}$, $F' : \mathcal{K}^{op} \to \mathcal{C}$ et $G : \mathcal{K} \to \mathcal{B}$ des $\mathcal{C}$-foncteurs.

- *La limite de G suivant F est donné par*

$$lim_F(G) \simeq \int_{K \in \mathcal{K}} G(K)^{F(K)}$$

- *La colimite de G suivant F' est donné par*

$$colim_F(G) \simeq \int^{K \in \mathcal{K}} F(K) \otimes G(K)$$

On en déduit donc le corollaire suivant

Corollaire 1.5.15. *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux $\mathcal{C}$-catégories bicomplètes munies de structures de $\mathcal{C}$-module et admettant des objets exponentiels. Soit $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ un $\mathcal{C}$-foncteur. On a les résultats suivants*

- ◇ *Si les colimites filtrantes sont exactes dans $\mathcal{C}$ et si $\mathcal{C}$ est ω-localement présentable, alors les colimites filtrantes sont $\mathcal{C}$-exactes dans $\mathcal{C}$.*
- ◇ *La $\mathcal{C}$-catégorie $\mathcal{B}$ est $\mathcal{C}$-bicomplète.*
- ◇ *Le $\mathcal{C}$-foncteur F commute aux $\mathcal{C}$-limites finies si et seulement si il commute aux limites finies et aux exponentiation par des objets de présentation finie.*
- ◇ *Le $\mathcal{C}$-foncteur F commute aux $\mathcal{C}$-limites petites si et seulement si il commute aux limites petites et aux exponentiation.*

En particulier, si on prend $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, cela implique que les $\mathcal{C}$-limites petites sont représentables dans $\mathcal{C}$.

Les Ends jouent aussi un rôle essentiel dans le chapitre 2 de [K] où est définie une version enrichie de la catégorie des foncteurs d'une catégorie enrichie $\mathcal{A}$ dans un catégorie enrichie $\mathcal{B}$. Nous rappelons ici cette définition.

Definition 1.5.16. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux catégories enrichies sur $\mathcal{C}$. Alors la catégorie enrichie des foncteurs enrichis de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, notée $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, admet pour objets les foncteurs enrichis de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ et pour deux foncteurs enrichis T, S, de l'objet de $\mathcal{C}$

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}](T,S) := \int_{A \in \mathcal{A}} \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(T(A), S(A)).$$

On donne maintenant la proposition que nous utiliserons par la suite pour mettre en évidence une équivalence enrichie.

Proposition 1.5.17. *Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{C}$-catégorie munie d'une structure de $\mathcal{C}$-module. Alors pour tout X dans $\mathcal{C}$ et B, B' dans $\mathcal{B}$, on a une adjonction:*

$$Hom_{\mathcal{B}}(X \otimes_{ext} B, B') \simeq Hom_{\mathcal{C}}(X, \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B'))$$

En particulier, si $\mathcal{B}'$ est une autre telle $\mathcal{C}$-catégorie, Toute équivalence de $\mathcal{C}$-module entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ induit une équivalence de $\mathcal{C}$-catégorie.

Preuve
L'adjonction est donnée par la structure de colimite enrichie de $X \otimes_{ext} B$ (cf[K]). Plus précisément, notons $*$ la catégorie à un objet et un morphisme Id_*, soit $F := * \to \mathcal{C}$, $G := * \to \mathcal{B}$ définis par $F(*) = X$ et $G(*) = B$. On obtient $X \otimes_{ext} B \simeq Colim_F(G)$. Si l'on suppose maintenant que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont équivalentes en tant que $\mathcal{C}$-module, notons H le foncteur qui réalise l'équivalence, on obtient

$$Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes_{ext} B, B') \simeq Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes_{ext} H(B), H(B'))$$

qui donne par adjonction, pour tout X:

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(B, B')) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(X, \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(H(B), H(B')))$$

D'où l'isomorphisme, par Yoneda.

♦

1.6 Théorie des Faisceaux Enrichis

Cette théorie, développée par Francis Borceux et Carmen Quinteiro en 1996, va permettre dans la suite de la thèse de mettre en évidence une correspondance entre les ouverts Zariski d'un monoïde commutatif A tels qu'ils sont définis dans [TV] et des filtres d'idéaux de A que nous nommerons *filtres de Gabriel* et qui nous permettrons de construire l'espace topologique de Zariski associé. Ces notions seront définies plus précisément dans la suite, quand nous étudierons cette question. Cette correspondance nous amènera au premier résultat de cette thèse, concernant la classification des ouverts Zariski d'un schéma affine.

La théorie des faisceaux enrichie se situe dans le cadre d'un catégorie de base $\mathcal{C}$ monoïdale fermée, ω-localement présentable, régulière au sens de Barr.

Introduisons maintenant les notions élémentaires de la théorie.

Definition 1.6.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique fermée ω-localement présentable et $\mathcal{B}$ une $\mathcal{C}$-catégorie . Une sous catégorie localisante de la catégorie enrichie des préfaisceaux enrichis $[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ est une sous-$\mathcal{C}$-catégorie pleine de $[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ telle que le foncteur inclusion ait un $\mathcal{C}$-adjoint à gauche $\mathcal{C}$-exact à gauche.

Vient maintenant la notion essentielle de la théorie, celle de topologie de Grothendieck enrichie, qui généralise la notion standard (cf 1.6.5).

Definition 1.6.2. Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{C}$-catégorie petite. Une $\mathcal{C}$-topologie de Grothendieck sur $\mathcal{B}$ est la donnée pour tout objet $B \in \mathcal{B}$ d'une famille $T(B)$ de sous objets, dans la catégorie des foncteurs de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$, notée $Fon(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, du $\mathcal{C}$-préfaisceau représentable h_B, satisfaisant aux axiomes suivants:

- ▹ Le $\mathcal{C}$-préfaisceau h_B est dans $T(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.
- ▹ Soient $A \in T(B)$, $k \in \mathcal{C}_0$ et $f \in \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(C, B)_k$ alors l'objet $f^{-1}(A)$ défini par le diagramme cartésien (dans $Fon(\mathcal{B}, \mathcal{C})$) ci-dessous est dans $T(C)$.

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, hook] & A^k \arrow[d, hook] \\ h_C \arrow[r] & h_B^k \end{tikzcd}$$

  Où le morphisme $h_C \to h_B^k$ est induit par adjonction par le morphisme $f : k \to \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(C, B)$.
- ▹ Soient $A \in T(B)$ et $C \hookrightarrow h_B$ tel que $\forall D \in \mathcal{B}, k \in \mathcal{C}_0, \forall f \in \underline{Hom}_{\mathcal{B}}(A, D)_k$ $f^{-1}(C) \in T(D)$, alors $C \in T(B)$.

Une notion de faisceau est alors associée à celle de topologie.

Definition 1.6.3. Soit $\mathcal{B}$ une petite catégorie munie d'une $\mathcal{C}$-topologie de Grothendieck T. Un $\mathcal{C}$-préfaisceau $P \in [\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ est un $(\mathcal{C}, T)$-faisceau si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $k \in \mathcal{C}_0$, $C \in T(B)$, tout morphisme $C \to P^k$ se relève de manière unique à h_B.

Nous allons maintenant donner une version abrégée du théorème démontrée par les auteurs. Cette version cible la partie du théorème dont nous allons par la suite avoir besoin.

Theoreme 1.6.4. *(Borceux-Quinteiro)*
Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{C}$-catégorie petite. Il y a une bijection entre les localisations de $[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ et les $\mathcal{C}$-topologies de Grothendieck sur $\mathcal{B}$. De plus, la localisation associée à une topologie T est exactement la $\mathcal{C}$-catégorie des $(\mathcal{C}, T)$-faisceaux.

Le lemme suivant permet de vérifier que cette théorie forme une généralisation de la théorie classique, lorsque $\mathcal{C} = Ens$. Notons avant d'énoncer ce lemme que nous avons choisi de fixer une sous catégorie génératrice formée des objets de présentation finie. Le travail de Borceux et Quinteiro est réalisé dans un cadre plus général où l'on suppose seulement que la catégorie génératrice est stable par produit tensoriel et contient l'unité. Ce degré de généralité est essentiel pour montrer que la théorie des faisceaux enrichis est une généralisation de la théorie usuelle des faisceaux.

Lemme 1.6.5. *Les notions de $\mathcal{C}$-topologie de Grothendieck et de $(\mathcal{C}, T)$-faisceau ne dépendent pas du choix de la catégorie génératrice $\mathcal{C}_0$ pour la catégorie presque ω-localement présentable $\mathcal{C}$.*

On remarque donc en particulier que dans Ens, on peut prendre $\mathcal{C}_0 = *$ la catégorie à un objet réduit à un point dont le seul morphisme est l'identité du point. On retrouve alors toutes les notions classiques de topologies de Grothendieck et faisceau.

Nous donnons enfin une description du foncteur faisceautisation donné par Borceux et Quinteiro.

Definition 1.6.6. Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{C}$-catégorie et $[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ sa catégorie de préfaisceaux. Soit T une topologie enrichie sur $\mathcal{B}$ et $Sh_T([\mathcal{B}, \mathcal{C}])$ la localisation associée. Alors on définit le foncteur

$$\Sigma_T : [\mathcal{B}, \mathcal{C}] \to Sh_J([\mathcal{B}, \mathcal{C}])$$
$$C \to Colim_{R \in T(C)} \underline{Hom}_{[\mathcal{B}, \mathcal{C}]}(R, P)$$

Proposition 1.6.7. *Soit $\mathcal{B}$ une C-catégorie et $[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ sa catégorie de préfaisceaux. Soit J une topologie enrichie sur $\mathcal{B}$ et $Sh_J([\mathcal{B}, \mathcal{C}])$ la localisation associée. Alors l'adjoint à gauche de l'oubli est donné par le foncteur $\Sigma_T \Sigma_T$.*

1.7 Géométrie Relative

Dans cette section, nous allons donner les bases de la théorie géométrique relative définie dans [TV]. On sa donne une catégorie monoïdale symétrique fermée $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ bicomplète.

Definition 1.7.1. La catégorie des schémas affines est $Aff_{\mathcal{C}} := Comm(\mathcal{C})^{op}$. Suivant les notations initiées dans [TV], on notera symboliquement $Spec(A)$ le schéma affine correspondant au monoïde commutatif $A \in Comm(C)$.

Nous commençons par donner la définition d'ouvert Zariski et de topologie de Zariski.

Definition 1.7.2. Soient $f : Spec(B) \to Spec(A) \in Aff_{\mathcal{C}}$

- ▷ Le morphisme f est plat si le foncteur $- \otimes_A B : A - mod \to B - mod$ est exact.
- ▷ Le morphisme f est $\mathcal{C}$-plat si le foncteur $- \otimes_A B : A - mod \to B - mod$ est $\mathcal{C}$-exact (cf 1.5.15).
- ▷ Le morphisme f est un épimorphisme si pour tout $A' \in Comm(\mathcal{C})$, le morphisme $f^* : Hom_{Comm(\mathcal{C})}(B, A') \to Hom_{Comm(\mathcal{C})}(A, A')$ est injectif.
- ▷ Le morphisme f est un ouvert Zariski formel (ou une immersion Zariski ouverte formelle) si le morphisme correspondant $A \to B \in Comm(\mathcal{C})$ est un épimorphisme $\mathcal{C}$-plat.
- ▷ Le morphisme f est un ouvert Zariski (ou une immersion Zariski ouverte) si c'est un ouvert Zariski formel tel que le morphisme correspondant $A \to B \in Comm(\mathcal{C})$ est de présentation finie.

Definition 1.7.3. Une famille de morphismes $(Spec(A_i) \to Spec(A))_{i \in I}$ dans $Aff_{\mathcal{C}}$ est un recouvrement Zariski si

- ▷ Le morphisme $Spec(A_i) \to Spec(A)$ est un ouvert Zariski $\forall i \in I$.
- ▷ Il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$, tel que le foncteur

$$\prod_{j\in J} -\otimes_A A_j : A-mod \to \prod_{j\in J} A_j - mod$$

est conservatif.

Remarque 1.7.4. Cette famille de recouvrements définit une prétopologie de Grothendieck. La topologie associé ,nommée *Topologie de Zariski* sera l'outil de base de construction des schémas relatifs. Cette topologie est sous canonique (cf [TV] proposition 2.5). Le foncteur de Yoneda $h : Aff_{\mathcal{C}} \to Pr(Aff_{\mathcal{C}})$ se factorise donc en un foncteur pleinement fidèle $h : Aff_{\mathcal{C}} \to Sh(Aff_{\mathcal{C}})$, où $Sh(Aff_{\mathcal{C}})$ est la catégorie des faisceaux sur $Aff_{\mathcal{C}}$ pour la topologie de Zariski.

Les schémas relatifs vont être définis comme des faisceaux possédant un recouvrement Zariski par des schémas affines. Il va donc falloir introduire cette notion de recouvrement pour les faisceaux.

Definition 1.7.5. Ouverts Zariski dans $Sh(Aff_{\mathcal{C}})$.

- ▷ Soient $X \in Aff_{\mathcal{C}}$ et $F \hookrightarrow X \in Sh(Aff_{\mathcal{C}})$ un sous faisceau de X. F est un ouvert Zariski de X si il existe un famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ d'ouverts Zariski affines de X tels que F soit l'image du morphisme de faisceaux $\coprod_{i\in I} X_i \to X$.
- ▷ un morphisme $f : F \to G \in Sh(Aff_{\mathcal{C}})$ est un ouvert Zariski si pour tout X affine et tout morphisme $X \to G$, le morphisme induit $F \times_G X \to X$ est un monomorphisme d'image un ouvert Zariski de X.

Lemme 1.7.6. *(de cohérence)*

- ◇ *Les ouverts Zariski sont stable par changement de base et composition.*
- ◇ *Un morphisme $f : X \to Y \in Aff_{\mathcal{C}}$ est un ouvert Zariski au sens de 1.7.2 si et seulement si c'est un ouvert Zariski au sens de 1.7.5.*

Preuve: cf [TV].

On peut maintenant donner la définition de schéma.

Definition 1.7.7. Un faisceau $F \in Sh(Aff_{\mathcal{C}})$ est un *schéma relatif* à $\mathcal{C}$ si il existe une famille $(X_i)_{i\in I} \in Aff_{\mathcal{C}}$ telle que pour tout i, il existe $X_i \to F$, vérifiant

- ▷ Le morphisme induit $p : \coprod_{i\in I} X_i \to F$ est un épimorphisme de faisceau.
- ▷ Le morphisme $X_i \to F$ est un ouvert Zariski de F pour tout i.

Une telle famille de morphismes est appelée un recouvrement Zariski affine de F.

On notera $Sch(\mathcal{C})$ la sous catégorie pleine de $Sh(Aff_{\mathcal{C}})$ formée des schémas relatifs. Notons que cette définition d'atlas affine est bien cohérente dans le sens où un atlas affine quasi-compact d'un schéma affine n'est rien d'autre qu'un recouvrement pour la topologie de Zariski. Nous démontrons cela dans le lemme suivant.

Lemme 1.7.8. *Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$ et $(A_i)_{i\in I} \in Comm(\mathcal{C})$ une famille finie d'ouverts Zariski de A. Alors le foncteur induit $F : A - mod \to \prod_{i\in I} A_i - mod$ est conservatif si et seulement si le morphisme $p : \coprod_{i\in I} Spec(A_i) \to Spec(A)$ est un épimorphisme de faisceaux.*

Preuve
Supposons tout d'abord que F soit conservatif. Alors les $X_i := Spec(A_i)$ forment un recouvrement Zariski de $X = Spec(A)$. Soit donc $Y \to X \in Aff_{\mathcal{C}}$, la famille $(Y_i := Y \times_X X_i)_{i\in I}$ forme par changement de base un recouvrement Zariski de Y. Et chaque morphisme Y_i se factorise par X_i donc par $\coprod_{i\in I} X_i$, donc p est un épimorphisme de faisceau.

Supposons maintenant que p est un épimorphisme. Considérons le morphisme Id_X, alors il existe un recouvrement Zariski $(Y_j := Spec(B_j))_{j\in J}$ de X tel que les morphismes $Y_j \to X$ se factorisent par $\coprod_{i\in I} X_i$. On considère le sous recouvrement formé par les $Spec(B_{i,j}) := Y_{i,j} := Y_j \times_{\coprod_{i\in I} X_i} X_i$. La famille $(X_i)_{i\in I}$ étant couvrante pour $\coprod_{i\in I} X_i$, on en déduit que pour tout j, $(Y_{i,j})_{i\in I}$ est couvrant pour Y_j. Par composition $(Y_{i,j})_{i,j\in I\times J}$ forme un recouvrement de X. Finalement si un morphisme de A-mod envoi par F sur un isomorphisme, il envoi sur un isomorphisme dans $\prod_{i,j\in I\times J} B_{i,j} - mod$ et est donc lui même un isomorphisme. F est donc conservatif.

♦

Proposition 1.7.9. *Quelques propriétés sur les schémas relatifs données dans [TV].*

- ◇ *Un ouvert Zariski d'un schéma est un schéma.*
- ◇ *Un morphisme de schémas $f : F \to G$ est un ouvert Zariski si et seulement si*

- ○ *Le morphisme f est un monomorphisme.*
- ○ *Le schéma F admet un recouvrement Zariski affine $(X_i \to F)_{i\in I}$ tel que chaque morphisme $X_i \to G$ soit un ouvert Zariski.*

◇ *La sous catégorie $Sch(\mathcal{C})$ de $Sh(Aff_{\mathcal{C}})$ est stable par réunion disjointe et produit fibré.*

◇ *Soit $(F_i)_{i\in I} \in Sh(Aff_{\mathcal{C}})$ alors pour tout i, le morphisme $F_i \to \coprod_{i\in I} F_i$ est un ouvert Zariski.*

◇ *Soit $F \to G \in Sh(Aff_{\mathcal{C}})$ avec $G \in Sch(\mathcal{C})$. Si il existe un recouvrement Zariski affine $(X_i)_{i\in I}$ de G tel que pour tout i, $F \times_G X$ est un schéma, alors F est un schéma.*

1.8 Schémas Relatifs à $\mathbb{Z}$-mod

Nous rappelons brièvement dans cette partie le recollement de la théorie des schémas relatifs et de la théorie usuelle des schémas au dessus de $\mathbb{Z}$ lorsque la catégorie de base est $(\mathbb{Z}-mod, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$. On notera Ann la catégorie des anneaux commutatifs, $Sch(\mathbb{Z})$ la catégorie des schémas relatifs à $\mathbb{Z}-mod$ et $Aff_{\mathbb{Z}}$ la catégorie Ann^{op}. On notera Sch la catégorie usuelle des $\mathbb{Z}$-schémas et Aff la catégorie usuelle des $\mathbb{Z}$-schémas affines.

Definition 1.8.1. Soit $F \in Sch(\mathbb{Z})$. On définit l'ensemble des points de F par $|F| := E(F)/\sim$ où $E(F)$ est l'ensemble des couples (K, x) où K est un corps et $x \in F(Spec(K))$ et où $\sim$ est la relation d'équivalence donné par $(K, x) \sim (K', x')$ si et seulement si il existe L un corps et $i : K \to L$, $j : K' \to L$ tels que $F(i)(x) = F(j)(x')$. Cela définit un foncteur $|-| : Sch(\mathbb{Z}) \to Ens$.

Lemme 1.8.2. *Soit $u : F \to G \in Sch(\mathbb{Z})$ et $Spec(A) \in Aff_{\mathbb{Z}}$*

◇ *L'ensemble $|Spec(A)|$ est isomorphe à l'ensemble des idéaux premiers de A.*

◇ *Si u est une immersion Zariski ouverte alors $|u| : |F| \hookrightarrow |G|$.*

◇ *Si $|F| \simeq \emptyset$ alors $F \simeq \emptyset$.*

Preuve

- Soit $prem(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A. On considère le morphisme

$$\varphi : |X| \to prem(A)$$
$$(K, x) \to Ker(x)$$

On vérifie que ce morphisme est bien définit. L'idéal $Ker(x)$ est premier car K est un corps. et si $(K, x) \sim (K', x')$, K et K' s'injectent dans un même corps L par des morphismes qui égalisent x et x' donc $Ker(x) = Ker(x')$.
Montrons que ce morphisme est injectif. Soit (K, x) et (K', x') deux points tels que $ker(x) = ker(x') = p$. Alors K et K' s'injectent dans $L := K \otimes_{A/p} K'$ par un morphisme qui égalise x et x'. (K, x) et (K', x') sont donc équivalents. Montrons que ce morphisme est surjectif. Soit $p \in prem(A)$, alors $p = ker(A \to A_p \to A_p/p)$.

♦

- Supposons maintenant que u soit une immersion Zariski ouverte alors c'est en particulier un monomorphisme dans $Sch(\mathbb{Z})$, son image par E est donc un morphisme injectif. La compatibilité avec $\sim$ implique que le morphisme est toujours injectif pour $|-|$.

♦

- Supposons que $|F| \simeq \emptyset$, alors soit $(X_i)_{i\in I}$ un atlas affine de F, on a d'après le point précédent $|X_i| = \emptyset$ pour tout i. Donc d'après le premier point, les A_i tels que $X_i = Spec(A_i)$ n'ont pas d'idéaux premiers propres, ils sont donc nuls. Enfin, on a un épimorphisme $\emptyset \simeq \coprod_{i\in I} X_i \to F$ donc F est initial dans $Sch(\mathbb{Z})$, par conséquent $F \simeq \emptyset$.

♦

On doit maintenant définir une topologie sur l'ensemble des points. Pour cela remarquons que la catégorie des ouverts Zariski d'un objet $F \in Sch(\mathbb{Z})$, dont les morphismes sont les immersions Zariski ouvertes, notée $Ouv(F)$, est un lieu. Une intersection de deux ouverts Zariski X_1, X_2 de F est donné par $X_1 \cap X_2 := X_1 \times_F X_2$, une union d'ouverts est donnée par la définition suivante

Definition 1.8.3. Soit $F \in Sch(\mathbb{Z})$ et $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts Zariski de F. Alors l'union des X_i est donné par l'image au sens des faisceaux du morphisme de faisceaux $p : \coprod_{i\in I} X_i \to X$, notée $\cup_{i\in I} U_i$.

Il est alors intéressant de remarquer que cette union s'obtient en fait par le conoyau dans $Sch(\mathbb{Z})$(cf 1.4.17)

$$\cup_{i\in I} X_i := coker(\coprod_{i,j\in I^2} X_i \cap X_j \rightrightarrows \coprod_{i\in I} X_i)$$

Lemme 1.8.4. *Le foncteur $|-| : Ouv(F) \to P(|F|)$ commute aux sommes petites et aux produits finis.*

Preuve
Le foncteur $|-|$ commute aux limites finies dans $Sch(\mathbb{Z})$ car pour tout corps K, le foncteur $Hom_{Sch(\mathbb{Z})}(Spec(K), -)$ commute aux limites petites, et $|-|$ est définit par la colimite filtrante de cette famille de foncteurs, indexée par une famille petite de classes d'équivalences de corps, donc commute aux limites finies. On en déduit que $|-|$ commute aux produits finis.

Pour les unions petites, prenons $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts Zariski de F. On a un monomorphisme $X_i \to \cup_{i\in I} X_i$ que l'on met en évidence en écrivant la réunion comme une limite. il induit un morphisme injectif $|X_i| \hookrightarrow |\cup_{i\in I} X_i|$ pour chaque i et il y a donc un morphisme résultant $\cup_{i\in I}|X_i| \hookrightarrow |\cup_{i\in I} X_i|$. Montrons qu'il est surjectif. Soit $x : Spec(K) \to X := \cup_{i\in I} X_i$ un point de X. Soit $Z_i := Spec(K) \times_X X_i$, alors par changement de base, c'est un ouvert Zariski de $Spec(K)$, ils sont donc vide ou isomorphes à $Spec(K)$. Supposons qu'ils soient tous vides, en remarquant que par changement de base, $\emptyset \simeq \coprod_{i\in I} Z_i \to Spec(K)$ est un épimorphisme, on en déduit $Spec(K) \simeq \emptyset$, ce qui est absurde. Par conséquent, il existe $i \in I$ tel que x se factorise par X_i i.e. est un point dans $|X_i|$. Finalement $|\cup_{i\in I} X_i| \simeq \cup_{i\in I}|X_i|$.

♦

Remarque 1.8.5. Si F est un schéma qui admet un atlas affine $(X_i)_{i\in I}$, on obtient alors $F \simeq \cup_{i\in I} X_i$. cela étant vrai pour tout sous schéma ouvert de F, les ouverts affines forment une base d'ouvert de $|F|$.

Definition 1.8.6. Soit $F \in Sch(\mathbb{Z})$, on définit une topologie τ sur $|F|$ dont les ouverts sont les images par $|-|$ des ouverts Zariski de F. L'ensemble $|F|$ muni de la topologie τ est appelé l'espace topologique sous-jacent à F et est noté $|F|$. Une base de cette topologie est donné par les images par $|-|$ des ouverts affines de F.

Remarque 1.8.7. on retrouve bien par cette méthode les ouverts au sens usuel d'un schéma affine. En effet, les ouverts affines $Spec(B)$ d'un schéma affine $Spec(A)$ sont exactement les spectres des anneaux B tels que $A \to B$ soit un épimorphisme plat de présentation finie. La platitude enrichie étant ici équivalente à la platitude simple. Les affines formant une base d'ouverts, cette définition redonne tous les ouverts au sens usuel d'un schéma affine et définit un isomorphisme sur les catégories Ouv associées. Notons que l'on retrouve aussi les ouverts d'un schéma non affine, car ceux-ci sont définis à partir des ouverts des schémas affines (1.7.5).

Definition 1.8.8. Soit $F \in Sch(\mathbb{Z})$, On définit le faisceau structurel en anneau commutatif $\mathcal{O}_F$ sur les ouverts affines.

$$\mathcal{O}_F : Ouv(|F|) \to Ann$$
$$|U| \to A \text{ si } U = Spec(A)$$

Cette définition s'étend naturellement à tout ouvert par recollement.

Definition 1.8.9. Soit F un schéma. L'espace topologique $|F|$ muni du faisceau $\mathcal{O}_F$ est appelé l'espace annelé sous-jacent au schéma F.

Theoreme 1.8.10. *La catégorie des $\mathbb{Z}$-schémas est équivalente à la catégorie $Sch(\mathbb{Z})$. L'équivalence est donnée par jeu de foncteurs suivant*

$$\begin{tikzcd} Sch(\mathbb{Z}) \arrow[r, shift left, "|-|"] & Sch \arrow[l, shift left, "h"] \end{tikzcd}$$

où $h : Sch \to Pr(Sch) \to Pr(Aff_{\mathbb{Z}})$ est le foncteur de Yoneda.

Ebauche de preuve
Pour définit correctement le foncteur de Yoneda de Sch, il faut préciser quelles sont les familles couvrantes dans Sch qui prolongent la topologie de Grothendieck sur $Aff_{\mathbb{Z}}$. En se référant au lemme 1.7.8, il est clair que les atlas affine quasi-compacts, i.e. dont on peut extraire un sous recouvrement fini, prolonge naturellement la topologie de $Aff_{\mathbb{Z}}$. Si $X \in Sch$, et $(U_i)_{i\in I}$ est une famille couvrante de X, on a alors $X \simeq \cup_{i\in I} U_i$. En effet $\cup_{i\in I} U_i \to X$ est clairement un épimorphisme de faisceaux et c'est aussi un monomorphisme. C'est donc un isomorphisme. En prenant l'image par $Hom_{Sch}(-, X)$ du conoyau qui définit la réunion (1.4.17), on obtient que h_X est un faisceau. Montrons maintenant que c'est un schéma relatif. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un atlas affine de X, on a un morphisme $p : \coprod_{i\in I} h_{U_i} \to h_X$ induit par les immersions ouvertes $U_i \to X$. Soit Y un schéma affine et $f : Y \to X$, alors la famille $(h_{U_i} \times_{h_X} h_Y)_{i\in I}$ est un

recouvrement Zariski de h_Y tel que les morphismes $h_{U_i} \times_{h_X} h_Y \to h_X$ se factorisent par p. On en déduit que p est un épimorphisme de faisceau. En remarquant enfin que pour tout schéma affine Y, le changement de base $h_{U_i} \times_{h_X} h_Y$ est un ouvert Zariski de h_Y, on obtient que h_{U_i} est un ouvert Zariski de h_X pour tout i. En particulier h préserve les ouverts affine d'un schéma.

On a donc montré que le foncteur de Yoneda se factorisait en un foncteur $h : Sch \to Sch(\mathbb{Z})$. On peut alors montrer que ce foncteur reste pleinement fidèle en se ramenant aux affines.

Il nous reste à voir que ce foncteur est essentiellement surjectif. Remarquons que en nous restreignant aux schémas affines, il est bien connu que $Aff_{\mathbb{Z}} \simeq Aff$. Soit $F \in Sch(\mathbb{Z})$, on a en particulier une équivalence entre les sous catégories pleines de $Ouv(F)$, $Ouv(|F|)$ et $Ouv(h_{|F|})$ formées des ouverts affines. Plus généralement, on a $Ouv(F) \simeq Ouv(|F|)$. de plus, si U est un ouvert de F, alors $h_{|U|} \to h_{|F|}$ est un monomorphisme par lequel tout ouvert affine de $h_{|U|}$ envoi sur un ouvert affine de $h_{|F|}$, par 1.7.9 c'est donc un ouvert de $h_{|F|}$. On obtient donc $Ouv(F) \hookrightarrow Ouv(h_{|F|})$. Or ces deux catégories sont des catégories d'ouverts d'espaces topologiques ayant la même base d'ouverts, donc sont équivalentes.

De plus, si F s'écrit comme l'union $\cup X_i$ où les $X_i := Spec(A_i)$ sont affines, alors $|F| \simeq \cup|X_i|$. Soit donc $A \in Comm(\mathcal{C})$, $X = Spec(A)$, on a un morphisme naturel

$$\varphi_A : F(A) \simeq Hom_{Sch(\mathbb{Z})}(h_X, F) \to h_{|F|}(A) = Hom_{Sch}(X, |F|)$$
$$f \to |f|$$

On vérifie que ce morphisme est bijectif en utilisant le fait qu'il est bijectif sur les affines.

♦

1.9 Catégories de Modèles Compactement Engendrées

On donne dans cette section les résultats démontrés dans [HAGII].

Definition 1.9.1. Soit M une catégorie de modèles simpliciale engendrée par cofibrations et I l'ensemble des cofibrations génératrices.

i. Un objet $X \in I - cell$ est strictement fini si il existe une suite finie

$$\emptyset = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n = X$$

et $\forall\, i$ un pushout :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r] \arrow[d] & X_{i+1} \arrow[d] \\ A \arrow[r, "u_i"'] & B \end{tikzcd}$$

où $u_i \in I$.

ii. Un objet $X \in I - cell$ est fini si il est faiblement équivalent à un objet strictement fini.

iii. Un objet X est homotopiquement de présentation finie si pour tout diagramme filtrant Y_i, le morphisme :

$$Hocolim_i Map(X, Y_i) \to Map(X, Hocolim_i Y_i)$$

est un isomorphisme dans $Ho(sEns)$

iv. Une catégorie de modèles simpliciale M est compactement engendrée si elle est cellulaire, si les colimites filtrantes y sont exactes, si elle est engendrée par cofibrations et si les domaines et les codomaines des cofibrations génératrices et des cofibrations génératrices triviale sont cofibrants, ω-compact et ω-petit (Relativement à M).

Proposition 1.9.2. *Soit M une catégorie de modèles compactement engendrée.*

i. Pour tout diagramme filtrant X_i, Le morphisme naturel $Hocolim_i X_i \to Colim_i X_i$ est un isomorphisme in $Ho(M)$.

ii. Les objets homotopiquement de présentation finie dans M sont exactement les objets faiblement équivalent à des rétracts d'objets de $I - cell$ strictement finis.

Chapitre 2

Structures algébriques relatives

On se donne pour tout ce chapitre un contexte relatif $\mathcal{C}$, dont on rappelle ici la définition.

Definition 2.0.3. Soit $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ une catégorie monoïdale. On dira que $\mathcal{C}$ est un contexte relatif si

- ▷ La catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est symétrique fermée.
- ▷ La catégorie $\mathcal{C}$ est bicomplète.
- ▷ La catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ est ω-localement présentable.
- ▷ La catégorie $\mathcal{C}$ est régulière au sens de Barr.
- ▷ La catégorie $\mathcal{C}$ respecte les images.

Dans ce chapitre, on se donne un contexte relatif $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$. Dans cette partie nous allons montrer que les objets usuels de l'algèbre commutative, i.e. idéaux, localisations par un élément, peuvent être définis dans $\mathcal{C}$ et nous allons ensuite étudier plus en détail le problème de l'existence d'un espace topologique de Zariski associé à un schéma relatif et de sa description.

Remarque 2.0.4. Donnons ici quelques contextes connus qui sont ou ne sont pas des contextes relatifs.

- ◇ La catégorie $(\mathbb{Z} - mod, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ définit un contexte relatif de catégorie de base abélienne.
- ◇ La catégorie $(\mathbb{N} - mod, \otimes_{\mathbb{N}}, \mathbb{N})$ définit un contexte relatif dit "semi-additif" (En particulier ses sommes sont des produits d'ensembles).
- ◇ La catégorie $(Ens, \times, \mathbb{F}_1)$ définit un contexte relatif.
- ◇ La catégorie $(\mathbb{Z} - mod \times Ens, \otimes^{\mathcal{L}}, (\mathbb{Z}, \mathbb{F}_1)$ définit un contexte relatif pour les préschémas logarithmiques où le produit tensoriel est donné par $(M, E) \otimes^{\mathcal{L}} (M', E')) = (M \otimes_{\mathbb{Z}} M', E \times E')$. Il est à noter qu'un effort supplémentaire est à fournir si l'on veut se restreindre aux schémas logarithmiques.
- ◇ La catégorie $(\mathbb{Z} - mod^{diff}, \otimes, (\mathbb{Z}, 0))$ définit un contexte pour les schémas différentiels qui n'est pas un contexte géométrique. Le produit tensoriel d'objet de présentation finie n'est pas de présentation finie. Cela implique en particulier que toute localisation différentielle d'un anneau A par un de ses élément f n'est pas plate au sens enrichi. Il est néanmoins possible d'étudier ce contexte car cela signifie qu'il y a moins d'ouverts Zariski et il est fortement probable qu'en se restreignant aux localisations différentielles qui sont des ouverts, on retrouve une base d'ouvert pour l'espace Zariski associé.

2.1 Modules et Idéaux

Rappelons pour commencer que d'après 1.4.22, les catégories de modules sur une algèbre données sont des contextes relatifs. Tous les résultats sur la notion d'image sont donc valables, notamment ses deux définitions équivalentes 1.4.13, 1.4.17 ou encore le fait que l'image dans les algèbres d'un morphisme d'algèbre est isomorphe à l'image dans les modules de cet objet (1.4.24). Il en est de même pour la notion de générateurs où l'on a aussi deux définition équivalentes 1.4.25 et 1.4.27 et quelques résultats (1.4.28).

Definition 2.1.1. Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$, $M \in A - mod$ et $\mathcal{C}_M$ la catégorie des couples (N, u) où $u : N \to M$ est un monomorphisme.

▷ Un sous-A-module de M est la donnée d'un classe d'isomorphismes de C_M. On note comme précédemment $Sub(M)$ la catégorie des sous A-modules de M.

▷ Un idéal de A est la donnée d'un sous-A-module de A.

Si q est un idéal de A, le monomorphisme associé sera noté $j_q : q \hookrightarrow A$. La catégorie des idéaux q de A, munie des monomorphismes j_q sera notée $I(A)$.

Remarque 2.1.2. Pour $A \in Comm(\mathcal{C})$, la catégorie $I(A)$ est un poset admettant des intersection finie et des unions petites. L'intersection de deux idéaux q, q' est donnée par $q \cap q' := q \times_A q'$ et l'union d'une famille d'idéaux $(q_i)_{i\in I}$ par l'image du morphisme naturel $p : \coprod_{i\in I} q_i \to A$ qui peut se voir comme un conoyau ou une limite (1.4.17).

Definition 2.1.3. Soient $u : A \to B \in Comm(\mathcal{C})$, $j_q : q \to A$ un idéal de A. Alors l'image du morphisme $m_B \circ ((u \circ j_q) \otimes Id_B) : q \otimes_A B \to B$ est un idéal de B que nous noterons qB.

Lemme 2.1.4. *Soient $u : A \to B \in Comm(\mathcal{C})$, $j_q : q \to A$ un idéal de A. L'ensemble sous-jacent de l'image du morphisme $u \circ j_q$ dans $A - mod$ est générateur dans $B - mod$ de qB, i.e. qB est le plus petit idéal de B dont les ensembles sous-jacents, q_k, contiennent les $Im(u \circ j_q)_k$, $k \in \mathcal{C}_0$. Autrement dit qB est le plus petit idéal de B contenant l'image de q au sens de 1.4.13.*

Preuve
L'idéal qB est définit comme étant la limite des sous objets de Y qui reçoivent $q \otimes_A B$ or par adjonction cela revient à dire qu'ils contiennent l'image de q au sens de 1.4.13. qB est donc le plus petit idéal de B qui contient l'image de q.
♦

Avant de démontrer des propriétés sur les idéaux d'un monoïde commutatif A, on va donner les définitions nécessaires à la compréhension de la notion de multiplication par un élément de A (i.e. de ses ensembles sous-jacents).

Definition 2.1.5. Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$, $f \in A_k$ et $M \in A - mod$

▷ On définit τ_f la multiplication par f dans A comme étant $\varphi(f) \in Hom_{A-mod}(A \otimes k, A)$ (cf 1.3.3). Lorsque $k = 1$ on retrouve bien le cas plus intuitif d'un endomorphisme de A.

▷ On définit la multiplication par f dans M par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A A \otimes k \arrow[r, "Id_M \otimes f"] \arrow[d, "r_M \otimes Id_k"'] & M \otimes_A A \arrow[d, "r_M"] \\ M \otimes k \arrow[r, "\tau_f"'] & M \end{tikzcd}$$

Remarquons que l'on peut regarder le diagramme commutatif suivant, où l'on oubli les produit tensoriels au dessous de A.

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes k \arrow[r, "Id_M \otimes f"] \arrow[d, "\mu_M \otimes Id_k"'] & M \otimes A \arrow[d, "\mu_M"] \\ M \otimes k \arrow[r, "\tau_f"'] & M \end{tikzcd}$$

et en particulier, τ_f peut se décomposer

$$M \otimes k \xrightarrow{i_A \circ r_M^{-1} \otimes Id_k} M \otimes A \otimes k \xrightarrow{Id_M \otimes f} M \otimes A \xrightarrow{\mu_M} M$$

Un phénomène limitatif se produit maintenant. L'ensemble A_0 est un monoïde commutatif dans les ensembles, par contre A_k n'a pas de structure naturelle de monoïde commutatif dans Ens. A_k sera en fait muni d'une structure de A_0-module. Nous avons les lemmes suivant.

Definition 2.1.6. Soit A un monoïde commutatif dans $\mathcal{C}$, on définit l'ensemble des éléments de A par $Elt(A) := (\coprod_{k\in\mathcal{C}_0}(A_k))/ \sim = Ob((\mathcal{C}_0^{i(A)}))/ \sim$ (cf def 1.4.3), où la somme est prise dans la catégorie des ensembles et où deux objets de $\mathcal{C}_0^{i(A)}$ sont équivalents s'ils sont isomorphes dans $\mathcal{C}_0^{i(A)}$.

Lemme 2.1.7. *Soit A un monoïde commutaitf dans $\mathcal{C}$, alors $Elt(A)$ est un monoïde commutatif dans les ensembles. Le produit est donné par*

$$\oslash : f, g \in A_k \times A_{k'} \to m_A \circ f \otimes g \in A_{k \otimes k'}.$$

Preuve
Il est clair que cela définit bien une loi de monoïde. LA commutativité de cette loi vient du fait que l'on à quotienter par les isomorphisme de $\mathcal{C}_0^{I(A)}$ et donc en particulier par les isomorphsimes structurels de symmétrie de $\mathcal{C}$ de la forme $S(k, k')$.

♦

Lemme 2.1.8. *Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$ alors A_0 est muni d'une structure de monoïde commutatif dans Ens et le morphisme d'adjonction $\varphi : A_0 \to End_{A-mod}(A)$ est un morphisme de monoïde commutatif dans Ens.*

Preuve
On définit un morphisme unité pour A_0 par $(i_A)_0$. Soit $f, g \in A_0$. On montre maintenant que φ est un morphisme de monoïde, ce qui prouvera que les deux morphismes structurels que nous venons de définit pour A_0 forment bien une structure de monoïde sur A_0. Il est clair que $\varphi((i_A)_0) = Id_A$. Il faut prouver $\varphi(f \oslash g) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$.

Rappelons que $\varphi(f) = m_a \circ (Id_a \otimes f)$. On peut donc faire les décompositions suivantes:

$$\varphi(f \oslash g) = A \xrightarrow{(Id_A \otimes r_1^{-1}) \circ r_A^{-1}} A \otimes 1 \otimes 1 \xrightarrow{Id_A \otimes f \otimes g} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{Id_A \otimes m_A} A \otimes A \xrightarrow{m_A} A$$

$$\begin{tikzcd}
\varphi(f) \circ \varphi(g) = A \arrow[r, "r_A^{-1}"] & A \otimes 1 \arrow[r, "Id_A \otimes g"] & A \otimes A \arrow[r, "m_A"] & A \arrow[d, "r_A^{-1}"] \\
& A & A \otimes A \arrow[l, "m_A"'] & A \otimes 1 \arrow[l, "Id_A \otimes f"']
\end{tikzcd}$$

Or on a

$$Id_A \otimes r_1^{-1} = r_A^{-1} \otimes Id_1 \text{ et } m_A \circ (Id_A \otimes m_A) = m_A \circ (m_A \otimes Id_A)$$

Soit

$$\varphi(f \oslash g) = A \xrightarrow{(r_A^{-1} \otimes Id_1) \circ r_A^{-1}} A \otimes 1 \otimes 1 \xrightarrow{Id_A \otimes f \otimes g} A \otimes A \otimes A \xrightarrow{m_A \otimes Id_A} A \otimes A \xrightarrow{m_A} A$$

Soit

$$\varphi(f \oslash g) = A \xrightarrow{r_A^{-1}} A \otimes 1 \xrightarrow{(m_A \circ (Id_A \otimes f) \circ r_A^{-1}) \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m_A} A$$

or $m_A \circ (Id_A \otimes f) \circ r_A^{-1} = \varphi(f)$

on a donc

$$\varphi(f \oslash g) = A \xrightarrow{r_A^{-1}} A \otimes 1 \xrightarrow{(\varphi(f) \circ Id_A) \otimes (Id_A \circ g)} A \otimes A \xrightarrow{m_A} A$$

qui donne

$$\varphi(f \oslash g) = a \xrightarrow{r_A^{-1}} A \otimes 1 \xrightarrow{Id_A \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{\varphi(f) \otimes Id_A} A \otimes A \xrightarrow{m_A} A$$

et $\varphi(f) \in A - mod$ donc $m_A \circ (\varphi(f) \otimes Id_A) = \varphi(f) \circ m_A$

donc

$$\varphi(f \oslash g) = A \xrightarrow{r_A^{-1}} A \otimes 1 \xrightarrow{Id_A \otimes g} A \otimes a \xrightarrow{m_A} A \xrightarrow{\varphi(f)} A$$

Soit finalement $\varphi(f \oslash g) = \varphi(f) \circ \varphi(g)$.

♦

Les multiplications vérifient des propriétés analogues au cas plus classique où $\mathcal{C} = \mathbb{Z} - mod$. On a en particulier le lemme suivant

Lemme 2.1.9. *Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$, $M, N \in A - mod$ et $u \in Hom_{\mathcal{C}}(M, N)$. Alors $u \in A - mod$ si et seulement si il commute aux multiplications τ_f, $f \in \coprod_{k \in \mathcal{C}_0} A_k$ au sens où $\tau_f \circ (u \otimes Id_k) = u \circ \tau_f$. De plus, si $(-)_0$ est conservatif, la commutativité par rapport aux éléments de A_0 suffit.*

Preuve
Supposons que $u \in A - mod$, alors les diagrammes suivant sont commutatifs

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes k \arrow[r, "Id_M \otimes \varphi(f)"] \arrow[d, "\mu_M \otimes Id_k"'] & M \otimes A \arrow[r, "u \otimes Id_A"] \arrow[d, "\mu_M"'] & N \otimes A \arrow[d, "\mu_N"] \\ M \otimes k \arrow[r, "\tau_f"'] & M \arrow[r, "u"'] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes A \otimes k \arrow[r, "u \otimes Id_{A \otimes k}"] \arrow[d, "\mu_M \otimes Id_k"'] & N \otimes A \otimes k \arrow[r, "Id_N \otimes \varphi(f)"] \arrow[d, "\mu_N \otimes Id_k"'] & N \otimes A \arrow[d, "\mu_N"] \\ M \otimes k \arrow[r, "u \otimes Id_k"'] & M \otimes k \arrow[r, "\tau_f"'] & N \end{tikzcd}$$

Clairement $(Id_N \otimes \varphi(f)) \circ (u \otimes Id_A) = (u \otimes Id_A) \circ (Id_M \otimes \varphi(f))$. On obtient donc que $\mu_M \otimes Id_k$ égalise les morphismes $\tau_f \circ (u \otimes Id_k)$ et $u \circ \tau_f$. Or $\mu_M \otimes Id_k$ est l'image de l'épimorphisme μ_M par le foncteur $- \otimes k$ qui préserve les épimorphismes. En effet, si $X \to Y$ est un épimorphisme de $\mathcal{C}$, on a pour tout Z

$$Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \hookrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

et donc

$$Hom_{\mathcal{C}}(Y \otimes k, Z) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(Y, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(k, Z)) \hookrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X, \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(k, Z)) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes k, Z)$$

Soit $\mu_M \otimes Id_k$ est un épimorphisme et les morphismes égalisés par $\mu_M \otimes Id_k$ sont égaux.

Réciproquement, il faut montrer $u \circ \mu_M = \mu_N \circ (u \otimes Id_A)$ or pour tout $f \in A_k$, $u \circ \mu_M \circ (Id_M \otimes f) = \mu_N \circ (u \otimes Id_A) \circ (Id_M \otimes f)$. La famille $\coprod_{k \in \mathcal{C}_0} A_k$ est épimorphique, donc la famille image de cette famille par $M \otimes -$ l'est aussi, pour la même raison que précédemment. D'où l'égalité voulue.

Si maintenant on suppose $(-)_0$ conservatif, d'après 1.4.28, A_0 est une famille génératrice de A. Toujours d'après 1.4.28, il s'agit d'un famille de morphismes épimorphique de but A. On peut alors reprendre la démonstration ci-dessus en se restreignant à cette famille.

♦

Les multiplications sont enfin compatibles avec les idéaux, on a les propriétés suivantes

Proprietes 2.1.10. Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$ et $q \in I(A)$

- On a un morphisme injectif $(j_q)_k : q_k \to A_k$.
- Si $f \in q_k \subset A_k$ alors τ_f se factorise par $j_q : q \to A$.
- Soit $f, g \in A_0 \times A_k$, alors $Im(f \oslash g) \simeq Im(f_{|Im(g)})$

Preuve
Le premier point est immédiat. Le second vient du fait que $\varphi(j_q \circ f) = j_q \circ \varphi(f)$. Le troisième découle directement de la propriété universelle de l'image (en tant que limite).

♦

On redémontre alors des résultats classiques.

Proposition 2.1.11. *Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$ et q un idéal de A contenant un élément inversible $f \in A_0$. Alors $q \simeq A$*

Preuve
Le morphisme $\varphi(f)$ est donc un automorphisme de A-module de A qui se factorise par j_q d'après la propriété 2 de 2.1.10. Le morphisme j_q est donc un monomorphisme et un épimorphisme scindé, soit un isomorphisme par 1.1.6.

♦

Lemme 2.1.12. *Soit $u : A \to B \in Comm(\mathcal{C})$ tel que B est plat sur A et q un idéal de A. Alors $qB \simeq q \otimes_A B$.*

Preuve
Notons φ_A l'adjonction entre $q \otimes_A -$ et l'oubli. Le foncteur $- \otimes_A B$ étant exact, il préserve les monomorphismes. Par conséquent $j_q \otimes_A Id_B$ est un monomorphisme. Il est donc isomorphe à son image (1.4.15).

♦

2.2 Localisations

Pour un monoïde commutatif A de $\mathcal{C}$ on va maintenant définir une notion de localisation par un système multiplicatif d'éléments de A_0. Notons que comme expliqué précédemment, il est complexe de généraliser cette definition aux éléments des A_k, $k \in \mathcal{C}_0$ car ils ne sont pas munis de structures de monoïdes. De plus, il n'est pas clair dans les exemples connus actuellement que cette généralisation ai un vrai potentiel d'applications. Nous traiterons donc en détails le cas d'éléments de A_0 et nous donnerons les conditions nécessaires à la classification des ouverts Zariski d'un schéma affine par ces seules localisations. Cette condition consistera à demander que 1 soit générateur i.e. que le foncteur $(-)_0$ soit conservatif.

Definition 2.2.1. Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$ et S un système multiplicatif d'éléments de A_0. une localisation de A suivant S est un couple $(S^{-1}A, w_S)$, où $w_S : A \to S^{-1}A \in Comm(\mathcal{C})$, satisfaisant les propriétés suivantes:

i. L'image des éléments de S est inversible, i.e. $w_{S*}(S) \subset (S^{-1}A)_0^*$.

ii. Tout morphisme de $Comm(\mathcal{C})$ vérifiant i se factorise de manière unique par w_S. Plus précisément, $\forall\ u : A \to B \in Comm(\mathcal{C})$, si $u_*(S) \subset B_0^*$ alors il existe un unique morphisme v tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w_S"'] & & B \\ & S^{-1}A \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Si S est engendré par un seul élément f, alors $S^{-1}A$ sera noté A_f et w_S sera noté w.

Remarque 2.2.2. Pour tout monoïde commutatif A et tout système multiplicatif S de A_0, le morphisme w_S, s'il existe, est un épimorphisme.

Cette définition se fait par l'intermédiaire d'une propriété universelle, les lemmes suivants vont donc servir à montrer l'existence, pour tout monoïde commutatif et tout système multiplicatif d'éléments de ce monoïde, que la localisation existe. On commence par s'intéresser au cas le plus simple où S est engendré par un élément f.

La proposition suivant est basée sur l'idée que rendre f inversible revient à quotienter $A[X]$, ce dernier étant définit comme la A-algèbre libre associée à A, i.e. $L_A(A)$ tel que noté dans la proposition. Intuitivement, il faut penser à ce quotient comme à $A[X]/P(X)$ où $P(X) = Xf - 1$. Il s'écrit alors comme un conoyau, la catégorie de base n'étant pas additive.

Proposition 2.2.3. *Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$ et $f \in A_0$. Soient j_0 et j_1 les morphismes naturels de $A := A^{\otimes_A 0}/S_0$ et $A = A^{\otimes_A 1}/S_1$ dans $L_A(A) = \coprod_{n\in\mathbb{N}} A^{\otimes_A n}/S_n$. Soit $\delta := j_1 \circ m_A \circ (Id_A \otimes f) \circ r_A^{-1}$. Notons ψ_A l'adjonction entre le foncteur $L_A : A - mod \to A - alg$ et l'oubli. Alors*

$$A_f \backsimeq coker\Big(\ L_A(A) \underset{\psi_A(j_0)}{\overset{\psi_A(\delta)}{\rightrightarrows}} L_A(A)\ \Big)$$

Le conoyau est pris dans $Comm(\mathcal{C})$.

On commence par montrer que cette colimite vérifie la propriété universelle de A_f. Soit donc $A \xrightarrow{u} B$ dans $Comm(\mathcal{C})$ tel que $g := u_*f = u\circ f$ soit inversible dans B_0. Notons g^{-1} son inverse, on a alors $m_B\circ(g\otimes g^{-1})\circ r_1^{-1} = i_B$. On définit un morphisme h de $L_A(A)$ dans B par l'adjoint du morphisme $\beta = m_B \circ u \otimes g^{-1} \circ r_A^{-1}$. On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "r_A^{-1}"'] \arrow[drr, bend left, "\beta\circ\delta"] & & \\ A\otimes 1 \arrow[r, "Id_A\otimes r_1^{-1}"] \arrow[d, "Id_A\otimes f"'] & A\otimes 1\otimes 1 \arrow[d, "Id_A\otimes f\otimes Id_1"] & B \\ A\otimes A \arrow[r, "Id_A\otimes r_A^{-1}"] \arrow[d, "m_A"'] & A\otimes A\otimes 1 \arrow[d, "m_A\otimes Id_1"] & B\otimes B \arrow[u, "m_B"'] \\ A \arrow[r, "r_A^{-1}"] & A\otimes 1 \arrow[r, "Id_A"'] & A\otimes 1 \arrow[u, "u\otimes g^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Or

$$u \otimes g^{-1} \circ m_A \otimes Id_1 = (u \circ m_A) \otimes g^{-1}$$

et on a de plus

$$((u \circ m_A) \otimes g^{-1}) \circ (Id_A \otimes f \otimes Id_1) = ((u \circ m_A) \circ (Id_A \otimes f)) \otimes g^{-1}$$

On remarque ensuite que u est un morphisme de monoïde donc vérifie $m_B \circ (u \otimes u) = u \circ m_A$

donc

$$(u \circ m_A) \circ (Id_A \otimes f)) \otimes g^{-1} = (m_B \circ (u \otimes u)) \circ (Id_A \otimes f)) \otimes g^{-1}$$

qui donne

$$m_B \circ (u \otimes (u \circ f)) \otimes g^{-1}$$

On a donc

$$\beta \circ \delta = m_B \circ (m_B \circ (u \otimes (u \circ f)) \otimes g^{-1}) \circ (Id_A \circ r_1^{-1}) \circ r_A^{-1}$$

Soit par associativité de m_B

$$\beta \circ \delta = m_B \circ (u \otimes (m_B \circ ((u \circ f) \otimes g^{-1}))) \circ (Id_A \circ r_1^{-1}) \circ r_A^{-1}$$

Soit

$$\beta \circ \delta = m_B \circ (u \otimes (m_B \circ ((u \circ f) \otimes g^{-1}) \circ r_1^{-1})) \circ r_A^{-1}$$

qui donne

$$\beta \circ \delta = m_B \circ (u \otimes i_b) \circ r_A^{-1} = u$$

De plus il est clair que $\beta \circ j_0 = u$ donc β égalise les deux flèches, il y a donc un unique morphisme du conoyau des deux flèches vers B qui commute à u. Le conoyau vérifie donc la propriété universelle de A_f. A ce stade, il reste à montrer que f devient inversible dans ce conoyau. Nous choisissons de noter A_f le conoyau et de noter w le morphisme naturel de A vers ce conoyau.

On montre maintenant l'inversibilité de f dans A_f. Il existe un morphisme $\bar{p} : L_A(A) \to A_f$ tel que $\bar{p} \circ \delta = w$. Soit $p : A \to A_f$ le morphisme donné par $p := \psi_A^{-1}(\bar{p})$. Alors, le morphisme $\bar{p}$ égalise $\psi_A(\delta)$ et $\psi_A(j_0)$ donc p vérifie $p \circ m_A \circ (Id_A \otimes f) \circ r_A^{-1} = w$. De plus, on a par adjonction entre $A - mod$ et $A_f - mod$, $m_{A_f} \circ (w \circ (p \circ i_A)) \circ r_A^{-1} = p$. Donc p joue un rôle analogue à β définit ci-dessus, et $p \circ i_A$ joue le rôle de g^{-1}. Par conséquent, un calcul analogue donne:

$$w \circ i_A = p \circ m_A \circ (Id_A \otimes f) \circ r_A^{-1} \circ i_A = m_{A_f} \circ ((w \circ f) \otimes (p \circ i_A)) \circ r_1^{-1}$$

Finalement le produit de $w \circ f$ et $p \circ i_A$ est l'élément unité de $(A_f)_0$.

♦

Lemme 2.2.4. *Soit S un système multiplicatif. On lui associe la catégorie suivante, toujours notée S. Les éléments sont les éléments de S et pour tout couple $f, g \in S$, $Hom_S(f, g) := \{h \in S \ tq \ f * h = g\}$. Alors $S^{-1}A$ est donné par la colimite filtrante*

$$S^{-1}A \backsimeq Colim_S A_f$$

Preuve

Il est clair que cette colimite vérifie la propriété universelle de $S^{-1}A$, de plus par composition avec w_f, chaque élément f y devient inversible.

♦

Pour caractériser plus précisément ces localisations, on fait aussi référence à la catégorie de modules associée. Le résultat attendu, que nous démontrons un peu plus loin, est que les $S^{-1}A$-modules sont exactement les A-modules pour lesquels les multiplications par les éléments de S sont inversibles. Nous allons donner une autre façon de déterminer une localisation dans le cas où S est engendré par un seul élément. cette autre méthode, inspiré du cas usuel, clarifiera les démonstrations en simplifiant certaines justifications.

Proposition 2.2.5. *Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$, $f \in A_0$ et φ le morphisme d'adjonction entre $- \otimes A$ et l'oubli. Alors l'objet*

$$B = colim(A \xrightarrow{\varphi(f)} A \xrightarrow{\varphi(f)} A \xrightarrow{\varphi(f)} \cdots)$$

est muni d'une structure de monoïde et est isomorphe à A_f en tant que monoïde.

Preuve
Nous devons commencer par montrer que B est muni d'une structure de monoïde. Comme il s'agit en fait d'un monoïde au dessus de A, nous allons directement mettre en évidence une structure de A-algèbre pour B. Le morphisme unité, noté i_B est donné par le morphisme de la première composante A de la colimite vers B. Il nous faut définir maintenant le morphisme $m_B : B \otimes_A B \to B$. Soit $\mathbb{N}^{+1}$ la catégorie des entiers naturels strictement positifs où il existe un unique morphisme $u_{i,j}$ de i vers j si et seulement si $j = i+1$. Soit $F \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}^{+1}}$ définit par $F(i) = A$, $F(u_{i,i+1}) = \varphi(f)$. Alors $B \otimes_A B \simeq Colim_{\mathbb{N}^{+1}}(B \otimes_A F) \simeq Colim_{(\mathbb{N}^{+1})^2} F \otimes_A F$. Or $B \simeq Colim_{\mathbb{N}^{+1}}(F)$ vérifie clairement la propriété universelle de cette dernière colimite. D'où $B \otimes_A B \simeq B$. On définit m_B comme étant le morphisme réalisant cet isomorphisme. Il reste à vérifier que ces morphismes munissent B d'une structure de A-algèbre. Pour l'associativité, $m_B : B \otimes_A B \to B$ est un morphisme de $A - mod$ on a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_A B \otimes_A A \arrow[r, "Id_B \otimes_A \mu_B"] \arrow[d, "\mu_{B \otimes_A B \otimes_A Id_A}"'] & B \otimes_A A \arrow[d, "\mu_B"] \\
B \otimes_A B \arrow[r, "m_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}^{+1}$, $\mu_B \circ (Id_B \otimes_A \varphi(f)^n) \circ (m_B \otimes_A Id_A) = \mu_B \circ (m_B \otimes_A Id_A) \circ (Id_{B \otimes_A B} \otimes \varphi f^n)$.

On a donc un diagramme commutatif induit dans $\mathcal{C}^{\mathbb{N}^{+1}}$, où les objets $B \otimes_A B$ et B sont pris comme diagrammes constants. Si on note $F, G \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}^{+1}}$ définis par $F(i) = B \otimes_A B \otimes_A A$ et $F(u_{i,i+1}) = Id_{B \otimes_A B} \otimes_A \varphi f$ et $G(i) = B \otimes_A A$, $G(u_{i,i+1}) = Id_B \otimes_A \varphi f$ Ce diagramme s'écrit, pour tout i

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r, "(Id_B \otimes_A \mu_B)_i"] \arrow[d, "(\mu_{B \otimes_A B \otimes_A Id_A})_i"'] & G(i) \arrow[d, "(\mu_B)_i"] \\
B \otimes_A B \arrow[r, "m_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur $Colim_{\mathbb{N}^{+1}}$ à ce diagramme, on obtient le diagramme d'associativité de B.
Les diagrammes d'unité s'obtiennent de manière analogue à partir du diagramme de $A - mod$, ainsi que le diagramme de symétrie.

Nous allons maintenant montrer que $g := i_B \circ f$ est inversible dans $Hom_{A-mod}(A, B) \simeq B_0$. Par définition de B, il existe un morphisme de la seconde composante A de la colimite vers B que nous choisissons innocemment de noter g^{-1}. ce morphisme vérifie $g^{-1} \circ \varphi(f) = i_B$. On cherche à retrouver l'identité $m_B \circ (g^{-1} \otimes_A g) \circ r_A^{-1}$. Or $\varphi(f) = m_A \circ (Id_A \otimes_A f) \circ r_A^{-1}$, on a donc

$$i_B = g^{-1} \circ \varphi(f) = g^{-1} \circ m_A \circ (Id_A \otimes_A f) \circ r_A^{-1}$$

Or g^{-1} est un morphisme de A-modules donc

$$= \mu_B \circ (g^{-1} \otimes_A Id_A) \circ (Id_A \otimes_A f) \circ r_A^{-1}$$

où $\mu_B = m_B \circ (Id_B \otimes_A i_B)$

Soit

$$= \mu_B \circ (g^{-1} \otimes_A f) \circ r_A^{-1}$$

Et par définition de μ_B

$$m_B \circ (g^{-1} \otimes_A g) \circ r_A^{-1}$$

Il nous faut maintenant prouver que B vérifie le point 2 de la définition de A_f. Soit $h : A \to C \in Comm(\mathcal{C})$ tel que $g := h \circ f$ est inversible dans $\mathcal{C}_0$ d'inverse g^{-1}. Alors par un calcul analogue à celui réalisé précédemment, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "r_A^{-1}"] & A \otimes 1 \arrow[r, "h \otimes g^{-1}"] & C \otimes C \arrow[r, "m_C"] & C \\
A \arrow[u, "\varphi(f)"] \arrow[urrr, bend right, "h"'] & & &
\end{tikzcd}$$

De même, un diagramme analogue commutera pour $g^{\otimes n}$ et $\varphi(f)^n$. On construit ainsi une famille de morphisme du diagramme de la colimite vers C. Il existe donc un unique morphisme $s : B \to C$ tel que $s \circ i_B = h$.
Les diagrammes commutatifs de morphisme A-algèbre de s s'obtiennent comme précédemment pour la structure de A-algèbre de B. On a déjà le diagramme d'unité, on considère donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A A \arrow[r, "s\otimes Id_A"] \arrow[d, "\mu_B"'] & C \otimes_A A \arrow[d, "\mu_C"'] \\ B \arrow[r, "s"'] & C \end{tikzcd}$$

Qui induit un diagramme commutatif dans $\mathcal{C}^{\mathbb{N}+1}$ qui envoi par $Colim_{\mathbb{N}+1}$ sur

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A B \arrow[r, "s\otimes Id_B"] \arrow[d, "\mu_B"'] & C \otimes_A B \arrow[d, "\mu_C"'] \\ B \arrow[r, "s"'] & C \end{tikzcd}$$

or $\mu_C = m_C \circ (Id_B \otimes s)$. On a donc le diagramme commutatif désiré.

♦

On en arrive à l'étude voulue, pour cela commençons par remarquer le fait suivant qui découle directement de la proposition.

Corollaire 2.2.6. *Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$, $q \in A - mod$, $f \in A_0$ et S un système multiplicatif de A_0. Notons $q_f := q \otimes_A A_f$.*

i. On a un isomorphisme $q_f \simeq Colim(q \xrightarrow{\tau_f} \cdots)$.

ii. On a un isomorphisme $q \otimes_A S^{-1}A \simeq colim_{f \in S} q_f$.

iii. Le morphisme $A \to S^{-1}A$ est $\mathcal{C}$-plat.

Preuve
D'après 2.2.4 et 2.2.5, le foncteur $A \to S^{-1}A$ est décrit par une colimite filtrante. Par conséquent, le fait que $q \otimes_A -$ commute aux colimites implique i et ii. La proposition 1.5.15 implique iii.

♦

On revient maintenant aux catégories de modules associées. On formule un premier résultat classique avant de donner un second résultat qui découle du travail que l'on vient de faire.

Proposition 2.2.7. *Soit $g : A \to B \in Comm(\mathcal{C})$. Le foncteur d'oubli g^* est pleinement fidèle si et seulement si g est un épimorphisme.*

Preuve
Un morphisme $g : A \to B$ est un épimorphisme si et seulement si il induit un isomorphisme $B \to B \coprod_A B$. Or ici $B \coprod_A B \simeq B \otimes_A B$. Rappelons que pour un A-module M, l'unité de l'adjonction est donnée par le morphisme

$$\epsilon_M : (Id_M \otimes_A i_B) \circ r_M^{-1} : M \to B \otimes_A M$$

et la counité par le morphisme

$$\mu_M : B \otimes_A M \to M$$

Passons maintenant à la preuve. Si g^* est pleinement fidèle, la counité est un isomorphisme donc en particulier μ_B est un isomorphisme. Son inverse est donné naturellement par ϵ_B qui est donc un isomorphisme. Donc g est un épimorphisme.

Réciproquement, si g est un épimorphisme alors, pour tout $M \in B - mod$ le foncteur $M \otimes_A -$, qui est adjoint à gauche du Hom interne, préserve les épimorphismes. On en déduit que $Id_M \otimes g$ est un épimorphisme, i.e. que l'unité est un épimorphisme pour les B-modules. On sait déjà que c'est un monomorphisme scindé, c'est donc un isomorphisme. On écrit alors le diagramme (où le foncteur d'oubli est noté i):

$$\begin{tikzcd}
Hom_{B-mod}(M,N) \arrow[rr, "-\otimes_A B \circ i"] \arrow[dr, "i"'] & & Hom_{B-mod}(M\otimes_A B, N\otimes_A B) \arrow[dr, "i"] & \\
& Hom_{A-mod}(M,N) \arrow[ur, "-\otimes_A B"] \arrow[rr, "i\circ - \otimes_A B"'] & & Hom_{A-mod}(M\otimes_A B, N\otimes_A B)
\end{tikzcd}$$

Alors $-\otimes_A B\circ i$ et $i\circ -\otimes_A B$ définissent des isomorphismes dans ce diagramme. On en déduit que $-\otimes_A B$, au centre du diagramme, est surjectif et injectif donc bijectif. Par conséquent les deux occurrences de i sont bijectives dans le diagramme. Finalement g^* est pleinement fidèle.

♦

Corollaire 2.2.8. *Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$ et S un système multiplicatif de A_0. La catégorie $S^{-1}A$-mod est exactement la sous catégorie pleine de A-mod des modules M pour lesquels τ_f est inversible pour tout f dans S.*

Preuve
Soit $q \in S^{-1}A - mod$, alors par définition de la multiplication par un élément, τ_f est inversible pour tout $f \in S$. Réciproquement soit $q \in A - mod$ tel que τ_f soit inversible pour tout $f \in S$. Alors le corollaire précédent implique $q_f \simeq q$ pour tout f dans S. Soit $q \otimes_A S^{-1}A \simeq q$ et finalement $q \in S^{-1}A - mod$.

♦

On en arrive maintenant à la question des ouverts Zariski. Et pour commencer nous donnons une proposition qui met en évidence des exemples types.

Proposition 2.2.9. *Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$, $f \in A_0$ et $S \subset A_0$ un système multiplicatif. Alors*

- ◇ *Le schéma relatif affine $Spec(S^{-1}A)$ est un ouvert Zariski formel de $Spec(A)$.*
- ◇ *Le schéma relatif affine $Spec(A_f)$ est donc un ouvert Zariski de $Spec(A)$.*

Preuve
Pour tout système multiplicatif S de A_0, le morphisme w_S est un épimorphisme par construction. De plus d'après 2.2.6, il est $\mathcal{C}$-plat. Si S est engendré par un seul élément, alors d'après 2.2.3, A_f est une colimite finie d'objets de présentations finie, il est donc lui-même de présentation finie d'après 1.1.3.

♦

Remarque 2.2.10. Notons que si S est engendré par un nombre fini d'éléments f_i, alors S est en fait engendré par $g = \prod_i f_i$.

2.3 Filtres de Gabriel

Les Filtres de Gabriel fournissent une notion clef pour comprendre la classification des ouverts Zariski d'un schéma affine relatif. Ils forment en fait un cadre beaucoup plus général qui contient les ouverts formels. Commençons par donner les bases de la théorie.

2.3.1 Filtres de Gabriel

Definition 2.3.1. Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$,

- ▷ On définit $\mathcal{B}A$ la $\mathcal{C}$-catégorie à un objet $*$ et dont les morphismes sont données par $\underline{Hom}_{\mathcal{B}A}(*,*) := A$.
- ▷ On définit $Pr(\mathcal{B}A)$ la $\mathcal{C}$-catégorie des $\mathcal{C}$-préfaisceaux sur $\mathcal{B}A$ i.e. des $\mathcal{C}$-foncteurs $F : \mathcal{B}A \to \mathcal{C}$.
- ▷ Le $\mathcal{C}$-foncteur de Yoneda est définit sur les objets par $h_*(*) := A$ et sur les morphismes par l'adjoint $h_* := A \to \underline{End}_{\mathcal{C}(A)}$ de m_A.

Lemme 2.3.2. *La catégorie $Pr(\mathcal{B}A)$ est muni d'une structure de $\mathcal{C}$-module.*

Preuve
On définit, pour $F \in Pr(\mathcal{B}A)$ et $X \in \mathcal{C}$, $X \otimes_{ext} F := * \to X \otimes F(*)$. Le morphisme naturel $A \to \underline{End}_{\mathcal{C}}(X \otimes F(*))$ est obtenu en composant avec la tensorisation par X, $X \otimes -$. Les morphismes structurel d'associativité et d'unité sont ceux de $\mathcal{C}$.

♦

Proposition 2.3.3. *Le $\mathcal{C}$-foncteur de Yoneda associé à $\mathcal{B}A$ se factorise par $A - mod$ et définit une $\mathcal{C}$-équivalence de $Pr(\mathcal{B}A)$ dans $A - mod$.*

Preuve
Ces deux catégories sont munies de structure de $\mathcal{C}$-catégories et de $\mathcal{C}$-modules, au sens de 1.5.13. Il faut donc montrer qu'elles sont équivalentes en tant que $\mathcal{C}$-modules. On commence par définir le foncteur:

$$F : Pr(\mathcal{B}A) \to A - mod$$

$$(G : \mathcal{B}A \to \mathcal{C}) \to G(*)$$

Soit $G \in Pr(\mathcal{B}A)$, alors $G(*)$ est un objet de $\mathcal{C}$ muni d'un morphisme $A \to \underline{End}_{\mathcal{C}}(G(*))$ qui par adjonction revient à $A \otimes G(*) \to G(*)$. ce morphisme muni $G(*)$ d'une structure de A-module, les diagrammes structurels de A-linéarité découlant directement des diagramme structurels de $\mathcal{C}$-linéarité de $Pr(\mathcal{B}A)$ (Dans 1.5.4, poser $W = 1$).
Le foncteur définit se factorise donc par $A-mod$. de plus il est clairement surjectif sur les objets. Pour M un A-module on a en effet un foncteur $G_M : \mathcal{B}A \to \mathcal{C}$ qui envoi $*$ sur M et qui est définit sur les morphismes par $A \to \underline{End}_{\mathcal{C}}(M)$ adjoint de $\mu_M : A \otimes M \to M$.
Reste à voir que c'est un foncteur pleinement fidèle compatible au produit tensoriel. Pour la pleine fidélité, remarquons que F envoi une transformation naturelle entre G et G' sur son évaluation en $*$. Cette application est donc clairement injective, il faut montrer que ces transformations naturelles évaluées en $*$ sont bien des morphismes de A-modules et que cette évaluation est surjective. Or la donnée d'une telle transformation naturelle est la donnée d'un morphisme η de $G(*)$ dans $G'(*)$ qui vérifie que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "G"] \arrow[d, "G'"'] & \underline{End}(G(*)) \arrow[d, "\eta^*"] \\
\underline{End}(G'(*)) \arrow[r, "\eta_*"'] & \underline{Hom}(G(*), G'(*))
\end{tikzcd}$$

Qui est adjoint au diagramme:

$$\begin{tikzcd}
G(*) \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes Id_A"] \arrow[d, "\mu_{G(*)}"'] & G'(*) \otimes A \arrow[d, "\mu_{G'(*)}"] \\
G(*) \arrow[r, "\eta"'] & G'(*)
\end{tikzcd}$$

i.e. cela définit bien un morphisme de A-module. De plus, il est clair à partir de ces deux diagrammes que tout morphisme de A-module de $G(*)$ dans $G'(*)$ induit une transformation naturelle.

Pour la compatibilité avec le produit tensoriel extérieur remarquons que $F(X \otimes_{ext} G)$ est le A-module $X \otimes G(*)$. On doit vérifier que le morphisme naturel qui définit la structure de A-module de $F(X \otimes_{ext} G)$ est bien l'adjoint du morphisme du morphisme $\mu_{G(*)} \otimes Id_X$. Notons $g : A \to End_{\mathcal{C}}(G(*))$ le morphisme qui définit cette structure. On peut décomposer

$$A \xrightarrow{(g \otimes i_{\underline{End}_{\mathcal{C}}(X)}) \circ r_A^{-1}} \underline{End}(G(*)) \otimes \underline{End}_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow \underline{End}(X \otimes G(*))$$

Par adjonction, on obtient

$$\begin{tikzcd}
A \otimes G(*) \otimes X \arrow[r, "r_A^{-1} \otimes Id_{G(*) \otimes X}"] & A \otimes 1 \otimes G(*) \otimes X \arrow[r, "g \otimes i_{\underline{End}_{\mathcal{C}}(X)} \otimes Id_{G(*) \otimes X}"] & \underline{End}_{\mathcal{C}}(G(*)) \otimes \underline{End}_{\mathcal{C}}(X) \otimes X \otimes G(*) \arrow[r] & G(*) \otimes X
\end{tikzcd}$$

où le dernier morphismes correspond aux morphismes naturels de composition (composés avec la symétrie nécessaire en remarquant que pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $\underline{Hom}_{\mathcal{C}}(1, Y) \backsimeq Y$. Par compatibilité entre $\otimes$ et $\circ$, on a donc:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes G(*) \otimes X \arrow[r, "r_A^{-1} \otimes Id_{G(*) \otimes X}"] & A \otimes 1 \otimes G(*) \otimes X \arrow[r, "Id_A \otimes i_{\underline{End}_{\mathcal{C}}(X)} \otimes Id_{G(*) \otimes X}"] & A \otimes \underline{End}_{\mathcal{C}}(X) \otimes X \otimes G(*) \arrow[d, "Id_A \otimes S(\underline{End}_{\mathcal{C}}(X), G(*)) \otimes Id_X"] & \\
 & & A \otimes G(*) \otimes X \arrow[r, "\mu_{G(*)} \otimes Id_X"'] & G(*) \otimes X
\end{tikzcd}$$

Toujours par compatibilité entre $\circ$ et $\otimes$ et grâce au diagramme structurel du morphisme de symétrie S dans $\mathcal{C}$, on en déduit que ce morphisme est le produit tensoriel du morphisme $\mu_{G(*):A\otimes G_* \to G(*)}$ et du morphisme $X \to X$ donné par

$$X \xrightarrow{r_X^{-1}} X \otimes 1 \xrightarrow{Id_X \otimes i_{\underline{End}_{\mathcal{C}}(X)}} X \otimes \underline{End}_{\mathcal{C}}(X) \longrightarrow X$$

qui en remarquant que X est un $\underline{End}_{\mathcal{C}}(X)$-module, donne Id_X.

La structure de A-module sur $X \otimes G(*)$ obtenu à partir du préfaisceau $X \otimes_{ext} G$ est bien la structure naturelle du A-module $X \otimes G(*)$. Pour terminer, nous devons vérifier que le diagramme de $\mathcal{C}$-linéarité de F commute. Or ce diagramme est donné par le diagramme pentagonal de $\mathcal{C}$.

♦

Nous donnons maintenant la définition de filtre de Gabriel. Cette définition reprend dans un cas particulier la définition de $\mathcal{C}$-topologie de Grothendieck donnée par Borceux et Quinteiro dans [BQ].

Definition 2.3.4. Une $\mathcal{C}$-topologie de Grothendieck sur $\mathcal{B}A$ est la donnée d'un ensemble G d'idéaux de A tels que

i. L'objet A est dans G.

ii. Pour tout idéal $q \in G$, pour tout $k \in \mathcal{C}_0$, et tout $f \in A_k$ l'objet $f^{-1}(q) = q^k \times_{A^k} A$ est dans J.

iii. Pour tout idéal r tel qu'il existe un idéal $q \in G$ tel que pour tout $f \in \coprod_{k \in \mathcal{C}_0} q_k$, $f^{-1}(r) \in J$ alors $r \in G$.

Une telle topologie sera appelée un filtre de Gabriel. Dans le point ii, le morphisme $A \to A^k = \underline{Hom}_{\mathcal{C}}(k, A)$ est adjoint au morphisme $\varphi(f) : A \otimes k \to A$.

Notre but à présent est de comprendre cette notion pour en faire un outil plus pratique destiné à l'étude des ouverts Zariski. Commençons déjà par le lemme suivant, qui précise ii.

Lemme 2.3.5. *Soient G un filtre de Gabriel, $q \in G$, $k \in \mathcal{C}_0$ et $f \in A_k$, alors $f^{-1}q$ est le plus grand idéal (pour l'inclusion) qui s'envoi dans q par multiplication par f.*

Preuve
L'objet $f^{-1}q$ est définit par une limite, or les foncteurs $(-)_k$ commutent aux limites. On a donc pour tout $k' \in \mathcal{C}_0$, un diagramme commutatif dans Ens.

$$\begin{tikzcd}
A_{k'} \arrow[r, "\tau_f^*"] & A_{k'\otimes k} \\
(f^{-1}q)_k \arrow[u, hook] \arrow[r] & q_{k'\otimes k} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

où la commutativité implique que le morphisme du bas est τ_f^*, i.e. les éléments de $f^{-1}q$ envoi par τ_f dans q. L'image par τ_f de $f^{-1}q$ est donc incluse dans q. De plus, soit q' un idéal tel que q' envoi par τ_f dans q, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \otimes k \arrow[r, "\tau_f"] & A \\
q' \otimes k \arrow[u] \arrow[r, "\tau_f"] & q \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

qui par adjonction donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & A^k \\
q' \arrow[u] \arrow[r] & q \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Il existe donc un monomorphisme $q' \to f^{-1}q$ qui factorise le morphisme $q' \to A$.

♦

Nous reprenons la terminologie de Borceux-Quinteiro pour les catégories de faisceaux. Cela peut prêter à confusion compte tenu du fait que l'on parle déjà de localisations pour les monoïdes, nous ferons donc particulièrement attention de bien préciser à quel type de localisation on fait référence par la suite.

Definition 2.3.6. Une localisation de $A-mod$ est la donnée d'une sous-$\mathcal{C}$-catégorie pleine réflexive de $A-mod$ telle que l'adjoint à gauche de l'oubli soit $\mathcal{C}$-exact.

THEOREME 2.3.7. *(Borceux-Quinteiro)*
Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$, l'ensemble des filtres de Gabriel de A est en bijection avec l'ensemble des localisations de $A-mod$.

Ce sont bien des ensembles par 1.4.11. De plus, ces ensembles sont en fait des posets. Les deux lemmes suivant précisent d'une part le théorème pour le premier et d'autre part leur structure pour le second.

Lemme 2.3.8. *[BQ]*

- ▷ *Soit $\mathcal{L}$ une localisation de $A-mod$. Alors le filtre de Gabriel associé à $\mathcal{L}$ est l'ensemble $G_{\mathcal{L}}$ des idéaux q de A vérifiant pour tout M dans $\mathcal{L}$*

$$\underline{Hom}_{A-mod}(A, M) \backsimeq \underline{Hom}_{A-mod}(q, M)$$

- ▷ *Soit G un filtre de Gabriel alors la localisation associée à G est la sous-$\mathcal{C}$-catégorie pleine $\mathcal{L}_G$ de $A-mod$ des A-modules M vérifiant pour tout q dans G*

$$\underline{Hom}_{A-mod}(A, M) \backsimeq \underline{Hom}_{A-mod}(q, M)$$

Lemme 2.3.9. *Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$. Notons $GabA$ et $LocA$ les catégories de filtres de Gabriel sur A et de localisations de $A-mod$ munies respectivement des inclusions et des $\mathcal{C}$-adjonction dont l'adjoint à gauche est $\mathcal{C}$-exact. L'isomorphisme d'ensemble $GabA \backsimeq LocA$ induit un isomorphisme contravariant de poset.*

Preuve
Les propriétés des foncteurs faisceautisation et des topologies enrichies de Grothendieck impliquent que l'isomorphisme considéré définit naturellement un isomorphisme contravariant de poset.

♦

Lemme 2.3.10. *Les posets $GabA$ et $LocA$ admettent des intersection et des unions petites.*

Preuve
La catégorie $GabA$ admet des intersections petites. Une intersection petite dans $GabA$ est une intersection d'ensembles. Par l'isomorphisme de poset, on en déduit des Unions petites dans $LocA$. La catégorie $LocA$ admet des intersections petites. La catégorie $LocA$ admet des intersection finie. L'intersection d'une famille finie $\mathcal{L}_i$ de localisations est la sous catégorie pleine de $A-mod$ dont les objets sont donnés par l'intersection des ensembles d'objets des $\mathcal{L}_i$ et dont le foncteur faisceautisation est la composé des foncteurs faisceautisation des catégories $\mathcal{L}_i$.

Soit $(\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ une famille petite de localisations, quitte à ajouter toutes les intersections finies de L_i à cette famille, on peut la supposer filtrante. Notons l_i le foncteur faisceautisation associé à $\mathcal{L}_i$. Alors $\cap_{i\in I}\mathcal{L}_i$, ou l'intersection est prise au sens des ensemble d'objets est une localisation dont le foncteur faisceautisation est donné par $Colim_{i\in I} l_i$. On note η_i et ϵ_i l'unité et la counité de la $\mathcal{C}$-adjonction entre $A-mod$ et $\mathcal{L}_i$. L'unité de la $\mathcal{C}$-adjonction est donnée par

$$\eta : X \to l_i(X) \to colim_{i\in I} l_i(X) \text{ dans } A-mod.$$

le morphisme composé η ne dépend pas du choix de i. La counité est engendrée par la famille de morphismes

$$\epsilon_i : l_i(X) \to X$$

qui se relève en un morphisme

$$\epsilon : Colim(l_i(X)) \to X$$

Les identités triangulaires de η_i et ϵ_i se relèvent naturellement en des identités triangulaire pour η et ϵ. cela se vérifie de manière analogue à la preuve de 1.2.14.

L'isomorphisme de poset implique alors que $GabA$ admet des unions petites.

♦

Remarques 2.3.11. Ajoutons quelques remarques sur ces objets essentiels

- L'union petite d'une famille $(G_i)_{i\in I}$ de filtres de Gabriel est donnée par le plus petit filtre contenant chaque G_i.
- L'union petite d'une famille de localisations $(\mathcal{L}_i)_{i\in I}$ est donnée par la plus petite localisation contenant chaque $\mathcal{L}_i$.

- Les catégories $LocA$ et $GabA$ ne sont pas des lieux. En fait ces catégories contiennent trop d'éléments et il va falloir nous restreindre à des sous catégories plus pertinente pour se rapprocher des ouverts Zariski qui forment eux un lieu.

Faisons maintenant un premier lien avec les ouverts Zariski d'un schéma affine

Proposition 2.3.12. *Soient $Y := Spec(B)$ un ouvert affine formel de $X := Spec(A) \in Aff_{\mathcal{C}}$. Alors $B - mod$ est une localisation de $A - mod$.*

Preuve

Le morphisme $A \to B$ est un épimorphisme $\mathcal{C}$-plat. D'après 2.2.7, $B - mod$ est une sous catégorie pleine de $A - mod$. Par conservativité de $\mathcal{C} \to Pr(\mathcal{C}_0)$, on en déduit que c'est une sous-$\mathcal{C}$-catégorie pleine. L'adjoint à gauche de l'oubli est donné par $B \otimes_A -$ qui est $\mathcal{C}$-exacte par définition.

♦

Proposition 2.3.13. *Soit $Y := Spec(B)$ un ouvert affine formel de $X := Spec(A) \in Aff_{\mathcal{C}}$. Alors le filtre de Gabriel associé à $B - mod$ est l'ensemble des idéaux q tel que $q \otimes_A B \backsimeq B$.*

Preuve

En reprenant la formule du lemme 2.3.8, on a par adjonction pour tout $M \in B - mod$

$$\underline{Hom}_{B-mod}(B, M) \backsimeq \underline{Hom}_{B-mod}(q \otimes_A B, M)$$

Qui implique par Yoneda (opposé) $q \otimes_A B \backsimeq B$.

♦

Pour un schéma affine $X := Spec(A)$, et un sous schéma affine ouvert $Y := Spec(B)$ de X on parlera dorénavant du filtre de Gabriel associé à Y, ou B. Etudions maintenant les exemples types mis en évidence dans la section précédente, i.e. les localisations $S^{-1}A$ de $A \in Comm(\mathcal{C})$.

Proposition 2.3.14. *Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$, $f \in A_0$ et $S \subset A_0$ un système multiplicatif.*

- ◇ *Le filtre de Gabriel G_f associé à A_f est l'ensemble des idéaux contenant une puissance de f.*
- ◇ *Le filtre de Gabriel G_S associé à $S^{-1}A$ est $\cup_{f \in S} G_f$.*

Preuve

Soient G_f le filtre de Gabriel associé à A_f et G l'ensemble des idéaux de A qui contiennent une puissance de f. Montrons $G \subset G_f$. Soit $q \in G$, on doit montrer $q_f := q \otimes_A A_f \backsimeq A_f$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n \in q$, par conséquent, l'image de f^n dans A_f est dans q_f. L'idéal q_f contient donc un élément inversible de A_f, et d'après 2.1.11, on a $q_f \backsimeq A_f$.

Réciproquement, Soit $q \in G_f$, alors i_{q_f} est un isomorphisme. le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[r, "w_*"] & A_{f0} \backsimeq A_{0(\tau_f)_*} \\
q_0 \arrow[u] \arrow[r] & q_{f0} \backsimeq q_{0(\tau_f)_*} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

On remarque alors que $q_{0(\tau_f)_*}$ est donné par l'ensemble

$$\{(x, f^n \in q_0 \times \mathbb{N})\}/\sim$$

Avec $(x, f^n) \sim (y, f^m)$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^{p+n}y = f^{p+m}x$. En particulier $f \in q_{0(\tau_f)_*}$ donc il existe $x \in q_0, n \in \mathbb{N}$ tels que $f \sim (x, f^n)$ soit il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^{p+n+1} = f^p x \in q_0$. Donc $q \in G$. Finalement $G = G_f$.

Pour $S^{-1}A$, on a $\cup_{f \in S} G_f \subset G_S$ et l'inclusion réciproque s'obtient de manière analogue en regardant les ensembles sous-jacents.

♦

2.3.2 Filtres Localement Primitifs et Filtres Primitifs Quasi-compacts

Nous allons maintenant exposer une notion de filtre qui va jouer un rôle particulièrement important. En effet, les filtres associés à des ouverts Zariski ont des propriétés de régularité plus fortes que les filtres de Gabriel définis précédemment. Donnons d'abord les définitions essentielles et les lemmes assurant la pertinence et la cohérence de ces définitions.

Definition 2.3.15. Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$

- ▷ Soient q, q' deux idéaux de A. Leur produit, noté $q.q'$ est l'image du morphisme $q \otimes q' \to A \otimes A \to A$.
- ▷ Un idéal p de A est premier s'il est différent de A et si pour tout idéal q et q' tels que $q.q' \subset p$, alors q ou q' est inclus dans p.
- ▷ Un ensemble G d'idéaux de A est filtrant si pour tout $q \subset q' \in I(A)$ alors $q \in G \Rightarrow q' \in G$.
- ▷ Un ensemble d'idéaux de A est commutatif s'il est stable par produit d'idéaux.
- ▷ Un ensemble d'idéaux de A de A est quasi-compact si pour tout $q \in G$ isomorphe à une colimite filtrante $Colim_{\mathcal{I}} q_i$ dans $I(A)$, il existe $i \in \mathcal{I}$ tel que $q_i \in G$.

Lemme 2.3.16. *Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$*

- ◇ *Un filtre de Gabriel Commutatif de A est un monoïde dans les ensembles.*
- ◇ *Tout filtre de Gabriel de A est filtrant.*
- ◇ *Tout filtre de Gabriel de A est stable par intersection finie.*
- ◇ *Une intersection petite de filtres de Gabriel commutatifs de A est un filtre de Gabriel commutatif.*
- ◇ *Une intersection finie ou une réunion finie de filtres de Gabriel de A quasi-compacts est un filtre de Gabriel quasi-compact.*
- ◇ *Un ensemble d'idéaux G filtrant est quasi-compact si et seulement si pour tout idéal q de G il existe un sous idéal de q finiement engendré dans G.*
- ◇ *Soient $q, q' \in I(A)$ et $F = (F_k)_{k \in \mathcal{C}_0}$ une famille génératrice pour q alors, on considère la famille de morphisme $\tau_f : q' \otimes k \to q'$, $f \in q$, on a*

$$q.q' \backsimeq \cup_{f \in F} Im(\tau_f)$$

dans le poset $I(A)$.

Preuve

- Soit G un filtre de Gabriel commutatif. Alors la multiplication de deux idéaux est associative et commutative car $\otimes$ l'est et car les images de deux morphismes isomorphes sont égales. De plus, l'élément neutre est donné par A, car $q.A \backsimeq q \otimes_A A \backsimeq q$.

♦

- Soient G un filtre de Gabriel de A et $q \subset q'$, $q \in I(A)$. Alors pour tout élément f de q, l'image par τ_f de A est incluse dans q donc dans q'; on en déduit d'après 2.3.5 que $f^{-1}q = A \in G$ pour tout $f \in q$. D'où d'après le point *iii* de la définition de filtre, $q' \in G$.

♦

- Soient G un filtre de Gabriel et $q, q' \in G$. Alors pour tout $f \in q$, τ_f envoi q' dans $q \cap q'$. Donc $q' \subset f^{-1}(q \cap q')$. D'après le premier point, $f^{-1}(q \cap q') \in G$ pour tout $f \in q$ et donc d'après *iii* dans la définition de filtre, $q \cap q' \in G$.

♦

- Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille de filtre de Gabriel commutatifs avec I petit. Alors pour tout q, q' dans l'intersection, $q.q'$ est dans chaque G_i donc dans l'intersection.

♦

- Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille finie de filtres de Gabriel de A. Soit $q \in \cup_{i \in I} G_i$ tel que $q \backsimeq Colim_{\mathcal{J}} q_j$ alors il existe i tel que $q \in G_i$ et donc il existe j tel que $q_j \in G_i \in \cup_{i \in I} G_i$. Donc $\cup_{i \in I} G_i$ est quasi-compact.
Soit maintenant $q \in \cap_{i \in I} G_i$ tel que $q \backsimeq Colim_{\mathcal{J}} q_j$. Alors pour tout i, $q \in G_i$ donc il existe j_i tel que $q_{j_i} \in G_i$. Comme I est fini et $\mathcal{J}$ est filtrant, il existe j au dessus des j_i et $q_j \in G_i$ pour tout i. Soit $q_j \in \cap_{i \in I} G_i$ et $\cap_{i \in I} G_i$ est quasi-compact.

♦

- Soit G un ensemble d'idéaux de A. Supposons que G est quasi-compact, soit $q \in G$, q est l'union de ses sous idéaux finiement engendrés donc d'après 1.4.28, il s'écrit comme leur colimite. Comme G est quasi-compact, il contient un idéal de cette colimite, soit un idéal finiement engendré contenu dans q. Réciproquement, Soit G un filtre de Gabriel où pour tout idéal q, il existe un sous idéal q_F de q dans G finiement engendrés (par une famille finie F). Supposons qu'il existe $\mathcal{J}$ filtrant tel que $q \backsimeq Colim_{j \in \mathcal{J}} q_j$. Alors q_F s'envoi sur cette colimite. L'image de chaque générateur $f \in F$ de q_F est inclus dans un idéal q_{j_f}. F étant fini et $\mathcal{J}$ étant filtrant, il existe j au dessus des j_f tel que q_j contienne l'image de chaque élément de F. Par conséquent l'image de $i(q_F) \to i(q_j)$ est un monomorphisme donc i reflétant les monomorphismes par pleine fidélité, $q_F \to q_j$ est un monomorphisme et G étant filtrant, $q_j \in G$.

♦

- On a $q \backsimeq Im(K(F) \to q)$ et l'image de $K(F)$ par ce morphisme est définit pas une colimite qui commute donc au produit tensoriel et on a de plus $q' \backsimeq K(i(q') \backsimeq Im(K(i(q')) \to q'))$ où $i(q')$ est le préfaisceau de Yoneda associé à q' sur $\mathcal{C}_0$. D'après 1.4.28, l'image du morphisme $K(F) \otimes q' \to q \otimes q'$ est $q \otimes q'$.

  On a donc:

$$q \otimes q' \backsimeq Im(Colim_{(k,f),(k',f') \in \mathcal{C}_0^F \times \mathcal{C}_0^{i(q')}} k \otimes k' \to q \otimes q')$$

  Et en particulier, $q.q'$ admet comme ensemble générateur $F \times i(q')$, et pour tout $k \in \mathcal{C}_0$, on a

$$k \otimes q' \backsimeq Colim_{(k',f') \in \mathcal{C}_0^{i(q')}} k \otimes k'$$

  Soit $Im(\tau_f)$ est engendré par $\{f\} \times i(q')$. Par conséquent, tout générateur de $q.q'$ est inclus dans un objet de la forme $Im(\tau_f)$, $f \in F$ et donc $\cup_{f \in F} Im(\tau_f) \backsimeq q.q'$.

♦

La dernière propriété nous permet de démontrer le lemme suivant qui fait le lien entre le produit d'éléments et le produit d'idéaux.

Lemme 2.3.17. *Soit A un monoïde commutatif. Le morphisme $Elt(A) \to GabA$ qui à f associe l'idéal (f) engendré par f est un morphisme de monoïdes, i.e. $(f \oslash g) = (f).(g)$. En particulier $(f^{\oslash n}) = (f)^n$.*

Preuve
Le monoïde $Elt(A)$ est définit en 2.1.6. Soit $f \in A_k, g \in A_{k'}$ deux éléments de A. Le produit $f \oslash g$ de f et g est l'élément de $A_{k \otimes k'}$ donné par $f \circ (g \otimes Id_k)$. La formule $(f \oslash g) = (f).(g)$ est une conséquence immédiate de la dernière propriété du lemme 2.3.16.

♦

Remarquons d'ores et déjà le fait suivant qui permet déjà de se faire une idée précise du lien entre ces filtres et les fermés de la topologie Zariski tels qu'ils sont définis dans le cas usuel. La description des filtres d'idéaux engendrés par un idéal joue un rôle central dans la théorie, de même que la description ci-dessous de leurs ensembles d'idéaux premiers.

Proposition 2.3.18. *Un ensemble d'idéaux G de $A \in Comm(\mathcal{C})$ est un filtre de Gabriel si et seulement si*

- ◇ *L'ensemble G est non vide.*
- ◇ *L'ensemble G est filtrant.*
- ◇ *L'ensemble G vérifie la condition iii de la définition de filtre de Gabriel.*

Preuve
Tout filtre de Gabriel est non vide et filtrant. Un filtre de Gabriel vérifie donc ces trois conditions. Réciproquement, si $q \in G$, pour tout f dans A, on a $q \subset f^{-1}(q)$ d'après 2.3.5 donc $f^{-1}q \in G$. Donc G est un filtre de Gabriel.

♦

Theoreme 2.3.19. *Soit A un monoïde commutatif. Alors tout filtre de Gabriel de A est commutatif.*

Preuve
Soit G un filtre de Gabriel de A et $p, q \in G$. Alors pour tout $f \in p$, le morphisme $\tau_f : q \to q$ se factorise par $p.q \hookrightarrow q$. Par conséquent $q \subset f^{-1}(p.q)$. G étant filtrant, on obtient que pour tout f dans p, $f^{-1}(p.q) \in G$. Finalement par la condition iii, $p.q \in G$.

♦

Proposition 2.3.20. *Un ensemble d'idéaux G de $A \in Comm(\mathcal{C})$ est un filtre de Gabriel Quasi-Compact, si et seulement si*

- *L'ensemble G est non vide.*
- *L'ensemble G est commutatif.*
- *L'ensemble G est filtrant.*
- *L'ensemble G est quasi-compact.*

Preuve
Supposons que G soit un filtre de Gabriel quasi-compact. Alors il est non vide car $A \in G$,il est filtrant et il est commutatif. Donc il vérifie bien ces quatre propriétés.

Réciproquement, soit G un filtre vérifiant ces quatre propriétés. Il est non vide et filtrant donc il contient A et le point i de la définition de filtre est vérifié. Pour tout $q \in G$ et $f \in A_k$, on a $q \subset f^{-1}q$ d'après 2.3.5. Donc comme G est filtrant $f^{-1}q \in G$ et donc G vérifie le point ii de la définition de filtre. Soit maintenant q un idéal de A et $q' \in G$ tel que pour tout $f \in q'$, $f^{-1}(q) \in G$, alors q' contient un idéal de finiement engendré q'' qui est lui même dans G et admet un ensemble fini F générateur et on pose $p := \cap_{f \in F} f^{-1}q$. $p \in G$ car G est stable par intersection finie. On sait que $\tau_f : p \to q$ donc $Im(\tau_f) \subset q$ pour tout $f \in F$. D'après la caractérisation du produit de deux idéaux dans 2.3.16, cela implique $q''.p \subset q$ et donc $q \in G$.

♦

Definition 2.3.21. Un filtre de Gabriel G est dit primitif s'il est engendré par un idéal q, i.e. G est le plus petit filtre de Gabriel contenant q. On le notera alors G_q.

On prouve l'existence de tels filtre et on donne leur description dans la proposition suivante.

Proposition 2.3.22. *Soit q un idéal finiement engendré de $A \in Comm(\mathcal{C})$ alors le plus petit filtre de Gabriel contenant q est quasi-compact et décrit par*

$$G_q := \{p \in I(A) \; tq \; \exists \, n \in \mathbb{N} \; tq \; q^n \subset p\}$$

De plus, si $q = (f)$,

$$G_f := \{p \in I(A) \; tq \; \exists \, n \in \mathbb{N} \; tq \; f^{\oslash n} \subset p\}$$

Preuve
On note G l'ensemble des idéaux contenant une puissance de q. D'après 2.3.20 c'est un filtre de Gabriel donc $G_q \subset G$. Ses objets étant construits par produits et inclusions, on a aussi $G \subset G_q$. D'où l'égalité.

♦

Corollaire 2.3.23. *Soient $A \in Comm(\mathcal{C})$ et q un idéal de A finiement engendré. Soit G_q le filtre primitif engendré par q. Alors l'ensemble des idéaux premiers de G_q est l'ensemble des idéaux premiers de A qui contiennent q.*

Preuve
On applique la proposition précédente.

♦

Lemme 2.3.24. *Soit A un monoïde commutatif dans $\mathcal{C}$ et $Spec(B)$ un ouvert Zariski de $Spec(A)$, alors le filtre de Gabriel associé à B, G_B, est quasi-compact.*

Preuve
Soit $q \in G$ et I un diagramme filtrant tel que $q \simeq colim_{i \in I} q_i$. Alors $q \otimes_A B \simeq B$ donc $B \simeq colim_{i \in I}(q_i \otimes_A B)$. Comme B est de présentation finie dans $A - mod$, il existe i telle que ce morphisme se factorise par $q_i \otimes_A B$. De plus, u est plat donc $q_i \otimes_A B \simeq q_i.B$ est un idéal de B. Le morphisme $q_i \to B$ est donc un monomorphisme et un épimorphisme scindé donc un isomorphisme.

♦

Remarque 2.3.25. - Les filtres quasi-compacts sont presque les filtres associés aux ouverts Zariski quasi-compacts. Il leur manque en fait une seule condition, celle d'être engendré par un seul idéal q en un sens que nous donnons dans la suite. Dans le cas quasi-compact, les filtres primitifs donnent la bonne notion de filtre engendré par un idéal.

- On parlera de localisation quasi-compacte de $A - mod$, $A \in Comm(\mathcal{C})$ pour une localisation dont le filtre de Gabriel associé est quasi-compact.

Nous pouvons alors donner une description précise des objets qui vont nous intéresser tout particulièrement dans la suite, i.e. la bonne notion de filtre de Gabriel engendré par un idéal. La notion de filtre primitif fonctionne pour les filtres quasi-compacts mais pas en toute généralité pour un problème de stabilité, plus précisément une intersection petite infinie de filtres primitifs n'est pas un filtre primitif. Nous pallions à ce problème en donnant une autre notion de filtre engendré par un idéal, nous dirons "associé" plutôt qu'engendré, qui est stable par intersections petites.

Definition 2.3.26. Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$

- ▷ Soit q un idéal de A. On associe à q un filtre de Gabriel G^q décrit par

$$G^q = \cap_{f \in q} G_f$$

  Plus précisément, les idéaux de G^q sont les idéaux de A qui contiennent une puissance de chaque élément de q.

- ▷ On appellera filtre de Gabriel localement primitif un filtre de Gabriel de la forme G^q pour un idéal q de A donné.

Remarque 2.3.27. Les idéaux premiers du filtre G^q sont les idéaux premiers contenant q.

Proposition 2.3.28. *Soit q un idéal de $A \in Comm(\mathcal{C})$ alors le filtre de Gabriel primitif G_q est inclus dans le filtre de Gabriel localement primitif G^q. Si q est finiement engendré, G_q est quasi-compact et on a égalité $G_q = G^q$.*

Preuve
Il est clair que G^q est un filtre de Gabriel contenant q. Par conséquent il contient G_q. Supposons maintenant que q est finiement engendré. La proposition 2.3.22 nous donne une description de G_q. L'idéal q admet un système fini de générateurs F. Soit $p \in G^q$, alors pour tout $f \in F$, il existe n_f tel que $f^{n_f} \in p$. Si m est un entier naturel, les générateurs de q^m sont tous les m-uplet de générateurs de q. Soit $m = Card(F) * Max_f(n_f)$, alors tout générateur de q^m est dans p. Donc $q^m \subset p$.

♦

Corollaire 2.3.29. *Soit q un idéal de $A \in Comm(\mathcal{C})$, alors*

- ◇ *Si $F \subset q_0$ est une famille génératrice alors $G^q \backsimeq \cap_{f \in F} G_f$. Réciproquement si $G^q = \cap_{f \in F} G_f$ alors $G^q = G^{q_F}$ où q_F est l'idéal engendré par F.*
- ◇ *Si $q = \cup_{i \in I} q_i$ on a $G^q \backsimeq \cap_{i \in I} G^{q_i}$. Réciproquement si $G^q = \cap_{i \in I} G_{q_i}$ alors $G^q = G^{\cup_{i \in I} q_i}$.*

Preuve

- Soit $g \in q_0$. Supposons que F est génératrice. Notons (g) l'idéal engendré par l'élément g, donné par $K(\{g\})$ (1.4.27). On remarque que par 1.4.28

$$q \backsimeq colim_{F' \subset F,\, fini}(\cup_{f \in F' \subset F} q_{F'})$$

  Comme (g) est un idéal finiement engendré, il est facile de voit que le morphisme d'inclusion de (g) dans q se factorise par un $q_{F'}$. En effet, le morphisme $\{g\} \to i(q)$ où $i : \mathcal{C} \to Pr(\mathcal{C}_0)$ est le foncteur de Yoneda se factorise par un élément de la colimite. Cette factorisation se relève à (g) par l'adjonction entre i et K. On en déduit que tout idéal qui contient une puissance de chaque $f \in F$, contient une puissance de g. Ceci pour tout $g \in q$, d'où l'égalité. La réciproque est immédiate.

♦

- Même preuve que le point précédent.

♦

Ces relations passent bien entendu aux filtres quasi-compacts.

2.4 Le Lieu des Ouverts Zariski d'un Schéma Affine

Le théorème de classification que l'on donne nécessite une hypothèse supplémentaire comme cela à été évoqué un peu plus tôt. Nous maîtrisons mal les éléments d'un idéal qui appartiennent aux q_k lorsque $k \neq 1$. Par contre, nous savons par 1.4.28 et 2.3.29 que si l'unité est génératrice, alors pour tout idéal q, q_0 est générateur et caractérise bien le filtre localement primitif associé à q. On se ramène donc par cet intermédiaire à des objets que nous maîtrisons bien. La question d'une généralisation de ce théorème au cas où 1 n'est pas générateur n'est pas une priorité vis à vis des exemples connus. Cette question revient en fait à caractériser les filtres G_f d'un monoïde commutatif A lorsque $f \in A_k$. L'auteur a tenté de trouver des ouvert affines correspondant, or s'il existe bien un candidat affine A_f à cette fonction, qui envoi sur A par un épimorphisme de présentation finie, sa platitude n'est absolument pas claire (sans si k est un monoïde). Il se pourrait donc que l' ouvert associé ne soit pas affine ou pire qu'il n'y ai pas d'ouvert associé.

Nous préciserons dans quelle proposition ou theoreme cette hypothèse est indispensable. Nous commençons par l'écrire de manière précise.

Hypothèse 2.4.1. On dit que l'unité de $\mathcal{C}$ est génératrice si le foncteur $(-)_0$ est conservatif. En particulier, tout A module est alors générateur dans $A - mod$.

Cette hypothèse est utilisé dans 2.4.10, à la fin de la partie de classification des ouverts affines d'un schéma affine, pour montrer que les $Spec(A_f)$ forment alors une base d'ouverts. Elle est ensuite utilisée dans 2.4.13 qui permet de démontrer le théorème 2.4.17. Dans ce cas, l'hypothèse permet de pallier une déficience. On ne sait pas en effet reconnaître les filtres primitifs qui sont associé à des ouverts affine de A, sauf dans le cas des filtres G_f, $f \in A_0$, associés aux $Spec(A_f)$. Il nous est donc nécessaire de pouvoir nous ramener a ces filtres particuliers pour mettre en évidence un isomorphismes entre Ouverts Zariski et Filtres localement primitifs.

2.4.1 Classification des Ouverts Affines d'un Schéma Affine

On entre maintenant dans le vif du sujet. la première étape est donc de montrer que les filtres associés aux ouverts affine d'un schéma affine vérifient bien les propriétés de régularité annoncées.

On va maintenant montrer que le fait d'associer à un ouvert Zariski affine, un filtre de Gabriel quasi-compact respecte les unions finies et les intersections finies du poset des ouverts affines. Bien entendu, toute union finie d'ouverts affines n'est pas affine. Cette preuve et la réciproque qui suit (theoreme 2.4.6) sur la question des unions forment un des points les moins formels et les plus techniques de cette partie de la thèse.

Proposition 2.4.2. *Soient $X := Spec(A) \in Aff_{\mathcal{C}}$, $Y := Spec(B)$, $Y' := Spec(B')$ deux ouverts Zariski affines de X et $G_B, G_{B'}$ leurs filtres de Gabriel associés. Alors $Y \times_X Y'$ est un ouvert affine de X dont le filtre de Gabriel associé est $G_B \cup G_{B'}$.*

Preuve
On a $Y \times_X Y' \simeq Spec(B \otimes_A B')$. Il est alors plus simple de passer par les localisation de $A - mod$. On sait que $B - mod \cap B' - mod$ est une localisation de $A - mod$. De plus ses objets sont les mêmes que les objets de $B \otimes_A B' - mod$, qui est elle même une localisation. Les deux sous catégories localisantes sont donc égales en tant que sous-$\mathcal{C}$-catégorie pleine de $A - mod$. Et on obtient en particulier que leurs foncteurs faisceautisation sont tous deux des adjoints à gauche d'un même foncteur d'oubli donc sont isomorphes. D'où l'égalité.

♦

Intéressons nous de plus prés aux unions de Filtres de Gabriel. On peut les décrire un peu plus précisément à l'aide des deux résultats suivants.

Lemme 2.4.3. *Soient G_q et $G_{q'}$ deux filtres de Gabriel primitifs de $A \in Comm(\mathcal{C})$, alors la réunion de ces deux filtres dans le poset des filtres de Gabriel primitifs est donné par $G_{q.q'}$. De plus, les idéaux premiers de $G_{q.q'}$ sont donné par l'union disjointe dans les ensembles de l'ensemble des idéaux premiers de G_q et de l'ensemble des idéaux premiers de $G_{q'}$.*

Preuve
Dans le cas quasi-compact, qui revient à supposer que q et q' sont finiement engendrés, c'est une conséquence directe de la proposition précédente et de la définition d'idéal premier.

Dans le cas général, il suffit de remarquer que $G_{q.q'}$ contient G_q et $G_{q'}$ et que si G_p les contient aussi, il contient $G_{q.q'}$.

♦

Ce dernier lemme ne traite pas le cas qui nous intéresse vraiment lorsque les filtres ne sont pas quasi-compacts. Pour cela on a le lemme suivant.

Lemme 2.4.4. *Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$ et q, q' deux idéaux de A alors $G^q \cup G^{q'} = G^{q.q'}$.*

Preuve
On a $G^q \cup G^{q'} = \cap_{f \in q, f' \in q'} G_f \cup G_{f'} = G^q \cup G^{q'} = \cap_{f \in q, f' \in q'} G_{f \oslash f'} = G^{q.q'}$.

♦

Il est aussi utile de savoir ce qui se passe pour les idéaux premiers.

Corollaire 2.4.5. *Soient G, G' deux filtres de Gabriel localement primitifs de $A \in Comm(\mathcal{C})$. Alors les idéaux premiers de $G \cup G'$ sont exactement les idéaux premiers contenus dans G ou G'.*

Preuve
Immédiat à partir du lemme précédent.

♦

Nous allons maintenant donner le théorème qui assure une correspondance entre Ouverts Zariski et Filtres de Gabriel. Plus précisément il s'agit de la réciproque à la compatibilité aux réunion, i.e. si un ouvert affine contient une union d'affine et que les filtres sont égalisé, l'ouvert était au départ égal à l'union qu'il contient.

Theoreme 2.4.6. *Soit $Y := Spec(B)$ un ouvert affine de $X := Spec(A) \in Aff_{\mathcal{C}}$ et $(U_i = Spec(B_i))_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts Zariski de Y. Alors cette famille est un recouvrement Zariski affine si et seulement si $G_B = \cap_{i \in I} G_{B_i}$.*

Preuve
On rappelle que la famille $Y_i \to Y$ est couvrante si le foncteur $B - mod \to \prod B_i - mod$ est conservatif.

On définit l le foncteur qui à tout A-module M associe

$$l(M) := ker(\textstyle\prod_{i,j} M \otimes_A B_i \otimes_B B_j \rightrightarrows \prod_i M \otimes_A B_i)$$

Ce foncteur commute aux limites enrichies finies car il est définit par des limites finies et un produit tensoriel $\mathcal{C}$-exact. On en déduit de même, par platitude, qu'il commute au produit tensoriel par les ouverts Zariski de A, i.e. pour tout A-module M et tout i, $l(M) \otimes_A B_i \simeq l(M \otimes_A B_i)$.

Pour montrer $l^2 = l$, Montrons que l vaut l'identité sur $B_i - mod$ pour tout i. Soit M un B_i-module, alors on a un unique monomorphisme $M \to l(M)$ qui égalise les deux flèches du noyau. De plus on a un morphisme

$$l(M) \to \textstyle\prod_{j \in I} M \otimes_A B_j \to M \otimes_A B_i \simeq M$$

Dont la composé sur M est l'identité et la composé sur $l(M)$ est l'unique endomorphisme de $l(M)$ à égaliser les deux flèches du noyau, soit l'identité. D'où $M \simeq l(M)$.

On vérifie maintenant que $l^2 = l$, pour tout $M \in A - mod$

$$l^2(M) \simeq Ker(\textstyle\prod_{i,j} l(M) \otimes_A B_i \otimes_A B_j \rightrightarrows \prod_i l(M) \otimes_A B_i)$$

Or pour tout i on a

$$l(M) \otimes_A B_i \simeq l(M \otimes_A B_i) \simeq M \otimes_A B_i$$

On en déduit donc que $l^2(M)$ est isomorphe à $l(M)$.

On va montrer que la catégorie $\mathcal{L}$ donnée par l'image essentielle de l est une localisation. On commence par démontrer que l est adjoint de l'oubli. L'unité de l'adjonction est donnée par le morphisme naturel

$$M \to l(M)$$

La counité de l'adjonction est donné pour $N \simeq l(M)$ dans l'image essentielle de l par l' isomorphisme

$$l^2(M) \simeq l(M)$$

qui induit un isomorphisme

$$l(N) \simeq N$$

Les identités triangulaires de l'unité et de la counité se vérifient comme dans 1.2.14 en relevant les identités triangulaires des unités et counités des adjonction pour les $B_i - mod$.

Finalement, l est un foncteur localisation dont la localisation associée $\mathcal{L}$ est donnée par son image essentielle. De plus, cette localisation contient les $B_i - mod$ donc leur réunion. Enfin, elle est contenue dans $B - mod$ car pour tout M, $l(M)$ est une limite de B-modules donc est un B-module.

On peut maintenant conclure dans le cas I fini. Si $B - mod = \cup_{i \in I}(B_i - mod)$ dans le poset $LocA$, alors $\mathcal{L}$ étant compris entre $B - mod$ et la réunion des $B_i - mod$, on a $\mathcal{L} = B - mod$. Pour tout B-module M, on a alors $M \backsimeq l(M)$, ce qui assure la conservativité du foncteur $B - mod \to \prod_i B_i - mod$.

Réciproquement, si la famille de foncteurs $- \otimes_A B_i$ est conservative. Alors on remarque, pour $M \in B - mod$,

$$l(M) \otimes_A B_i \backsimeq l(M \otimes_A B_i) \backsimeq M \otimes_A B_i$$

D'où $l(M) \backsimeq M$. et donc $B - mod = \mathcal{L}$.

♦

Notons que la résultat précédente peut être établi pour une famille I petite. Un recouvrement Zariski étant quasi-compact, il sera simple de montrer que pour un tel recouvrement Zariski le filtre résultant est l'intersection des filtres. Pour la réciproque nous aurons besoin d'un résultat de quasi-compacité sur les filtres de la forme G_B (ou de manière équivalente sur les catégories d'après de la forme $B - mod$). Ce résultat est donné dans 2.4.13.

Toutes ces preuves avaient pour but de définit un morphisme de poset respectant les unions finies et les intersections finies. Nous avons un premier résultat.

Corollaire 2.4.7. *Le morphisme Ψ qui a un ouvert Zariski affine B de A dans $Comm(\mathcal{C})$ associe son filtre de Gabriel est injectif, compatible aux unions finies dans les ouverts affine de A (lorsqu'elles existent) et compatible aux intersections finies dans les ouverts affines de A.*

Preuve

Il s'agit simplement de formuler les deux propositions précédentes et leur conséquence immédiate en une seule phrase.

♦

Theoreme 2.4.8. *Alors soit A un monoïde commutatif*

- ◇ *Tout filtre de Gabriel associé à un ouvert affine de A est primitif.*
- ◇ *Supposons que l'unité 1 soit génératrice i.e. que le foncteur $(-)_0$ soit conservatif, alors tout ouvert Zariski affine de $Spec(A)$ est union finie d'ouverts de la forme $Spec(A_f)$.*

Preuve

Ce theoreme est l'aboutissement de la première partie et c'est aussi le point crucial ou l'hypothèse de conservativité de $(-)_0$ devient incontournable.

- On montre pour commencer que le filtre G_B est primitif. Soit $Y := Spec(B)$ un ouvert affine de X. On écrit

  $$G_B = \cup_{q \in G_B} G_q$$

  donc

  $$\mathcal{L}_B = \cap_{q \in G_B} \mathcal{L}_q$$

  En particulier $- \otimes_A B \backsimeq Coliml_q$ où les l_q dont les foncteurs localisation associés aux $\mathcal{L}_q$. Comme B est de présentation finie en tant que A-algèbre, l'isomorphisme $B \backsimeq colim(l_q(A))$ implique l'existence d'un idéal q de G_B et d'un morphisme $r : B \to l_q(A)$ tel que $p \circ r = Id$ où p est le morphisme naturel de $l_q(A)$ dans B. On en déduit en particulier que $l_q(A) \in B - mod$. Or les foncteurs faisceautisation l_q sont des identités sur $B - mod$. On a donc, pour tout $q' \in G_B$,

  $$l_{q'} \circ l_q(A) \backsimeq l_q(A)$$

  Soit

  $$B \backsimeq l_q(A)$$

  Et en particulier

  $$B - mod \backsimeq l_q A - mod$$

On montre pour terminer que $\mathcal{L}_q$ est une localisation de $B - mod$. Pour cela il suffit de montrer que pour tout A-module M, $l_q(M)$ est un B-module. Or le foncteur l_q est $\mathcal{C}$-adjoint à gauche donc commute aux $\mathcal{C}$-colimites. En particulier pour tout X dans $\mathcal{C}$ et Y dans $A - mod$, $X \otimes Y \in A - mod$ et

$$l_q(X \otimes Y) = X \otimes l_q(Y)$$

Si maintenant X, Y sont deux A-modules, on a

$$X \otimes_A Y := coker(\; X \otimes A \otimes Y \rightrightarrows X \otimes Y \;)$$

En appliquant ce qui précède, on obtient

$$l_q(X \otimes_A Y) \backsimeq X \otimes_A l_q(Y)$$

En particulier, en appliquant le foncteur l_q à M et aux diagramme structurel de A-linéarité de M on obtient un $l_q(A)$-module $l_q(M)$.

Cela implique finalement $G_B = G_q$, i.e. le filtre G_B est primitif

♦

- On suppose maintenant que $(-)_0$ est conservatif, alors d'après 1.4.28, q est engendré par q_0. De plus, G_B étant quasi-compact, on peut choisir q finiement engendré soit admettant un ensemble générateur fini F inclus dans q_0. On obtient donc

$$G_B = G_q = \cap_{f \in F} G_f$$

Et d'après 2.4.6, la famille finie $(Spec(A_f))_{f \in F}$ forme donc un recouvrement Zariski affine de $Spec(B)$.

♦

Corollaire 2.4.9. *Soit $Spec(B)$ un ouvert affine de $Spec(A)$ et $(Spec(B_i))_{i \in I}$ une famille d'ouverts affines. Alors cette famille forme un recouvrement Zariski de $Spec(B)$ si et seulement si $B - mod = \cup_{i \in I}(B_i - mod)$ dans le poset $LocA$.*

Preuve

La seule difficulté est de montrer que si $B - mod = \cup_{i \in I}(B_i - mod)$, on peut se ramener à une union finie. On a $G_q := G_B = \cap_{i \in I} G_{q_i}$ où $G_{q_i} := G_{B_i}$. L'idéal q est engendré par les q_i, on peut donc l'écrire, comme dans 1.4.28 comme la colimite filtrante des unions finies de q_i. L'idéal q étant finiement engendré, on met facilement en évidence un ensemble $J \subset I$ fini et un morphisme $q \to \cup_{j \in J} q_j$ dont la composé avec le morphisme inclusion $\cup_J q_j \to q$ est l'identité. On a donc $q \backsimeq \cup_{j \in J} q_j$.

On a alors d'après 2.4.6 que les $(Spec(B_j))_{j \in J}$ forment un recouvrement Zariski de $Spec(B)$ et donc qu'il en est de même pour les $(Spec(B_i))_{i \in I}$. Réciproquement, si les $(Spec(B_i))_{i \in I}$ forment un recouvrement Zariski, on peut extraire par quasi-compacité une sous-famille finie couvrante $(Spec(B_j))_{j \in J}$ qui par 2.4.6 donne

$$B - mod = \cup_{j \in J} B_j - mod$$

Et on a

$$\cup_{j \in J} B_j - mod \subset \cup_{i \in I}(B_i - mod) \subset B - mod$$

D'où l'égalité voulue.

♦

Corollaire 2.4.10. *Soit A un monoïde commutatif. Les ouverts affines de $Spec(A)$ de la forme $Spec(A_f)$, $f \in A_0$ forment une base d'ouvert du lieu des ouverts Zariski de $Spec(A)$.*

Preuve

Les ouverts affines forment une base d'ouvert et sont tous recouverts par des ouverts de la forme $Spec(A_f)$.

♦

2.4.2 Classification des Ouverts Zariski d'un Schéma Affine

On en arrive maintenant au premier résultat de classification le plus important concernant les ouverts Zariski d'un schéma affine. Nous devons d'abord donner la définition suivante.

Definition 2.4.11. Soit F un ouvert Zariski de $X := Spec(A) \in Aff_{\mathcal{C}}$. Alors il existe une famille d'ouverts Zariski affines de X tel que F soit l'image de $\coprod_{i \in I} Spec(B_i) \to X$. On définit le filtre de Gabriel associé à F comme étant l'intersection des filtres de Gabriel associés aux B_i.

Lemme 2.4.12. *Soit F un ouvert Zariski de $Spec(A) \in Aff_{\mathcal{C}}$ alors le filtre de Gabriel associé à F ne dépend pas du recouvrement choisi.*

Preuve

Soit (B_i) et (B_j) deux familles dans $Comm(\mathcal{C})$ dont l'image par $Spec$ forment des atlas affine de F. Alors $(B_i \otimes_A B_j)$ est aussi un recouvrement de F. Le filtre associé à F par ce dernier recouvrement est $\cap_i G_{\cup_j q_i q_j}$. Or a i fixé, on a $G_{q_i} = G_{\cup_j q_i q_j}$ le filtre associé à F par le recouvrement $(B_i \otimes_A B_j)$ est égal au filtre associé à F par le recouvrement (B_i). Les rôles des deux recouvrement de départ étant symétrique, on en déduit la même chose pour le filtre associé à F par (B_j). D'où l'égalité.

♦

Proposition 2.4.13. *Soit $X := Spec(A) \in Aff_{\mathcal{C}}$.*

- ◇ *Le filtre de Gabriel associé à un ouvert Zariski F de X est localement primitif, i.e. de la forme G^q, $q \in I(A)$. De plus il est quasi-compact si F est un ouvert quasi-compact.*
- ◇ *On suppose que 1 est générateur, i.e. $(-)_0$ est conservatif. On a une bijection entre l'ensemble des ouverts Zariski de X et l'ensemble des filtres de Gabriel localement primitifs X. Cette bijection induit par restriction une bijection entre les ouverts quasi-compacts de X et les Filtres de Gabriel quasi-compacts primitifs de A.*

Notons avant de commencer que c'est bien dans le second point de cette démonstration que l'hypothèse de conservativité de $(-)_0$ va être fondamentale. On a en effet besoin de cette hypothèse pour se ramener aux ouverts élémentaires $Spec(A_f)$.

Preuve

- Soit F un ouvert de $Spec(A)$. Il admet un atlas affine $Spec(B_i)$. D'après 2.4.8, le filtre de Gabriel de chaque $Spec(B_i)$ est primitif. Le filtre de Gabriel associé à F est donc

  $$\cap_{i \in I} G_{B_i} \backsimeq \cap_{i \in I} G_{q_i} \backsimeq \cap_{i \in I, f \in q_i} G_f \backsimeq G^q$$

  où q est l'idéal engendré par les q_i d'après 2.3.29

  Il est enfin clair que les ouverts quasi-compacts s'envoient sur des filtres quasi-compacts. En effet, un ouvert quasi-compact admet un recouvrement fini par des affines. Son filtre associé est donc une intersection finie de filtres quasi-compact, il est par conséquent quasi-compact.

  ♦

- On suppose maintenant que 1 est générateur. On un morphisme bien définit des ouverts Zariski vers les filtres de Gabriel commutatifs de la forme G^q, $q \in I(A)$. On montre la surjectivité. Soit G^q un filtre de Gabriel commutatif associé à un idéal q. On a $G^q = \cap_{f \in q_0} G_f$. L'ouvert Zariski , image de $\coprod_{f \in q_0} Spec(A_f) \to A$ envoi donc sur G^q.

  On montre maintenant l'injectivité. Soit F, F' deux ouverts Zariski qui ont le même filtre de Gabriel associé. Les ouverts F et F' admettent chacun un recouvrement par des ouverts affines, plus précisément, soit $(Spec(A_f)_{f \in J}$ recouvrant F et $(Spec(A_f))_{f \in J'}$ recouvrant F'. Leur filtres de Gabriel associés sont G^q et $G^{q'}$ où q et q' sont engendrés respectivement par des familles J et J' d'éléments de A. On suppose $G^q = G^{q'}$. Pour tout $f \in q_0$, il existe n tel que $f^n \in q'$. Or $A_{f^n} \backsimeq A_f$. donc tout ouvert Zariski A_f de la famille couvrante de F est un ouvert Zariski de F'. Comme F et F' sont des schémas, cela implique que F est un ouvert Zariski de F'. Ces derniers jouant des rôles symétriques, on a égalité.

  Il est enfin clair que si G^q est quasi-compact alors on peut l'écrire comme une intersection finie de G_f et par conséquent l'ouvert Zariski associé admet un recouvrement fini par des $Spec(A_f)$ et est donc quasi-compact.

  ♦

Definition 2.4.14. Soit A un monoïde commutatif dans $\mathcal{C}$. On définit $lp(A)$ le colieu dont les objets sont les filtres de Gabriel localement primitifs. La structure de colieu provient de l'isomorphisme contravariant de posets avec $Ouv(A)$.

Il existe un espace topologique clairement identifiable et toujours noté $lp(A)$ associé à ce colieu. Ses points sont les idéaux de A modulo la relation d'équivalence donnée par $q \sim q'$ si $G^q = G^{q'}$ et ses fermés sont les filtres de Gabriel localement primitifs. Décrivons de même plus précisément ses points. Pour les idéaux finiement engendrés, q, q' $q \sim q'$ si il existe deux entiers n, m, tels que $q^n \subset q'$ et $q'^m \subset q$ (ils engendrent le même filtre de Gabriel primitif) et pour les autres idéaux $q \sim q'$ si pour chaque élément f de q, il existe une puissance de f dans q' et réciproquement. La question que l'on se pose alors concerne la sobriété de $lp(A)$. La réponse que nous allons donner est que cet espace n'est pas sobre et que son sobrisé admet comme point les idéaux premiers de A.

Il ne nous reste maintenant plus qu'une seule étape pour retrouver le résultat plus intuitif d'une caractérisation des ouverts Zariski de A par ses idéaux premiers. Pour cela commençons par le lemme suivant qui décrit les fermés de l'espace.

Lemme 2.4.15. *Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$. On considère le poset des fermés $lp(A)$ associé à $Ouv(A)$.*

- ▷ *Soit p un idéal de A alors G^p est un fermé irréductible si et seulement si il admet un représentant p premier. De plus, dans ce cas, p est l'unique représentant premier de G^p.*
- ▷ *Deux fermés irréductibles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes idéaux premiers.*
- ▷ *Deux fermés sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes idéaux premiers.*

Preuve

- L'assertion *il existe q, q' tel que $G^p = G^q \cup G^{q'}$* est équivalente à l'assertion *il existe q, q' tel que $p = q.q'$*. On a par conséquent G^p est irréductible si et seulement si pour tout q, q' tel que $G^p = G^q \cup G^{q'}$, alors q ou q' est isomorphe à p si et seulement si pour tout q, q' tel que $p = q.q'$, q ou q' est isomorphe à p si et seulement si p est premier.
  Montrons maintenant l'unicité. Soit G^p et $G^{p'}$ deux fermés irréductibles égaux. Alors soit $f \in p$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n \subset p'$ donc $f \in p'$. On a donc $p \subset p'$ et par symétrie des rôles, $p = p'$.

♦

- Soit $G^p, G^{p'}$ deux fermés irréductibles. S'ils ont les mêmes idéaux premiers, alors $p \in G^{p'}$ d'où $p' \subset p$. De même, par symétrie, $p \subset p'$. Finalement $p = p'$.

♦

- Soit $G^q, G^{q'}$ deux fermés. On les écrit comme union de fermés irréductibles, i.e. $G^q = \cup_{i \in I} G^{p_i}$ et $G^{q'} = \cup_{j \in J} G^{p_j}$. Pour tout i, il existe j tel que $p_j \subset p_i$ donc $G^{p_i} \subset G^{p_j}$. Soit $G^q \subset G^{q'}$. Par symétrie des rôles, on a de même $G^{q'} \subset G^q$, d'où l'égalité.

♦

On peut maintenant donner les résultats obtenus, sous forme d'un theoreme.

Definition 2.4.16. L'espace Zariski associé à $A \in Comm(\mathcal{C})$, noté $Lp(A)$, est l'espace topologique dont les points sont les idéaux premiers de A et dont les fermés sont les ensembles d'idéaux premiers G^{pr} appartenant à un même filtre de Gabriel $G \in lp(A)$.

Theoreme 2.4.17. *Supposons que* 1 *soit générateur. Soit $A \in Comm(\mathcal{C})$. L'espace Zariski $Lp(A)$ associé à A est sobre et sa topologie définit un colieu isomorphe a $lp(A)$ et un lieu isomorphe à $Ouv(A)$.*

D'après 2.4.15, le lieu définit par sa topologie est isomorphe à $Ouv(A)$. Il est de plus clair que cet espace est sobre car les fermés irréductibles sont engendrés par un unique idéal premier.

♦

Chapitre 3

Algèbre Homotopique

3.1 Une Théorie Homotopique Relative

On se fixe une catégorie de base $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$, monoïdale symétrique fermée, ω-localement présentable, bicomplète. On considère les catégories simpliciales associées, c'est à dire les catégories $s\mathcal{C} := \mathcal{C}^{\Delta^{op}}$, $Comm(s\mathcal{C}) \simeq sComm(\mathcal{C}) := Comm(\mathcal{C})^{\Delta^{op}}$ et pour $A \in sComm(\mathcal{C})$, $sA - mod := A - mod^{\Delta^{op}}$ et $sA - alg := A - alg^{\Delta^{op}}$. On désire ajouter des hypothèses sur $\mathcal{C}$ de manière a ce que ces catégories soient munies de structures de modèles simpliciales et telle que les adjonctions entre ces catégories soient de Quillen. On désire de plus que ces structures de modèles soient compactement engendrées.

3.1.1 Une Structure de Modèles

L'hypothèse que nous avons retenue permet de simplifier de nombreux cas mais il n'est pas exclu qu'il soit nécessaire de montrer l'existence de ces structures de modèles par d'autres moyens dans certains exemples. Donnons tout de suite la définition qui nous intéresse.

Definition 3.1.1. Soit J un ensemble. Une catégorie simpliciale $\mathcal{D}$ est monadique sur $sEns^J$ si il existe une monade simpliciale T sur $sEns^J$ telle que $\mathcal{D} \simeq T - alg$.

Definition 3.1.2. Soit J un ensemble. Une théorie simpliciale sur $sEns^J$ est une monade simpliciale commutant aux colimites filtrantes.

Hypothèses 3.1.3. Soit $\mathcal{C}_0$ la sous catégorie génératrice de $\mathcal{C}$ donnée en première partie, notons J l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}_0$. Nous supposerons dans cette section que la catégorie de base $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ vérifie

i. L'adjonction induite entre $s\mathcal{C}$ et $sEns^J$ est monadique et la monade associée est une théorie simpliciale.

ii. L'adjonction induite entre $sComm(\mathcal{C})$ et $sEns^J$ est monadique et la monade associée est une théorie simpliciale.

Notons que l'ensemble J considéré est canoniquement associé à $\mathcal{C}$.

On se base alors sur un travail de Rezk ([R]) pour assurer l'existence de structures de modèles satisfaisantes.

Theoreme 3.1.4. *[R]*
Soit J un ensemble et T une théorie simpliciale sur $sEns^J$ alors la catégorie $T - alg$ des algèbres simpliciales sur T admet une structure de modèles simpliciale propre à droite. Un morphisme dans $T - alg$ est une équivalence faible ou une fibration si son image dans $sEns^J$ est respectivement une équivalence faible ou une fibration pour la structure projective.

On note (sK, si) l'adjonction induite par i et K entre $s\mathcal{C}$ et $sEns^J$.

Corollaire 3.1.5. *Les catégories $s\mathcal{C}$ et $sComm(\mathcal{C})$ sont munies de structures de modèles simpliciales propres à droite. Un morphisme $A \to B$ pour ces structures est une équivalence faible ou une fibration si son image dans $sEns^J$ est respectivement une équivalence faible ou une fibration, i.e. si pour tout $k \in \mathcal{C}_0$, $A_k \to B_k$ est respectivement une équivalence faible ou une fibration d'ensembles simpliciaux. De plus, l'adjonction entre $s\mathcal{C}$ et $sComm(\mathcal{C})$ est une adjonction de Quillen.*

Pour un monoïde commutatif simplicial de $\mathcal{C}$, A, on a des résultats équivalents. Ceci est une conséquence du théorème de Borceux sur la caractérisation des catégories monadiques.

Theoreme 3.1.6. *[Bc] p 212.*
Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur. F est monadique si et seulement si

i. Il a un adjoint à gauche.

ii. Il est conservatif.

iii. Pour toute paire $u, v :$ $X \rightrightarrows Y$ $\in \mathcal{A}$ telle que $(F(u), F(v))$ admette un conoyau scindé, alors (u, v) admet un conoyau qui est préservé par F.

La composition de l'adjonction entre $s\mathcal{C}$ (resp $sComm(\mathcal{C})$) et $sEns^J$ avec l'adjonction entre $s\mathcal{C}$ et $sA-mod$ (resp $sComm(\mathcal{C})$ et $sA-alg$) préserve clairement ces trois propriétés dans la mesure où le foncteur d'oubli $sA-mod \to s\mathcal{C}$ est conservatif, admet un adjoint à gauche et commute aux conoyaux. On a donc le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.7. *Soit $A \in sComm(\mathcal{C})$. Les catégories $sA-mod$ et $sA-alg$ sont munies de structures de modèles simpliciales propres à droite. Un morphisme pour ces structures est une équivalence faible ou une fibration si son image dans $sEns^J$ est respectivement une équivalence faible ou une fibration. De plus, les adjonction entre $s\mathcal{C}$ et $sA-mod$ et entre $sComm(\mathcal{C})$ et $sA-alg$ sont des adjonctions de Quillen.*

Proposition 3.1.8. *La Catégorie $s\mathcal{C}$ (resp $sA-mod$) est une catégorie de modèles monoïdale.*

Preuve:
Les preuves pour $s\mathcal{C}$ et $sA-mod$ sont analogues, nous le prouverons donc pour $s\mathcal{C}$. Soient I, I' les ensembles respectifs de cofibrations génératrices et cofibrations triviales génératrices. I et I' sont les images par le foncteur adjoint à gauche respectivement des cofibrations génératrices et des cofibrations triviales génératrices de $sEns^J$. Il suffit de montrer (cf [H] chap. IV) que $I\Box I$ est un ensemble de cofibrations et que $I\Box I'$ et $I'\Box I$ sont des ensembles de cofibrations triviales. Cela est vrai pour les cofibrations génératrices et les cofibrations triviales génératrices de $sEns^J$. De plus, les cofibrations génératrices et les cofibrations triviales génératrices de $sEns^J$ sont données par les morphismes de $sEns^J$ égaux respectivement à une cofibration génératrice ou à une cofibration triviale génératrice de $sEns$ à un niveau j et au morphisme $\emptyset \to \emptyset$ sur les autres niveaux. Or, si $Z \in sEns^J \subset sPr(\mathcal{C}_0)$ est concentré en un niveau j, son image par le foncteur

$$sK := sEns^J \to s\mathcal{C}$$

induit par le foncteur K définit en 1.4.4, est l'image de Z_j par le foncteur

$$sK_0 : sEns \to s\mathcal{C}$$
$$X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \to sK_0(X) = (\textstyle\coprod_{X_n} k)_{n\in\mathbb{N}}$$

Et ce foncteur préserve les cofibrants (il est de Quillen à gauche). En particulier, si Z, Z' sont deux objets concentré en des degrés respectifs j et j', leur produit est non nul si et seulement si $j = j'$ et dans ce cas

$$sK(Z \times Z') \simeq sK_0(Z_j \times Z'_j) \simeq sK_0(Z_j) \otimes sK_0(Z'_j) \simeq sK(Z) \otimes sK(Z')$$

On en déduit donc que sK commute au $\Box$ de morphismes concentrés au même niveau. Les $\Box$ qui nous intéresse sont précisément concentrés en un niveau fixe j. En effet, $sEns^J$ est une catégorie monoïdale. Prenons alors $f : X \to Y$ et $g : Z \to T$ sont des cofibrations génératrices dans $sEns^J$, leur $\Box$ est le morphisme $\emptyset \to \emptyset$ si elles sont concentrées en deux niveau distinct, et est une cofibration sinon. De plus cette cofibration est triviale si f ou g est triviale. Le foncteur sK commutant avec les cofibration, les cofibrations triviales, les produits tensoriel concentrés au même niveau et les $\Box$ concentré au même niveau, il advient que $sK(f)\Box sK(g)$ est une cofibration dans $s\mathcal{C}$ et qu'elle est triviale si f ou f est triviale. Comme les cofibrations et cofibrations triviales génératrices de $s\mathcal{C}$ sont exactement les images des cofibrations et cofibrations triviales génératrices de $sEns^J$, cela termine la preuve.

Comme l'unité 1 est cofibrante, le second point de la définition de catégorie de modèles monoïdale est clairement vérifié.

♦

Proposition 3.1.9. *i. La catégorie de modèles simpliciale $sEns^J$ est compactement engendrée.*

ii. Toute catégorie d'algèbres simpliciales sur une théorie simpliciale est compactement engendrée.

Preuve
Les catégories d'algèbres simpliciales sont cellulaires. Les colimites filtrantes y sont exactes. Elles sont engendrées par cofibration. Les domaines et codomaines des cofibrations et cofibrations triviales génératrices sont cofibrants, comme remarqué précédemment. De plus, ils sont images par l'adjoint à gauche, qui préserve les objets compacts ou petits, d'une sphère de $sEns$ de dimension n concentré en un degrés j ou de la frontière d'une telle sphère, donc sont compacts et petits.

♦

Lemme 3.1.10. *Soit $A \in sComm(C)$. Soit $(u^j)_{j\in J}$ la famille des images par $A\otimes - \circ sK$ dans $sA-mod$ (resp $sA-alg$) des éléments $(*_j)_{j\in J}$ de $sEns^J$ définis par $*$ au niveau j et $\emptyset$ sur les autres niveaux. Tout but d'une cofibration génératrice de $sA-mod$ (resp $sA-alg$) est faiblement équivalent à un objet de la forme u^j. toute source d'une cofibration génératrice est faiblement équivalente, pour un j fixé, à un objet obtenu à partir de l'objet initial $\emptyset$ et de u^j en un nombre fini de pushouts homotopiques.*

Preuve

Les cofibrations génératrices de $sA-mod$ sont les images des cofibrations génératrices de $sEns^J$ par $A\otimes - \circ sK$. Les cofibrations génératrices de $sEns$ sont les morphismes de la forme $\delta\Delta^p \to \Delta^p$. Les cofibrations génératrices de $sEns^J$ pour la structure de modèles projective sont les morphismes de $sEns^J$ égaux à une cofibration génératrices de $sEns$ pour un niveau j et à l'unique morphisme $\emptyset \to \emptyset$ sur les autres niveaux. Leur but est contractile, il est faiblement équivalent à $*_j$. Le foncteur sK préservant les équivalences faibles entre cofibrants, l'image de leur but est donc faiblement équivalent à u^j pour un j fixé.
Pour les sources, considérons la relation

$$\delta\Delta^{p+1} \backsimeq \Delta^{p+1} \coprod^h_{\delta\Delta^p} \Delta^{p+1} \backsimeq * \coprod^h_{\delta\Delta^p} * \text{ avec } \delta\Delta^0 = \emptyset$$

les sources des cofibrations génératrices de $sEns^J$ pour la structure de modèles projective sont les objets de la forme $(\delta\Delta^{p,j})_{p\in N,\, j\in V}$ définis au niveau $i \neq j$ by $\emptyset$ et au niveau j par $\delta\Delta^p$ et ils vérifient

$$(\delta\Delta^{p,j}) \backsimeq *_j \coprod^h_{(\delta\Delta^{p-1,j})} *_j$$

Clairement $\delta\Delta^{0,j} = \emptyset$ et $\delta\Delta^{1,j} = *_j$. Soit $u^{p,j}$ l'image de $\delta\Delta^{p,j}$. Pour tout j, $u^{p,j}$ s'obtient à partir de u^j en un nombre fini de pushouts.

♦

Corollaire 3.1.11. *de 3.1.9, 3.1.10 et 1.9.2.*

i. Les catégories de modèles simpliciales $s\mathcal{C}$, $sA-mod$ ($A \in sComm(\mathcal{C})$), $sComm(\mathcal{C})$ et $sA-alg$ ($A \in sComm(\mathcal{C})$) sont compactement engendrées.

ii. Les objets homotopiquement de présentation finie dans $sA-mod$ ($respsA-alg$) sont exactement les objets faiblement équivalent à des rétracts d'objets de $I-Cell$ strictement finis.

iii. La sous catégorie pleine de $Ho(sA-mod)$ (resp $Ho(sA-alg)$) $Ho(sA-mod)_c$ (resp $Ho(sA-alg)_c$) des objets homotopiquement de présentation finie est la plus petite sous catégorie pleine de $Ho(sA-mod)$ (resp $Ho(sA-alg)$) (pour l'inclusion) contenant la famille $(u^{1,j})_{j\in V}$ (resp $(u^{1,j}_A)_{j\in V}$), $\emptyset$ et stable par rétract et pushout homotopique.

Preuve de *iii*

Soit $\mathcal{D}$ la plus petite sous catégorie pleine de $Ho(s\mathcal{C})$ contenant $(u^j)_{j\in V}$ (resp $(u^j_A)_{j\in V}$), l'objet initial $\emptyset$ et stable par rétract et pushout homotopique. Clairement, par 2, comme les morphismes $(\emptyset \to u^j)_{j\in V}$ sont des cofibrations génératrices de $s\mathcal{C}$, soit sont homotopiquement de présentation finie (cf [HAGII], p33), $Ho(s\mathcal{C})_c$ contient la famille $(u^j)_{j\in V}$, $\emptyset$. Comme cette catégorie est stable par rétract et pushout homotopique, on a $D \subset Ho(s\mathcal{C})_c$.
Réciproquement, soit $X \in Ho(s\mathcal{C})_c$, par 2, X est isomorphe à un rétract d'un objet de $I-cell$ strictement fini. Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}$ et une famille finie $(X_i)_{i\in[0,n]}$ telle que:

$$\emptyset = X_0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_n = X$$

et $\forall j \in \{0,..,n-1\}$, $\exists k \to l$, une cofibration génératrice telle que:

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r] & X_{j+1} \\ k \arrow[u] \arrow[r] & l \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est un pushout. Finalement, comme les sources et les buts des cofibrations génératrices sont dans $\mathcal{D}$, X est dans $\mathcal{D}$.

♦

3.1.2 Catégories Homotopiques de Modules et d'Algèbres

Proposition 3.1.12. *Soient A dans $sComm(\mathcal{C})$ et $B \in sA-alg$, cofibrant dans $sA-mod$.*

- *Le foncteur d'oubli de $sB-mod$ dans $sA-mod$ préserve les cofibrations.*
- *Le foncteur d'oubli de $sA-alg$ dans $sA-mod$ préserve les cofibrations dont la source est cofibrante dans $sA-mod$. En particulier, il préserve les objets cofibrants.*

Preuve

Dans chaque cas, on commence par réaliser la preuve pour les cofibrations génératrices. On montre ensuite à l'aide de l'argument du petit objet que cela est alors vrai pour toute cofibration.

- On commence par se fixer une cofibration génératrice dans $sB-mod$. Les cofibrations génératrices de $sB-mod$ étant exactement les images des cofibrations génératrices de $sEns^J$, il suffit donc de fixer $L \to M$ une cofibration génératrice dans $sEns^J$. Notons K_A et K_B les foncteurs adjoints à gauche qui vont respectivement de $sA-mod$ et $sB-mod$ dans $sEns^J$. On montre alors que la cofibration génératrice $K_B(L) \to K_B(M)$ de $sB-mod$ est une cofibration dans $sA-mod$. Pour cela, on applique l'axiome de stabilité par $\Box$ de $sA-mod$. Il vient que le morphisme
$$(\emptyset \to B)\Box(K_A(L) \to K_A(M))$$
est une cofibration dans $sA-mod$. Or ce morphisme s'écrit
$$K_B(L) \backsimeq B \otimes_A K_A(L) \to B \otimes_A K_A(M) \backsimeq K_B(M)$$
et est donc exactement note cofibration génératrice. Ceci étant vrai pour toute cofibration génératrice de $sB-mod$, on en déduit que celles-ci sont des cofibrations dans $sA-mod$. On généralise à toutes les cofibrations de $sB-mod$ par l'argument du petit objet.

♦

- Comme pour le point précédent, il faut commencer par fixer $N \to M$ une cofibration génératrice dans $sEns^J$. Soit L^s le foncteur "Monoïde libre associé" de la catégorie monoïdale $sEns^J$. On rappelle que le foncteur monoïde libre associé de $sA-mod$ dans $sA-alg$ est noté sL_A. On montre que la cofibration génératrice $sL_A(N) \to sL_A(M)$ de $sA-alg$ est une cofibration dans $sA-mod$. Pour cela on constate que le diagramme
$$\begin{tikzcd} sEns^J \arrow[r, "K_A"] \arrow[d, "L^s"'] & sA-mod \arrow[d, "sL_A"] \\ sComm(Ens^J) \arrow[r, "K_A"'] & sA-alg \end{tikzcd}$$
est commutatif pour les objets concentrés en un degrés fixe $j \in J$. Cela vient du fait que nous avons remarqué en 3.1.8 que le foncteur sK_A vérifie $sK_A(Z \times Z') \backsimeq sK_A(Z) \otimes_A sK_A(Z')$ pour Z, Z' concentrés en un même degré. Donc, la cofibration génératrice de $sA-alg$ correspondant au morphisme $N \to M \in sEns^J$ revient à isomorphisme prés à $sK_A(L^s(N)) \to sK_A(L^s(M))$. Le morphisme $L^s(N) \to L^s(M)$ est clairement injectif car les morphismes $N^{\otimes n}/S_n \to M^{\otimes n}/S_n$ sont injectifs et il s'agit donc d'une cofibration de $sEns^J$. Son image est par le foncteur de Quillen à gauche sK_A est donc une cofibration de $sA-mod$. Finalement, la cofibration génératrice $sL_A \circ sK_A(N) \to sL_A \circ sK_A(M)$ de $sA-alg$ est une cofibration dans $sA-mod$. On en conclut donc que toute cofibration génératrice dans $sA-alg$ est une cofibration dans $sA-mod$.

  Pour passer à toutes les cofibrations par l'arguments du petit objet, il faut encore montrer que les opérations par lesquelles on passe des cofibrations génératrices aux cofibrations dans $sA-alg$ préservent les cofibrations de $sA-mod$ i.e. qu'un pushout homotopique dans $A-alg$ d'une cofibration de $A-mod$, par un objet cofibrant dans $A-mod$ est une cofibration de $A-mod$. Or cela est vrai par l'axiome de stabilité par $\Box$, i.e. si B est une A-algèbre cofibrante dans $A-mod$ et $u : C \to D \in A-alg$ est cofibrant dans $A-mod$, Notons $v : \emptyset \to B$. Alors, dans la catégorie monoïdale $C-mod$, d'après ce qui précède, v et u sont des cofibrations et on a $v\Box u := B \to B \otimes_C D$ qui est une cofibration. On applique le foncteur d'oubli de $C-mod$ dans $A-mod$ et $v\Box u$ est une cofibration dans $A-mod$.

  Par l'argument du petit objet toute cofibration de source cofibrante dans $sA-alg$ est une cofibration dans $sA-mod$, en particulier comme A est cofibrant dans $sA-mod$, tout objet cofibrant dans $sA-alg$ est aussi cofibrant dans $sA-mod$.

♦

Lemme 3.1.13. *Soit $f : A \to B \in sComm(\mathcal{C})$ une cofibration triviale entre objets cofibrants. On a une équivalence de catégorie*

$$Ho(sA - mod) \backsimeq Ho(sB - mod)$$

Preuve
Il faut montrer que pour X cofibrant dans $sA - mod$ et Y fibrant dans $sB - mod$, $\varphi_A(f) : X \otimes_A B \to Y$ est une équivalence faible dans $sB - mod$ si et seulement si $f : X \to Y$ est une équivalence faible dans $sA - mod$. D'après le lemme précédent, $A \to B$ est une cofibration triviale dans $sA - mod$. Donc, comme X est cofibrant, par l'axiome de stabilité par $\square$, le morphisme $g := X \to B \otimes_A X$ est une équivalence faible dans $sA - mod$. Par construction de l'adjonction φ_A, Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & X \otimes_A B \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\varphi_A(f)"] & Y \otimes_A B \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Donc $f = g \circ \varphi_A(f)$. Finalement, $\varphi_A(f)$ est une équivalence faible dans $sA - mod$ si et seulement si c'est une équivalence faible dans $sB - mod$ et l'axiome du *deux sur trois* termine la preuve.

♦

Proposition 3.1.14. *Soit $f : A \to B \in sComm(\mathcal{C})$ une équivalence faible entre objets cofibrants. On a une équivalence*

$$Ho(sA - mod) \backsimeq Ho(sB - mod)$$

Soit r_c le foncteur remplacement fibrant de $sComm(\mathcal{C})$. D'après le lemme précédent, les catégories homotopiques de modules sur A et r_cA (resp B et r_cB) sont équivalentes. Donc A et B peuvent être choisis fibrant sans perte de généralité et f est alors une équivalence d'homotopie i.e. il existe g tel que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont homotopes à l'identité. Il existe un monoïde commutatif simplicial B_1 et des diagrammes commutatifs dans $sComm(\mathcal{C})$:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, "Id"] & \\ B_1 \arrow[r, "h"] & B \\ B \arrow[u, "i_1"] \arrow[ur, "f \circ g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Ho(B - mod) & \\ Ho(B_1 - mod) \arrow[u, "i_0^*"] \arrow[d, "i_1^*"'] & Ho(B - mod) \arrow[l, "h^*"'] \arrow[ul, "Id"'] \arrow[dl, "(f \circ g)^*"] \\ Ho(B - mod) & \end{tikzcd}$$

Où i_0 et i_1 sont des cofibrations et ont le même inverse à droite p i.e. $p \circ i_1 = p \circ i_0 = Id_B$. Le morphisme h est une fibration triviale donc i_0 est une équivalence faible. D'après le lemme précédent, i_0^* est une équivalence de catégories. Par conséquent il en est de même pour p^*. Comme i_1^* et i_0^* sont tout deux inverses de p^*, ils sont isomorphes et i_1^* est aussi une équivalence. Finalement, h^* est une équivalence, ce qui implique que $(f \circ g)^*$ en est elle même une. Une méthode analogue prouve que $(g \circ f)^*$ est aussi une équivalence.

♦

3.1.3 Propriétés de Finitude

Definition 3.1.15. Soient q_c le remplacement cofibrant de $sComm(\mathcal{C})$ et $f : A \to B$ un morphisme de $sComm(\mathcal{C})$.

- ▷ Le morphisme f est homotopiquement fini (noté hf) si et seulement si B est homotopiquement de présentation finie dans $sq_cA - mod$.
- ▷ Le morphisme f est homotopiquement de présentation finie (noté hpf) si et seulement si B est homotopiquement de présentation finie $sq_cA - alg$.

Remarque 3.1.16. Le morphisme $A \to B$ est hf (resp hpf) si et seulement si le morphisme $A \to q_cB$ est hf (resp hpf). Le morphisme $q_cB \to B$ est hf.

Lemme 3.1.17. *Les morphismes hf (resp hpf) sont stables par composition.*

Preuve
Les preuves pour les morphismes hf et hfp sont analogues, nous le prouvons donc pour les morphismes hf. Soit $A \to B \to D$ la composition de deux morphismes hf. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} q_cA \arrow[r] \arrow[d] & q_cB \arrow[r] \arrow[d] & q_cD \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

Et des foncteurs d'oubli $F_1 : sq_cD - mod \to sq_cB - mod$ et $F_2 : sq_cB - mod \to sq_cA - mod$. L'image $F_1(q_cD)$ de q_cD est homotopiquement de présentation finie dans $sq_cB - mod$ donc faiblement équivalent à un rétract d'une colimite homotopique finie de q_cB dans $sq_cB - mod$. Le foncteur d'oubli F_2 préserve les rétracts , les équivalences faible, les colimites finies, les objets cofibrants et les cofibrations de source cofibrante. Par conséquent, il préserve aussi les colimites homotopiques finies et envoi finalement q_cD sur un rétract d'une colimite homotopique finie de q_cB dans $sq_cA - mod$. Comme q_cB est homotopiquement de présentation finie $sq_cA - mod$, et comme les objets homotopiquement de présentation finie sont stables par rétracts, équivalences et colimites homotopiques finies, D est envoyé par $F_2 \circ F_1$ dans $sq_cA - mod_c$. Plus précisément $A \to D$ est hf.

♦

Lemme 3.1.18. *Les morphismes hf (resp hpf) sont stable par pushout homotopique de monoïdes simpliciaux.*

Preuve

Les preuves pour les morphismes hf et hfp sont analogues, nous le prouvons donc pour les morphismes hf. Soient $A \to B$ et $A \to D$ des morphismes de $sComm(\mathcal{C})$ dont le premier est hf. Soit q_{cA} le foncteur remplacement cofibrant de $q_cA - alg$. q_{cA} est faiblement équivalent à q_c et l' objet $q_{cA}B$ est homotopiquement de présentation finie dans $sq_cA - mod$. Montrons que $B \otimes^h_A D \simeq q_{cA}B \otimes_{q_cA} q_cC$ (dans $Ho(q_cA - mod)$, lemme de Reedy) est homotopiquement de présentation finie dans $q_cD - mod$. Le foncteur d'oubli $sq_cD - mod \to sq_cA - mod$ préserve les colimites filtrantes et les équivalences faibles donc préserve les colimites homotopiques filtrantes. Par conséquent le foncteur dérivé $- \otimes_{q_cA} q_cC$ préserve les objets homotopiquement de présentation finie. Finalement $B \otimes^h_A C$ est homotopiquement de présentation finie dans $Ho(q_cD)$.

♦

Remarque 3.1.19. En particulier, un morphisme $A \to B$ dans $sComm(\mathcal{C})$ est fini si et seulement si $sq_cA \to sq_cB$ est fini.

3.2 Cohomologie des Préfaisceaux Simpliciaux

Cette théorie nous permet de donner des exemples concrets de schémas relatifs lisses. La théorie de l'obstruction qui en découle permet en effet d'exprimer de manière plus concrète certaines propriétés de finitude homotopique inhérentes à la définition que nous donnerons de lissité relative.

Nos principales références sur ce sujet sont [GJ] et [T1]. La théorie de [T1] traite le cas pointé connexe. Nous allons nous intéresser à un cas non connexe et expliquerons donc comment se ramener à des préfaisceaux connexes. Dans un premier temps, nous rappelons les bases de la théorie puis nous traitons successivement le cas pointé connexe et le cas général.

3.2.1 Définitions

Dans toute cette partie, $\mathcal{D}$ est une catégorie. On considère la catégorie $sPr(\mathcal{D})$ des préfaisceaux simpliciaux sur $\mathcal{D}$. On regarde $\mathcal{D}$ comme étant munie de la topologie de Grothendieck triviale.

On rappelle que pour un préfaisceau simplicial, il existe une tour de Postnikov de ces n-tronqués $(\tau_{\leq n}F))_{n\in\mathbb{N}}$. Cette tour est définie objet par objet dans [GJ]$VI.3$. Cette tour défini en particulier un diagramme

$$\cdots \xrightarrow{p_{n+1}} \tau_{\leq n}F \xrightarrow{p_n} \tau_{\leq n-1}F \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \xrightarrow{p_1} \tau_{\leq 0}F$$

Definition 3.2.1. Un préfaisceau simplicial sur $\mathcal{D}$ pointé est la donnée d'un préfaisceau $F \in sPr(\mathcal{D})$ et d'un morphisme $s : * \to F$.

Definition 3.2.2. La catégorie $(\mathcal{D}/F)_0$ est la catégorie dont les objets sont les couples (X, f) où $f : X \to F$ et les morphismes de (X, f) dans (Y, g) sont les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Notons que l'on donnera dans la suite une autre définition de la catégorie des objets de $\mathcal{D}$ au dessus de F qui sera mieux adaptée a la théorie homotopique. Cela explique la notation, avec un 0 en indice. Cela dit on peut se contenter de cette définition simple pour définir le π_n, comme suit.

Definition 3.2.3. Soit F un préfaisceau simplicial

▷ On définit un foncteur $\pi_0(F) : \mathcal{D} \to Ens$ par

$$\pi_0(F) := X \to \pi_0(F(X))$$

▷ Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit un foncteur $\pi_n(F) : (\mathcal{D}/F)_0 \to Gp$ par

$$\pi_n(F) := (u : X \to F) \to \pi_n(F(X), u)$$

▷ Pour tout entier naturel $n \geq 1$ et tout pointage $s : * \to F$, on définit un foncteur $\pi_n(F) : \mathcal{D} \to Gp$ par

$$\pi_n(F, s) := (X) \to \pi_n(F(X), s^*(i))$$

Où i est l'unique morphisme de X dans l'objet final $*$.

Ces deux définitions sont parfaitement compatibles, la première étant en fait une généralisation de la seconde au cas non pointé. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que cela correspond à la définition des groupes d'homotopie donnée dans [T1] lorsque la topologie de Grothendieck sur $\mathcal{D}$ est triviale.

Definition 3.2.4. Un préfaisceau simplicial pointé et connexe sur $\mathcal{D}$ est la donnée d'un préfaisceau $F \in sPr(\mathcal{D})$ et d'un morphisme $s : * \to F$ qui induit un isomorphisme $* \to \pi_0(F)$.

La définition suivante est essentielle dans la théorie cohomologique

Definition 3.2.5. Un système local M sur un préfaisceau simplicial pointé et connexe F est la donnée d'un préfaisceau en groupes abéliens M et d'une action de $\pi_1(F, s)$ sur M. Un morphisme de système locaux est un morphisme de préfaisceaux en groupes compatible avec l'action de $\pi_1(F, s)$.
La catégorie abélienne des système locaux sur F sera notée $SysLoc(F)$, suivant les notations de [T1].

Dans la suite, le rôle de M sera joué par les préfaisceaux $\pi_n(F, s)$, pour $n \geq 2$.

On reprend maintenant les définitions de classifiant que le lecteur pourra aussi retrouver dans [T1]

Definition 3.2.6. Soit G un ensemble simplicial muni d'une structure de groupe.

▷ On définit un ensemble bisimplicial $E(G, 1)$ par

$$E(G, 1)_{p,q} := G_p^q$$

▷ On définit un ensemble bisimplicial $sK(G, 1)$ par

$$sK(G, 1)_{p,q} := G_p^q / G_p$$

▷ On définit le classifiant de G, $K(G, 1)$ comme étant le sous-ensemble diagonal de $sK(G, 1)$, i.e.

$$K(G, 1)_n := G_n^n / G_n$$

Remarque 3.2.7. - L'ensemble simplicial $K(G, 1)$ est naturellement pointé par l'image de l'identité du sous-ensemble simplicial diagonal de $E(G, 1)$. Il existe des isomorphismes naturels $\pi_n(K(G, 1), *) \backsimeq \pi_{n-1}(G, e_G)$. Si le groupe simplicial G est abélien alors $K(G, 1)$ est un groupe simplicial abélien.

- Cette construction est fonctorielle en G et s'étend donc en une construction analogue pour les préfaisceaux en groupes abéliens simpliciaux, que nous noterons de la même manière.

Definition 3.2.8. Pour tout entier naturel $m \geq 2$, on définit un endofoncteur $K(-, m)$ des groupes abéliens simpliciaux (resp des préfaisceaux en groupes abéliens simpliciaux, cf 3.2.7 second point) par

$$K(-, m) := K(-, 1)^{\circ n}$$

On peut maintenant donner la proposition suivante, qui fait le lien entre F et ses n-tronqués. Cette proposition reprend une proposition de [T1] dans notre cas particulier, i.e. avec une topologie de Grothendieck triviale sur $\mathcal{D}$.

Proposition 3.2.9. *Soit* (F, s) *un préfaisceau simplicial pointé et connexe. Le morphisme naturel*

$$F \to Holim_{n \in \mathbb{N}} \tau_{\leq n} F$$

est une équivalence faible.

L'hypothèse qui apparaît pour cette proposition dans [T1] est toujours vérifiée lorsque la topologie de Grothendieck est triviale car elle consiste en l'annulation des groupes d'homotopies (tels que définis précédemment) pour des remplacement fibrant de $K(\pi_n(F,s), n+1)$ pour la structure de modèles locale. Or les équivalences faible pour cette structure sont les morphismes qui induisent des isomorphismes sur les faisceaux associée aux π_n. Ici, le foncteur faisceaux associé est l'identité, et les $K(\pi_n(F,s), n+1)$ vérifient clairement les propriétés d'annulation demandées.

Avant de donner la définition de la cohomologie d'un préfaisceau simplicial pointé et connexe, il nous faut encore introduire un objet.

Definition 3.2.10. Soit G un préfaisceau en groupe opérant sur un préfaisceau en groupes abéliens M. Notons ρ le morphisme de groupe $\rho : G \to \underline{Aut}_{Pr(\mathcal{D})}(M)$. Alors G opère de façon naturelle sur $K(M, n-1)$, $n > 0$.

- ▷ Le groupe simplicial $G \times_\rho K(M, m-1)$ est le produit semi direct de G et $K(M, n-1)$.
- ▷ On définit le groupe simplicial $K(G, M, n)$ par

$$K(G, M, n) := K(G \times_\rho K(M, m-1), 1)$$

Remarque 3.2.11. On a en particulier un morphisme naturel $p : K(G, M, n) \to K(G, 1)$. Plus de détails sur cet objet se trouvent dans [T1]. Dans l'exemple où nous allons appliquer cette théorie, G sera trivial, on aura par conséquent $K(M, n) \backsimeq K(G, M, n)$.

Nous allons maintenant Donner la définition et les propriétés de la cohomologie des préfaisceaux simpliciaux, d'abord dans le cas connexe.

3.2.2 Théorie Cohomologique Pointée Connexe

Définitions

Soit F un préfaisceau simplicial pointé et connexe, M un système local sur F et $\rho : \pi_1(F,s) \to \underline{Aut}_{Pr(\mathcal{D})}(M)$. On considère le morphisme naturel $i : F \to \tau_{\leq 1} F$ et le morphisme p.

Definition 3.2.12. Le n-ème groupe de cohomologie de (F,s) à coefficient dans M est donné par

$$H^n(F, M) := \pi_0 Map_{sPr(\mathcal{D})/\tau_{\leq 1} F}[(F, i), (K(G, M, n), p)]$$

Nous allons par la suite généraliser le théorème suivant de [T1] au cas non connexe. Dans le cas $(F,s) := (K(G,1), *)$ pour un préfaisceau en groupe G, le théorème affirme que les $H^n(F, M)$ sont en fait des foncteurs dérivés.

Theoreme 3.2.13. *Soit G un préfaisceau en groupes sur $\mathcal{D}$ et $(F,s) := (K(G,1), *)$. Alors pour tout entier n, le foncteur $H^n(F, M) : SysLoc(F) \to Ab$ est isomorphe au n-ème foncteur dérivé du foncteur $H^0(F, -)$.*

Corollaire 3.2.14. *Soit $X \in \mathcal{D}$. On considère le site $\mathcal{D}/X$ muni de la topologie triviale. Alors le foncteur $H^n(X, -)$ est isomorphe au n-ème foncteur dérivé du foncteur des sections globales $\Gamma : Ab(\mathcal{D}/X) \to Ab$. La cohomologie des préfaisceaux simpliciaux coïncide donc sur les objets représentables avec la cohomologie définie par foncteur dérivés.*

Théorie de l'Obstruction

On va expliquer ici la théorie de l'obstruction qui découle de cette cohomologie dans le cas connexe pointé. Soit (F,s) un préfaisceau simplicial connexe pointé sur une catégorie $\mathcal{D}$. On a un diagramme homotopiquement cartésien.

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leq n} F \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\leq 1} F \arrow[d] \\
\tau_{\leq n-1} F \arrow[r] & K(\pi_1(F,s), \pi_n(F,s), n+1)
\end{tikzcd}$$

Et par conséquent un morphisme d'un préfaisceau simplicial H dans $\tau_{\leq n-1} F$ se relève à $\tau_{\leq n} F$ si et seulement si il envoi de manière commutative sur le diagramme du produit fibré homotopique ci-dessus. Cela revient à demander que le morphisme se factorise par $\tau_{\leq 1} F$, qui est l'objet nul de la catégorie des préfaisceaux pointés au dessus de lui-même. Le morphisme se relève donc si il s'annule dans le groupe

$$\pi_0 Map_{sPr(\mathcal{D})/\tau_{\leq 1} F}(H, K(\pi_1(F,s), \pi_n(F,s), n+1))$$

Où le morphisme $K(\pi_1(F,s), \pi_n(F,s), n+1) \to \tau_{\leq 1} F$ est donné par le morphisme naturel cité en 3.2.11 et le fait que $K(\pi_1(F,s), 1) \backsimeq \tau_{\leq 1} F$

3.2.3 Théorie Cohomologique Générale

Définitions

Prenons maintenant un préfaisceau F. On veut se ramener à un cas que l'on sait traiter. Pour cela on remarque que le 1-tronqué de F est un ensemble simplicial équivalent au nerf du groupoïde fondamental $G := \pi_1(F)$, noté NG. On considère alors la construction de Grothendieck associé à G (cf [SGAI] exposé VI,9). Il s'agit d'une catégorie cofibrée sur $\mathcal{D}$, que l'on peut voir aussi comme une catégorie fibrée car G est un préfaisceau en groupoïdes. Nous la noterons $\mathcal{D}/G$.

Definition 3.2.15. La catégorie $\mathcal{D}/G$ est décrite comme suit

i. L'ensemble de ses objets est l'ensemble des couples (X, x) où $x : X \to NG$ (soit $x \in G(X)$).

ii. Pour deux objets $(X, x), (Y, y)$, l'ensemble des morphismes de (X, x) dans (Y, y) est l'ensemble des couples (f, u) où f est un morphisme de $sPr(\mathcal{D})$, $f : X \to Y$ et u un isomorphisme dans $G(X) := \pi_1(F(X))$, $u : y \circ f \simeq x$.

Remarquons que

On a un plongement naturel de $\mathcal{D}/G$ dans $Ho(sPr(\mathcal{D})/NG)$, en particulier

$$Hom_{\mathcal{D}/G}((X, x), (Y, y)) \simeq \pi_0 Map_{sPr(\mathcal{D})/NG}((X, x), (Y, y))$$

On commence par considérer le foncteur suivant, dont on veut construire une extension de Kan

$$\widetilde{(-)} : \mathcal{D}/G \to sPr(\mathcal{D})/NG$$

La catégorie de départ étant une sous catégorie de la catégorie homotopique associée à la catégorie d'arrivée, il nous faut pour construire ce foncteur, donner un modèle fibrant dans $sPr(\mathcal{D})/NG$ d'un objet $X \in \mathcal{D}/G$.

Definition 3.2.16. Soit $(X, x) \in \mathcal{D}/G$, on lui associe le préfaisceau en groupoïde $G_{X,x}$ donné par

$$G_{X,x} := \qquad \begin{array}{l} \mathcal{D} \to Gpd \\ S \to G_{X,x}(S) \end{array}$$

L'ensemble des objets de $G_{X,x}(S)$ est donné par l'ensemble des triplets (u, y, h) où $u : S \to X$, $y \in G(S)$ et h est un morphisme de $G(S)$ tel que $h : x \circ u \simeq y$.

Pour deux triplets $(u, y, h), (u', y', h')$, l'ensemble des morphismes $Hom_{G_{X,x}(S)}((u, y, h), (u', y', h'))$ est donné par l'ensemble des endomorphismes k de S tels que

$$k^*(h : x \circ u \to y) = h' : x' \circ u' \to y'$$

Definition 3.2.17. Soit $(X, x) \in \mathcal{D}/G$, on note $(\check{X}, \check{x}) := NG_{X,x}$

Il s'agit presque là du foncteur $\widetilde{(-)}$ que nous cherchions. On a en particulier, pour $(X, x) \in \mathcal{D}/G$ un diagramme commutatif dans les préfaisceaux en groupoïde sur $\mathcal{D}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "x"] \arrow[dr, "j"'] & & G \\ & G_{X,x} \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

Où l'on note toujours $(X, x) \in Pr_{Gpd}(\mathcal{D})$. Pour tout $S \in \mathcal{D}$ le morphisme j est donné par

$$j(S) : Hom_{\mathcal{D}}(S, X) \to G_{X,x}(S)$$
$$(u : S \to X) \to (u, x \circ u, Id)$$

En particulier, j est une équivalence de groupoïdes par niveau. De plus, le morphisme l est donné pour tout S par la projection sur $G(S)$, $(u, y, h) \to y$. On a donc clairement $l \circ j = x$. On obtient donc, en appliquant le foncteur Nerf, un diagramme commutatif dans $sPr(\mathcal{D})$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "x"] \arrow[dr, "Nj"'] & & NG \\ & \check{X} \arrow[ur, "\check{x}"'] & \end{tikzcd}$$

Le morphisme Nj définit une équivalence faible de X dans $\breve{X}$. Le morphisme $\breve{x}$ est donné par Nl.

Lemme 3.2.18. *L'application des objets de $\mathcal{D}/G$ dans les objets de $sPr(\mathcal{D})/NG$*

$$\breve{(-)} : (X, x) \to (\breve{X}, \breve{x})$$

définit un foncteur

Preuve
On le calcule donc sur les morphismes. Soit $u : (X, x) \to (Y, y)$ un morphisme dans $\mathcal{D}/G$, on a en particulier $y \circ u \simeq x$ dans $G(X)$. On obtient donc, en prenant l'image par j, pour tout S dans $sPr(\mathcal{D})$

$$j(u)(S) : G_{X,x}(S) \to G_{Y,y}(S)$$
$$(v, z) \to (u \circ v, z)$$

On remarque alors que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \breve{X} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\breve{x}"'] & & \breve{Y} \arrow[dl, "\breve{y}"] \\ & NG & \end{tikzcd}$$

Commute strictement dans $sPr(\mathcal{D})$.

♦

On remarque alors que si $\breve{X}$ est un modèle fibrant pour X, on a encore besoin de prendre un remplacement cofibrant (dans $sPr(\mathcal{D})/NG$) pour obtenir une foncteur $\widetilde{(-)}$ de Quillen.

Definition 3.2.19. On définit le foncteur

$$\widetilde{(-)} : \mathcal{D}/G \to sPr(\mathcal{D})/NG$$
$$(X, x) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}) = Q(\breve{X}, \breve{x})$$

Definition 3.2.20. Le foncteur $\widetilde{(-)}$ induit par extension de Kan un foncteur toujours noté

$$\widetilde{(-)} : sPr(\mathcal{D}/G) \to sPr(\mathcal{D})/NG$$

Remarque 3.2.21. La catégorie $sPr(\mathcal{D}/G)$ n'est autre que la catégorie des objets simpliciaux dans $Pr(\mathcal{D}/G)$. Or un préfaisceau H sur $\mathcal{D}/G$ n'est autre qu'un préfaisceau interne sur G. Plus précisément, pour tout $X \in \mathcal{D}$, $H(X, -)$ est un foncteur de $G(X)$ dans *Ens* muni d'une action naturelle de $G(X)$ et d'une projection naturelle vers le foncteur ensemble sous-jacent qui a $G(X)$ associe l'ensemble de ses objets. On a en particulier un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d] & G_1 \times_{G_0} H \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] \\ G_0 & G_1 \arrow[l, "b"] \arrow[r, "s"] & G_0 \end{tikzcd}$$

Où s et b sont les flèches sources et but, G_0 est le préfaisceau sous-jacent à G et G_1 est le préfaisceau des flèches de G qui à tout X associe l'ensemble des morphismes du groupoïde $G(X)$.

On a un cas particulier plus intuitif, celui où G est un préfaisceau en groupe i.e. où $G(X)$ n'a qu'un seul objet pour tout X. On peut alors voir H comme un préfaisceau sur D muni d'une action de G.

En toute généralité, La catégorie $sPr(\mathcal{D}/G)$ est équivalente à la catégorie $sPr(\mathcal{D})^{NG}$ des NG-diagrammes, où NG est le préfaisceau simplicial nerf de G, que l'on retrouve par exemple dans [J].

Définissons maintenant son adjoint

Definition 3.2.22. On définit le foncteur

$$(-)_1 : sPr(\mathcal{D})/NG \to sPr(\mathcal{D}/G)$$
$$u : (H \to NG) \to H_1 := (x : X \to NG) \to \underline{Hom}^{\Delta}_{sPr(\mathcal{D})/NG}((\widetilde{X}, \widetilde{x}), (H, u))$$

où $\underline{Hom}^{\Delta}$ désigne le Hom enrichi sur les ensembles simpliciaux.

L'objet $(\widetilde{X},\widetilde{x})$ étant cofibrant, ce foncteur est de Quillen à droite. On va montrer que $(-)_1$ et $\widetilde{(-)}$ définissent une équivalence de Quillen.

Lemme 3.2.23. *Le foncteur $(-)_1$ est adjoint à droite du foncteur $\widetilde{(-)}$.*

Preuve
Soit $(X,x) \in \mathcal{D}/G$ et $G \in sPr(\mathcal{D})/NG$ alors on a

$$\underline{Hom}^{\Delta}_{sPr(\mathcal{D}/G)}((\widetilde{X},\widetilde{x}),G) = G_1(X,x) \simeq \underline{Hom}^{\Delta}_{sPr(\mathcal{D}/G)}((X,x),G_1)$$

De plus, si $H \in sPr(\mathcal{D}/G)$, on peut l'écrire $H \simeq Colim_I((X_i,x_i))$ et en particulier, $\widetilde{(-)}$ étant une extension de kan, $\widetilde{H} \simeq Colim_I(\widetilde{X},\widetilde{x})$ et on a

$$\underline{Hom}^{\Delta}_{sPr(\mathcal{D})/NG}(H,G_1) \simeq Lim_I G_1(X_i,x_i) \simeq Lim_I(\underline{Hom}^{\Delta}_{sPr(\mathcal{D}/G)}((\widetilde{X},\widetilde{x}),G)) \simeq \underline{Hom}^{\Delta}_{sPr(\mathcal{D}/G)}(\tilde{H},G)$$

♦

Le foncteur $(-)_1$ est de Quillen à droite. On va montrer que le foncteur dérivé $R(-)_1$ commute aux colimites homotopiques. On a

$$\begin{aligned} R(-)_1 : Ho(sPr(\mathcal{D})/NG) &\to Ho(sPr(\mathcal{D}/G)) \\ H &\to RH_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L\widetilde{(-)} : Ho(sPr(\mathcal{D}/G)) &\to Ho(sPr(\mathcal{D})/NG) \\ H &\to L\widetilde{H} \end{aligned}$$

les foncteurs dérivés.

Donnons maintenant la définition suivante

Definition 3.2.24. Soient $(H,h) \in sPr(\mathcal{D})/NG$ et $(X,x) \in \mathcal{D}/G$. Alors on définit (H_X,h_x) par le diagramme homotopiquement cartésien.

$$\begin{tikzcd} H_X \arrow[r] \arrow[d, "h_x"'] & H \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[r, "x"'] & NG \end{tikzcd}$$

On a alors les deux résultats suivants

Lemme 3.2.25. *Soient $H \simeq Hocolim(H_i) \in Ho(sPr(\mathcal{D})/NG)$ et $(X,x) \in \mathcal{D}/G$*

- ⋄ *On a $H_X \simeq Hocolim((H_i)_X)$ dans $Ho(sPr(\mathcal{D})/NG)$.*
- ⋄ *On a $RH_1(X) \simeq Map_{sPr(\mathcal{D})/X}((X,Id),(H_X,h_x))$*

Preuve
Ces propriétés sont vraies dans les ensembles simpliciaux. Elles se généralisent aux préfaisceaux simpliciaux par une démonstration identique à la preuve pour les ensembles simpliciaux.

♦

Corollaire 3.2.26. *Le foncteur $R(-)_1$ commute aux colimites homotopiques.*

Preuve
On considère $H \simeq Hocolim(H_i)$. Alors pour tout $X \in \mathcal{D}/G$

$$\begin{aligned} RH_1(X) &\simeq Map_{sPr(\mathcal{D})/NG}((X,Id),([Hocolim(H_i)]_X)) \\ &\simeq Map_{sPr(\mathcal{D})/NG}((X,Id),Hocolim[(H_i)_X])) \simeq Hocolim(R(H_i)_1(X)) \end{aligned}$$

♦

On peut maintenant démontrer la proposition qui nous intéresse. Remarquons que cette proposition est un cas particulier du théorème 20 de [J]. Il faut pour cela appliquer ce théorème à la catégorie $sPr(\mathcal{D})^{NG}$ des NG-diagrammes, où NG est le préfaisceau simplicial nerf de G, qui comme nous l'avons remarqué précédemment est équivalente à $sPr(\mathcal{D}/G)$.

Proposition 3.2.27. *Les foncteurs* $(-)_1$ *et* $\widetilde{(-)}$ *définissent une équivalence de Quillen.*

Le foncteur $(-)_1$ commute clairement aux équivalences faibles, en se référant à la suite exacte

$$H_1 \to H \to \tau_{\leq 1} H$$

Son adjoint est donc de Quillen à gauche et commute lui aussi aux colimites homotopiques. On peut le décrire plus précisément. Soit $(H, h) \in sPr(\mathcal{D}/G)$ alors H s'écrit comme une colimite homotopique d'objets représentables (X_i, x_i) dans $Ho(sPr(\mathcal{D}/G))$ et on a un isomorphisme dans $Ho(sPr(\mathcal{D}))$

$$\widetilde{H} \backsimeq Hocolim(\widetilde{X_i})$$

Comme $(-)_1$ commute aux équivalences faibles et aux colimites homotopiques, on a

$$(\widetilde{H})_1 \backsimeq Hocolim(\widetilde{X}_i)_1 \backsimeq Hocolim(X_i) \backsimeq H$$

Cela implique que si H est cofibrant dans $sPr(\mathcal{D}/G)$ et H' est fibrant dans $sPr(\mathcal{D})/NG$, comme $(\widetilde{H})_1 \backsimeq H$, on a un morphisme entre suites exactes

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{H} \arrow[r] \arrow[d] & NG \arrow[d, "Id"] \\
H'_1 \arrow[r] & H' \arrow[r] & NG
\end{tikzcd}$$

Où les deux morphismes verticaux sont images l'un de l'autre par l'adjonction. Il est alors clair que ces deux morphismes sont simultanément des équivalences faibles et cela prouve la proposition 3.2.27.

♦

On en arrive maintenant à la définition de cohomologie. En effet, F_1 est la fibre homotopique de $F \to \tau_{\leq 1} F \backsimeq NG$ et est donc simplement connexe. Passer à la catégorie $sPr(\mathcal{D}/NG)$ permet donc de se ramener à un cas simple que nous savons traiter. On rappelle que l'on a un préfaisceau en groupe simpliciaux $K(M, n)$ sur $\mathcal{D}/G$. On note $\widetilde{K}(M, n)$ l'image de cet objet par le foncteur $\widetilde{(-)}$ et $L\widetilde{K}(M, n)$ son image par le foncteur dérivé $L\widetilde{(-)}$

On commence par donner la définition de système local.

Definition 3.2.28. Soit $F \in sPr(\mathcal{D})$. Un système local sur F est la donnée d'un préfaisceau en groupe abélien sur $\mathcal{D}/G$ où G est le groupoïde fondamental de F. On notera $Sysloc(F)$ la catégorie des systèmes locaux sur F.

On va définir un groupe de cohomologie de la façon suivante.

Definition 3.2.29. 3.2.27 Soit F un préfaisceau simplicial et M un système local sur F, on définit

$$H^n(F, M) := \pi_0 Map_{sPr(\mathcal{D})/NG}(F, L\widetilde{K}(M, n))$$

Le rôle de M sera joué dans les exemples que nous traiterons par les préfaisceaux $\pi_n(F)$. Ceux-ci bien que définis sur $(\mathcal{D}/F)_0$ se relève en des préfaisceaux sur $\mathcal{D}/G$. On écrit pour cela le lemme suivant

Lemme 3.2.30. *Le foncteur*

$$\pi_n(F) : (\mathcal{D}/F)_0 \to Gr$$

se relève en un foncteur toujours noté $\pi_n(F)$ $\pi_n(F) : \mathcal{D}/G \to Gr$

Preuve
Se donner un point de $F(X)$ revient à se donner un point de $G(X)$. La seule chose à montrer est que le relèvement de $\pi_n(F)$ construit objet par objet est fonctoriel. Soit donc f, u un morphisme dans $\mathcal{D}/G$, de (X, x) dans (Y, y), comme on a un isomorphisme dans $G(X)$, $u : y \circ f \backsimeq x$, on en déduit que $f^*(y)$ et x sont dans la même composante connexe de $G(X)$, soit que l'on a bien un morphisme induit

$$\pi_n(F)(X, x) \backsimeq \pi_n(F)(X, f^*(y)) \to \pi_n(F)(Y, y)$$

♦

Notons que, comme dans le cas connexe, le préfaisceaux $L\widetilde{K}(M, n)$ admet M comme n-ème groupe d'homotopie et admet les mêmes π_0 et π_1 que F. Ses autres groupes d'homotopie étant quant à eux triviaux.

Comme dans le cas connexe, on a le théorème suivant

THEOREME 3.2.31. *Soit G un groupoïde, alors pour tout m, le foncteur*

$$H^m(NG,-) : Sysloc(NG) \to Ab$$
$$M \to H^m(NG,M)$$

est isomorphe au n-ème foncteur dérivé du foncteur $H^0(NG,-)$.

Preuve
On a une équivalence entre la catégorie des préfaisceaux en groupes abéliens simpliciaux sur $\mathcal{D}/G$ et la catégorie des complexes de préfaisceaux en groupes abéliens concentrés en degrés négatifs ou nuls avec une différentielle positive. On note respectivement $sAb(\mathcal{D}/G)$ et $C^-(\mathcal{D}/G, Ab)$ ces deux catégories. Il s'agit là d'une généralisation de la correspondance de Dold-Kan. On a ainsi toujours une correspondance entre les quasi-isomorphismes de complexes et les équivalences faibles de préfaisceaux simpliciaux. ce qui induit une équivalence sur les catégories homotopiques. La catégorie homotopique des complexes étant notée $D^-(\mathcal{D}/G, Ab)$.

$$\Gamma : D^-(\mathcal{D}/G, Ab) \simeq Ho(sAb(\mathcal{D}/G))$$

On rappelle alors que les foncteur dérivés sont donnés par

$$H^m_{der}(\mathcal{D}/G, M) \simeq Hom_{D^{-1}(\mathcal{D}/G,Ab)}(\mathbb{Z}, M[m])$$

Où $\mathbb{Z}$ est regardé comme le préfaisceaux constant de fibre $\mathbb{Z}$ et $M[m]$ est le complexe concentré en degrés $-m$ de valeur M. Le foncteur Γ induit donc un isomorphisme

$$Hom_{D^{-1}(\mathcal{D}/G,Ab)}(\mathbb{Z}, M[m]) \simeq Hom_{Ho(sAb(\mathcal{D}/G))}(\Gamma(\mathbb{Z}), \Gamma(M[m]))$$

Et $\Gamma(\mathbb{Z})$ est équivalent dans $sAb(\mathcal{D}/G)$ au préfaisceau constant de fibre $\mathbb{Z}$. $\Gamma(M[m])$ est quant à lui équivalent à $K(M,m)$. Donc

$$Hom_{D^{-1}(\mathcal{D}/G,Ab)}(\mathbb{Z}, M[m]) \simeq Hom_{Ho(sAb(\mathcal{D}/G))}(\mathbb{Z}, K(M,m))$$

L'adjonction de Quillen entre le foncteur abélianisation $\mathbb{Z}(-)$ et le foncteur d'oubli j :

$$\begin{tikzcd} sAb(\mathcal{D}/G) \arrow[r, shift left, "\mathbb{Z}(-)"] & sPr(\mathcal{D}/G) \arrow[l, shift left, "j"] \end{tikzcd}$$

Donne finalement

$$Hom_{D^{-1}(\mathcal{D}/G,Ab)}(\mathbb{Z}, M[m]) \simeq Hom_{Ho(sPr(\mathcal{D}/G))}(*, K(M,m)) \simeq H^m(NG,M)$$

♦

Théorie de l'Obstruction

Comme pour le cas pointé, on a un diagramme homotopiquement cartésien dans $sPr(\mathcal{D}/G)$.

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq n}F_1 \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ \tau_{\leq n-1}F_1 \arrow[r] & K(\pi_n(F), n+1) \end{tikzcd}$$

Ce diagramme donné pour le cas particulier d'un ensemble simplicial par la proposition 5.1 de [GJ] appliquée à la tour des n-tronqués de cet ensemble. Le groupoïde fondamental de F_1 étant en effet trivial. La construction de ce diagramme homotopiquement cartésien étant fonctorielle, elle s'étend aux préfaisceaux simpliciaux sur une catégorie donnée, ici $\mathcal{D}/G$.

Par l'équivalence de Quillen 3.2.27, on obtient un diagramme homotopiquement cartésien

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leq n}F \arrow[r] \arrow[d] & NG \arrow[d] \\ \tau_{\leq n-1}F \arrow[r] & L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1) \end{tikzcd}$$

Et si H est un préfaisceau simplicial qui envoi sur $\tau_{\leq n-1}F$ alors il se relève à $\tau_{\leq n}F$ si le morphisme naturel $H \to L\widetilde{K}^F(\pi_n(F), n+1)$ correspond à l'élément nul du groupe

$$\pi_0 Map_{sPr(\mathcal{D})/NG}(H, L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1))$$

Changements de Bases

Il nous sera utile par la suite de considérer le changement de base d'un préfaisceau simplicial F vers un préfaisceau simplicial F' au dessus de $\tau_{\leq 1}F \simeq NG$ (dans $Ho(sPr(\mathcal{D}))$). Soit G' le préfaisceau en groupoïde vérifiant $\tau_{\leq 1}F' \simeq NG'$. On note $u : NG' \to NG$ On a une adjonction

$$sPr(\mathcal{D})/NG' \underset{-\times_{NG}NG'}{\overset{u^*}{\rightleftarrows}} sPr(\mathcal{D})/NG$$

Où le foncteur d'oubli u^* commute aux équivalences faibles et aux cofibrations et est donc de Quillen à gauche. On obtient donc une adjonction sur les catégories homotopiques.

$$Map_{sPr(\mathcal{D})/NG}(u^*F', L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1)) \simeq Map_{sPr(\mathcal{D})/NG'}(F', L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1) \times^h_{NG} NG')$$

Or les groupes d'homotopies de $L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1) \times^h_{NG} NG'$ sont donnés par $\pi_n(F)$ au rang $n+1$ par les π_1 et π_0 de F' aux rangs 0 et 1 et sont triviaux aux autres niveaux. On a donc une équivalence faible

$$L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1) \times^h_{NG} NG' \simeq L\widetilde{K}(\pi_n(F) \circ u^*, n+1)$$

D'où

$$\pi_0 Map_{sPr(\mathcal{D})/NG}(u^*F', L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1)) \simeq H^{n+1}(F', \pi_n(F))$$

En particulier, un morphisme de F' dans $\tau_{\leq n-1}F$ se relève à $\tau_{\leq n}F$ si et seulement si il correspond à un élément nul du groupe de cohomologie

$$H^{n+1}(F', \pi_n(F))$$

3.2.4 Cohomologie des Modules Simpliciaux

Définitions

Dans cette section, on s'intéresse plus particulièrement au cas particulier dont on aura besoin par la suite. On considère la catégorie de base $(Ens, \times, *)$. On se fixe un morphisme de monoïdes commutatifs $B \to A$. On considère la catégorie $\mathcal{B}B$ à un objet $*$ et telle que $\underline{End}_{\mathcal{B}B}(*) := B$. On a montré dans la proposition 2.3.3 que la catégorie des préfaisceaux sur cette catégorie est équivalente à $B - mod$. Cela induit en particulier une équivalence de catégories simpliciales entre $sPr(\mathcal{B}B)$ et $sB - mod$. On va alors considérer l'objet A de $sB - mod$. On considère le préfaisceau simplicial $(A, Id_A) \in sPr(\mathcal{D})/A$, que nous noterons simplement A par la suite. Ce préfaisceau est concentré en degrés zéro.

Dans le cas qui va nous intéresser, on dispose d'un système local sur $\mathcal{B}B/A$. Par exemple, un foncteur $\pi_n(F)$ associé à un préfaisceau F sur $\mathcal{B}B$. On a alors un groupe de cohomologie

$$H^{n+1}(A, \pi_n(F)) = \pi_0 Map_{sPr(\mathcal{B}B)/A}(A, L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1)) \simeq \pi_0 Map_{sB-mod/A}(A, L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1)(*))$$

On va alors s'intéresser à l'abéliannisé de cette cohomologie. On note $Z : Ens \to \mathbb{Z} - mod$ le foncteur abélianisation ou *groupe abélien libre associé.*

Lemme 3.2.32. *On a une équivalence de catégorie entre $Ab(Pr(\mathcal{B}B)/A)$ et la catégorie des $\mathbb{Z}(B)$-modules A-gradués, notée $\mathbb{Z}(B) - mod^{A-grad}$.*

Preuve

On définit les foncteurs $\Theta : Ab(Pr(\mathcal{B}B)/A) \to Z(B) - mod^{A-grad}$ et $\Xi : Z(B) - mod^{A-grad} \to Ab(sPr(\mathcal{B}B)/A)$ par

$$\Theta : (\ F \xrightarrow{f} A\ ) \to \oplus_{m \in A} f^{-1}(m)$$

$$\Xi : X = \cup_{m \in A} X_m \to F_X := * \to X$$

L'identité $\Xi \circ \Theta = Id$ provient du fait que pour $F \in sPr(\mathcal{B}B)/A$, $F(*) \simeq \oplus_{m \in A} f^{-1}(m)$. La seconde identité, provient du fait que pour $X \in Z(B) - mod^{A-grad}$, on a un morphisme naturel $f : X \to A$ tel que $X_m = f^{-1}(m)$ et donc $\theta(F_X) \simeq X$.

♦

Definition 3.2.33. On note

$$Ab : sPr(\mathcal{B}B)/A \to Ab(sPr(\mathcal{B}B)/A)$$
$$Ab : sB - mod/A \to sZ(B) - mod^{A-grad}$$

les foncteurs abélianisation des catégories $sPr(\mathcal{B}B)/A$ et $sB - mod/A$.

Ces foncteurs sont adjoints à gauche de foncteurs d'oubli, et ils sont de Quillen à gauche. On a de plus un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} sPr(\mathcal{B}B)/A \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "Ab"'] & sB - mod/A \arrow[d, "Ab"] \\ Ab(sPr(\mathcal{B}B)/A) \arrow[r, "\sim"'] & sZ(B) - mod^{A-grad} \end{tikzcd}$$

On a alors

$$\begin{aligned} H^{n+1}(A, \pi_n(F)) &= \pi_0 Map_{sPr(\mathcal{B}B)/A}(A, L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1)) \\ &\simeq \pi_0 Map_{Ab(sPr(\mathcal{B}B)/A)}(Ab(A), L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1)) \\ &\simeq \pi_0 Map_{\mathbb{Z}(B)-mod^{A-grad}}(\mathbb{Z}(A), L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1)(*)) \end{aligned}$$

On en vient à la proposition qui nous intéresse.

Proposition 3.2.34. *Soit $u : B \to A \in Comm(Ens)$. Le morphisme u est hf si et seulement si*

- *Le morphisme $Z(u) : Z(B) \to Z(A)$ est hf dans $sZ(B) - mod^{A-grad}$.*
- *Le morphisme $u : B \to A$ est hf pour la structure de modèles 1-tronquée sur $sB - mod$.*

Preuve
On commence par l'implication la plus simple. Supposons que u est hpf, on considère les deux adjonctions de Quillen (où les foncteurs d'oubli sont notés i).

$$sB - mod \underset{Id}{\overset{Id}{\rightleftarrows}} sB - mod^{\leq 1}$$

$$sB - mod \underset{i}{\overset{\times A}{\rightleftarrows}} sB - mod/A$$

$$sB - mod/A \underset{i}{\overset{Z}{\rightleftarrows}} sZ(B) - mod^{A-grad}$$

Entre $sB - mod$ muni de sa structure de modèles et $sB - mod$ muni de la structure 1-tronquée et entre $sB - mod$ et son abélianisée. Les foncteurs adjoint à droite préservent les équivalences faibles et les colimites filtrantes. Les adjoints à gauche préservent donc les objets homotopiquement de présentation finie.

Passons maintenant à la partie difficile. On a un premier lemme

Lemme 3.2.35. *Il existe un rang n_0 tel que pour tout système local M et tout entier $n \geq n_0$, on ai*

$$H^n(A, M) \simeq *$$

Preuve
Comme remarqué précédemment

$$H^n(A, m) \simeq \pi_0 Map_{sZ(B)-mod^{A-grad}}(Z(A), L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1)(*))$$

La cohomologie de A est donc isomorphe aux Ext de $Z(A)$ dans la catégorie abélienne $sZ(B) - mod^{A-grad}$. On se réfère à 3.2.31, on a en effet par transitivité une équivalence de Quillen entre catégories abéliennes

$$sZ(B) - mod^{A-grad} \to Ab(sPr(\mathcal{B}(B))/A) \to sAb(\mathcal{B}B/A) \to C^-(\mathcal{B}B/A, Ab)$$

Ce qui implique en particulier des isomorphismes sur les Ext.

Le module $Z(A)$ étant hf dans la catégorie $sZ(B) - mod^{A-grad}$, ses Ext s'annulent à partir d'un certain rang, que nous noterons n_0.

♦

Corollaire 3.2.36. *Pour $n \geq n_0$, et pour tout B-module simplicial au dessous de A, $v : A \to F$, on a des isomorphismes*

$$\pi_0(Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq n-1}F), v) \backsimeq \pi_0(Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq n}F), v)$$

Preuve
Les groupes de cohomologie $H^n(A, M)$ s'annulent à partir du rang n_0. On se réfère alors à la théorie de l'obstruction associée à cette cohomologie, i.e. le fait que pour $n \geq n_0$ les groupes $H^{n+1}(A, \pi_n(F))$ s'annulent prouve le corollaire.

♦

Corollaire 3.2.37. *Soit $F \in A/sB - mod$, $v : A \to F$. Pour tout i, il existe $n_i = n_0 + i$ tel que pour tout $n \geq n_i$*

$$\pi_i(Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq n-1}F), v) \backsimeq \pi_i(Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq n}F), v)$$

Preuve
La première chose que l'on démontre est que l'ensemble simplicial $Map_{sB-mod/\tau_{\leq n-1}F}(A, \tau_{\leq n}F)$ est non vide. Pour cela on considère le diagramme homotopiquement cartésien dans $sPr(\mathcal{B}B/)$ suivant

$$\begin{tikzcd}
A \times^h_{L\widetilde{K}(\pi_n(F),n+1)} NG \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\leq n}F \arrow[r] \arrow[d] & NG \arrow[d, "s"'] \\
A \arrow[r] & \tau_{\leq n-1}F \arrow[r] & L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1) \arrow[u, bend right, "p"']
\end{tikzcd}$$

Où $p \circ s = Id$.
On a alors des équivalences d'ensembles simpliciaux

$$Map_{sB-mod/\tau_{\leq(n-1)}F}(A, \tau_{\leq n}F) \backsimeq Map_{sB-mod/L\widetilde{K}(\pi_n(F),n+1)}(A, NG) \backsimeq Map_{sB-mod/A}(A, A \times^h_{L\widetilde{K}(\pi_n(F),n+1)} NG)$$

Pour $n \geq n_0$, la cohomologie de A est triviale . Soit f le morphisme de A vers $L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1)$, alors $p \circ f$ définit un morphisme de A dans NG. De plus, le groupe de cohomologie $H^{n+1}(A, \pi_n(F))$ étant trivial, on en conclut que les éléments définis par f et $s \circ p \circ f$ dans ce groupe sont égaux. Le triangle suivant est donc commutatif à homotopie prés dans $sB - mod/L\widetilde{K}(\pi_n, n+1))$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "p \circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & NG \arrow[dl, "s"] \\
& L\widetilde{K}(\pi_n(F), n+1) &
\end{tikzcd}$$

et $Map_{sB-mod/\tau_{\leq(n-1)}F}(A, \tau_{\leq n}F)$ admet un π_0 non vide.

On montre maintenant l'isomorphisme du lemme. Pour cela remarquons le fait suivant

$$A \times^h_{L\widetilde{K}(\pi_n(F),n+1)} NG \backsimeq A \times^h_{NG} NG \times^h_{L\widetilde{K}(\pi_n(F),n+1)} NG$$
$$\backsimeq A \times^h_{NG} L\widetilde{K}(\pi_n(F), n) \backsimeq K(\pi_n(F), n)$$

On a donc

$$\pi_0 Map_{sB-mod/\tau_{\leq(n-1)}F}(A, \tau_{\leq n}F) \backsimeq H^n(A, \pi_n(F))$$

On a de plus, la formule suivante

$$\pi_i Map_{sB-mod/\tau_{\leq(n-1)}F}(A, \tau_{\leq n}F) \backsimeq H^{n-i}(A, \pi_n(F))$$

et une suite exacte courte

$$Map_{sB-mod/\tau_{\leq(n-1)}F}(A, \tau_{\leq n}F) \to Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq(n-1)}F) \to Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq(n)}F)$$

Dont on déduit que pour $n \geq n_0 + i$, on a

$$\pi_i(Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq n}(F)), v) \backsimeq \pi_i(Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq(n-1)}(F)), v)$$

♦

Corollaire 3.2.38. *Soit $F \in sB - mod/A$ tel que $v : A \to F$. La tour de fibrations pointées*

$$(Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq n}F), v)$$

Converge complètement au sens de [GJ].

La condition donnée par le lemme précédent suffit à assurer la convergence complète. Cela se vérifie grâce au corollaire 2.21 du lemme de convergence complète de [GJ].

♦

Corollaire 3.2.39. *Pour tout $n \geq n_i$ et tout $F \in A/sB - mod$ avec $v : A \to F$, on a des isomorphismes*

$$\pi_i(Map_{sB-mod}(A, F), v) \xrightarrow{\sim} lim_{n\in\mathbb{N}}(\pi_i(Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq n}F), v)) \xrightarrow{\sim} \pi_i(Map_{sB-mod}(A, \tau_{\leq n_i F}), v)$$

Preuve
Le premier isomorphisme est donné par le suite de Milnor ([GJ], 2.15) et le fait que la convergence complète implique l'annulation de la lim^1. Le second isomorphisme est une conséquence immédiate du corollaire 3.2.37.

♦

On va prouver enfin le lemme suivant avant de passer à un dernier lemme qui démontre la proposition 3.2.34.

Lemme 3.2.40. *On se donne un diagramme commutatif dans sEns*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

Où g est une équivalence faible. Alors le morphisme f est une équivalence faible si et seulement si pour tout $z \in Z$, les fibres homotopiques X_z de z et $Y_{g(z)}$ de $g(z)$ sont simultanément vides et sont faiblement équivalentes lorsqu'elles sont non vides.

Preuve
On commence par le cas où $g := Id : Z \to Z$.

Soit n un entier supérieur à 2, soit $x \in X$, $y \in Y$ s'envoyant tout deux sur $z \in Z$ on a deux suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \to & \pi_{n+1}(Z,z) & \to & \pi_n(X_z,x) & \to & \pi_n(X,x) & \to & \pi_n(Z,z) & \to & \pi_{n-1}(X_z,x) & \to \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots \to & \pi_{n+1}(Z,z) & \to & \pi_n(Y_z,y) & \to & \pi_n(Y,y) & \to & \pi_n(Z,z) & \to & \pi_{n-1}(Y_z,y) & \to \cdots \end{array}$$

Par le lemme des 5, on obtient donc $\pi_n(X,x) \backsimeq \pi_n(Y,y)$.
Pour $n = 1$, on a une action de $\pi_1(Z,z)$ sur les fibres de X et Y respectivement en x et y. On définit un morphisme $f : \pi_1(Z,z) \to \pi_0(X_z)$ par $f(g) := g.x$, et de même pour y. L'exactitude signifie alors que $g.x = x$ dans $\pi_0(X)$, et de même pour Y. On obtient deux suites exactes, comme précédemment. L'injectivité de $\pi_1(X,x) \backsimeq \pi_1(Y,y)$ se prouve comme dans le lemme des 5. Pour la surjectivité, soit $g \in \pi_1(Y,y)$, alors par exactitude $g.x = x$ dans $\pi_0(Y_z) \backsimeq \pi_0(X_z)$. L'image de g dans $\pi_0(X_z)$ appartient donc par exactitude à l'image du morphisme $\pi_1(X,x) \to \pi_1(Z,z)$.
Pour le cas $n = 0$, on montre d'abord la surjectivité. Soit $y \in \pi_0(Y)$, soit z l'image de y dans $\pi_0(Z)$. Alors $y \in \pi_0(Y_z) \backsimeq \pi_0(X_z)$ donc admet un antécédent dans $\pi_0(X)$. On montre maintenant l'injectivité. Soit $x, x' \in \pi_0(X)$ qui ont même image dans $\pi_0(Y)$. On en déduit qu'ils ont même image z dans $\pi_0(Z)$ et donc appartiennent à $\pi_0(X_z) \backsimeq \pi_0(Y_z)$. Ils s'envoient sur le même élément de $\pi_0(Y_z)$ donc sont égaux.

Si g n'est pas l'identité de Z mais une équivalence faible de Z dans T, alors on remarque que le morphisme $X \times^h_T Z \to Y$ est une équivalence faible, et que l'on a aussi

$$Y_{g(z)} \backsimeq X_z \times^h_T Y_{g(z)} \backsimeq (X \times^h_T Y)_z$$

On s'est donc ramené au cas précédent pour le morphisme $X \times^h_T Y \to X$ au dessus de Z dont les fibres sont simultanément vides et sont équivalentes lorsqu'elles sont non vides.

♦

Lemme 3.2.41. *Soient* $(F_\alpha)_{\alpha\in\Theta}$ *un diagramme filtrant d'objets* n*-tronqués et* $F \backsimeq Hocolim_\alpha F_\alpha$*. Pour tout* i *on a une équivalence faible*

$$Map_{sB-mod}(A,F) \backsimeq Hocolim(Map_{sB-mod}(A,F_\alpha))$$

Preuve

Par induction sur le degrés de troncation n de F. Cela fait parti des hypothèses pour $n=1$. Supposons le pour $n-1$, Soit $\bar{u} \in Hocolim_\alpha(Map_{sB-mod}(A,\tau_{n-1}F_\alpha))$, représenté par $u \in Map_{sB-mod}(A,\tau_{n-1}F_{\alpha_0})$ et soit $\widetilde{u}$ son image dans $Map_{sB-mod}(A,\tau_{n-1}F)$. Le diagramme étant filtrant, la colimite homotopique suivant α_0/Θ est isomorphe dans la catégorie homotopique $Ho(sEns)$ à la colimite homotopique suivant Θ. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
Hocolim_{\alpha\leq\alpha_0} Map_{sB-mod/\tau_{n-1}F_\alpha}((A,u_\alpha),F_\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & Map_{sB-mod/\tau_{n-1}F}((A,\widetilde{u}),F) \arrow[d] \\
Hocolim_{\alpha\leq\alpha_0}(Map_{sB-mod}(A,F_\alpha)) \arrow[r] \arrow[d] & Map_{sB-mod}(A,F) \arrow[d] \\
Hocolim_{\alpha\leq\alpha_0}(Map_{sB-mod}(A,\tau_{n-1}F_\alpha)) \arrow[r] & Map_{sB-mod}(A,\tau_{n-1}F)
\end{tikzcd}$$

Où $u_\alpha := \; A \xrightarrow{u} F_{\alpha_0} \longrightarrow F_\alpha$ et $\widetilde{u} := \; A \xrightarrow{\widetilde{u}} F$.

Commençons par montrer que les fibres sont simultanément vides. Par construction le morphisme naturel

$$\begin{gathered} Hocolim_{\alpha_0/\Theta}(Map_{sB-mod}(A,\tau_{n-1}F_\alpha)) \to Map_{sB-mod}(A,\tau_{n-1}F) \\ \bar{u} \to \widetilde{u} \end{gathered}$$

Induit le morphisme naturel suivant sur les groupes de cohomologie

$$Hocolim_{\alpha_0/\Theta}(H^{n+1}(A,\pi_n(F_\alpha)) \to H^{n+1}(A,\pi_n(F))$$

Or ce morphisme est un isomorphisme car les $H^n(A,-)$ commutent aux colimites homotopiques. Par conséquent les classes de $\bar{u}$ et $\widetilde{u}$ s'annulent simultanément. Donc le morphisme u se factorise par F_{α_0}, si et seulement si $\widetilde{u}$ se factorise par F, i.e. les fibres sont simultanément vides.

Prouvons maintenant qu'elles sont équivalentes lorsqu'elles sont non vides. Les foncteurs π_i commutent avec les colimites homotopiques, le morphisme induit sur les π_i des fibres est donc le morphisme naturel

$$colim_{\alpha\leq\alpha_0}\pi_i Map_{sB-mod/\tau_{n-1}F_\alpha}((A,u_\alpha),F_\alpha) \to \pi_i Map_{sB-mod/\tau_{n-1}F}((A,\widetilde{u}),F)$$

Or

$$\pi_i Map_{sB-mod/\tau_{n-1}F_\alpha}((A,u_\alpha),F_\alpha) \backsimeq H^{n-i}(A,\pi_n(F_\alpha))$$

$$\text{et } \pi_i Map_{sB-mod/\tau_{n-1}F}((A,\widetilde{u}),F) \backsimeq H^{n-i}(A,\pi_n(F))$$

Donc ce morphisme est en fait un isomorphisme. D'après le lemme 3.2.40, cela termine la preuve.

♦

Finalement, ce dernier lemme permet de prouver 3.2.34. Soit F un préfaisceau simplicial au dessous de A, $v : A \to F$, tel que $F \backsimeq Hocolim_{\mathfrak{I}} F_i$, où I est filtrant. Si on considère le morphisme naturel

$$Hocolim(Map_{sB-mod}(A,F_i)) \to Map_{sB-mod(A,F)}$$

On veut montrer que pour tout i, il induit un isomorphisme sur les π_i pris en v. On se fixe un i. D'après 3.2.39, on peut se ramener au cas n_i-tronqué. Le foncteur $\tau_{\leq n}$ commutant aux colimites, on peut appliquer 3.2.41.

♦

3.3 Théorie Homotopique 1-Tronquée

Afin de pouvoir utiliser la proposition 3.2.34 sur des exemples , nous donnons maintenant une description plus détaillée de la catégorie homotopique pour la structure 1-tronquée. Cette partie est largement inspirée de [T2].

Definition 3.3.1. Soit B un monoïde commutatif dans Ens, un B-groupoïde M est la donnée d'un groupoïde

$$M_1 \rightleftarrows M_0$$

Où M_1 et M_0 sont des B-modules.

Un morphisme de B-groupoïde de M dans N est la donnée d'un morphisme de groupoïde de M dans N pour lequel les morphismes induits $M_1 \to N_1$ et $M_0 \to N_0$ sont des morphismes de B-modules.

On notera $B - Gpd$ la catégorie des B-groupoïdes.

Definition 3.3.2. Soit B un monoïde commutatif dans Ens. On définit un foncteur

$$\pi_{\leq 1}^{B} : sB - mod \to B - Gpd$$

Qui associe à un B-module simplicial M, le groupoïde fondamental $\pi_{\leq 1}(M)$

Lemme 3.3.3. *Soit B un monoïde dans Ens. Soit $A \in sB - mod$. Le foncteur Nerf*

$$B - Gpd \to sB - mod$$

Et le foncteur $\pi_{\leq 1}$ préservent les équivalences faibles et induisent une équivalence de catégorie

$$Ho(B - Gpd) \simeq Ho(sB - mod)^{\leq 1}$$

Entre la catégorie des B Groupoïdes munie des équivalences de groupoïdes et la catégorie $sB - mod$ munie de sa structure de modèles 1-tronquée.

Preuve
Il est clair que ces foncteurs préservent (et reflètent) les équivalences faibles. Il est de même clair que tout B-module simplicial M est équivalent pour la structure 1-tronquée au nerf d'un groupoïde.

♦

Lemme 3.3.4. *Soit B un monoïde dans Ens. On a une équivalence de catégorie*

$$[B - Gpd] \simeq Ho(B - Gpd)$$

Où $[B - Gpd]$ est la catégorie dont les objets sont les B-Groupoïdes et les morphismes sont les classes d'isomorphismes de foncteurs.

Nous devrons donc, pour vérifier qu'un morphisme $B \to A \in B - alg$ est hf dans $sEns$, commencer par vérifier qu'il est hf dans Gpd. Pour cela il est nécessaire de rappeler des résultats de théorie homotopique des diagrammes de Groupoïdes.

Soit $\mathcal{I}$ une catégorie petite, on considère la catégorie $Fon(\mathcal{I}, Gpd)$ des foncteurs de $\mathcal{I}$ dans les groupoïdes muni des équivalences faibles par niveau.

Definition 3.3.5. Soient $F, G \in Fon(\mathcal{I}, Gpd)$. Un morphisme faible f de F dans G est la donnée d'une famille de foncteurs $f_i : F(i) \to g(i)$ et pour tout $u : i \to j \in \mathcal{I}$ d'un diagramme essentiellement commutatif

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "F(u)"'] & G(i) \arrow[d, "G(u)"] \\ F(j) \arrow[r, "f_j"'] & G(j) \end{tikzcd}$$

i.e. il existe un isomorphisme fonctoriel dans , $\gamma_u^f : G(u) \circ f_i \simeq f_j \circ F(u)$.
Tels que

- ▷ On ai $\gamma_{Id}^f = Id$.
- ▷ Pour tout couple de morphismes de $\mathcal{I}$, $i \xrightarrow{u} j \xrightarrow{v} k$, on a

$$\gamma^f_{v\circ u} = [\gamma^f_v] \circ [G(v)(\gamma^f_u)]$$

Definition 3.3.6. Soient $f : F \to G$ et $g : G \to H$ deux morphismes faibles. On définit la composition de f et g comme suit

▷ Pour tout $i \in \mathcal{I}$, $(g \circ f)_i = g_i \circ F_i$.

▷ Pour tout $u : i \to j \in \mathcal{I}$,

$$\gamma^{g\circ f}_u = g(\gamma^f_u) \circ \gamma^g_u.$$

Definition 3.3.7. Soit $f, g : F \to G$ deux morphismes faibles. Une transformation naturelle de f dans g est la donnée , d'une famille de transformations naturelles indexées par $\mathcal{I}$

$$\phi_i : f_i \to g_i$$

Telle que pour tout $u : i \to j \in \mathcal{I}$, on ai

$$G(u) \circ \phi_i = \phi_i \circ F(u)$$

Definition 3.3.8. On définit la catégorie $[Fon(I, Gpd)]$ comme étant la sous catégorie de $[Fon(I, Gpd)]$ possédant les mêmes objets et dont les morphismes sont les classes d'isomorphismes de morphismes faibles.

Theoreme 3.3.9. *Le foncteur naturel $Fon(I, Gpd) \to [Fon(I, Gpd)]$ induit une équivalence*

$$Ho(Fon(I, Gpd)) \backsimeq [Fon(I, Gpd)]$$

Definition 3.3.10. Soit $F, G \in Fon(I, Gpd)$, on définit un groupoïde

$$\underline{Hom}^{lax}(F, G)$$

dont les objets sont les morphismes faibles et les morphismes sont les transformations naturelles entres morphismes faibles.

Corollaire 3.3.11. *Soit $\mathcal{I}$ un diagramme filtrant, alors le foncteur*

$$Hocolim : Fon(I^{op}, Gpd) \to Gpd$$

est décrit, pour tout $F \in Fon(I^{op}, Gpd)$, par

$$Hocolim(F) \backsimeq \underline{Hom}^{lax}_{Fon(I,Gpd)}(*, F^{op})$$

Preuve
Il suffit de montrer

$$Holim(F^{op}) \backsimeq \underline{Hom}^{lax}_{Fon(I,Gpd)}(*, F^{op})$$

Par commodité, nous ferons toujours référence au groupoïde $\underline{Hom}^{lax}_{Fon(I,Gpd)}(*, F^{op})$ ci-dessus en le notant $Holim(F^{op})$ Soit G un groupoïde. On construit un isomorphisme fonctoriel

$$\psi : \underline{Hom}_{Gpd}(G, Holim(F^{op})) \to \underline{Hom}^{lax}_{Fon(I,Gpd)}(G, F^{op})$$

Soit $H \in \underline{Hom}^{\Delta^{\leq 1}}_{Gpd}(G, Holim(F^{op}))$, où $\underline{Hom}^{\Delta^{\leq 1}}_{Gpd}$ désigne le Hom enrichi sur les groupoïdes interne à la catégorie des groupoïdes. Pour tout $g \in G$, $H(g)$ est la donnée d'une famille d'éléments $H(g)(i) \in F^{op}(i)$. On se fixe un i, alors pour tout $g \in G$, on définit

$$\psi(H)(i) := g \to H(g)(i)$$
$$\psi(H)(i)(u : g \to g') := H(u)(i)$$

Cela définit bien un morphisme faible de G dans F^{op}. On regarde maintenant les morphismes. Soit $f : H \to H'$ une transformation naturelle. On définit

$$\psi(f) := i \to (g \to (f_{g,i} : H(g)(i) \to H'(g)(i)))$$

f est la donnée pour tout g d'une transformation naturelle de morphismes faibles entre $H(g)$ et $H'(g)$. Cette famille de transformations naturelles vérifie donc pour tout $u : i \to j$ et tout $g \in G$,

$$H'(g)(u) \circ f_i = f_j \circ H(g)(u)$$

ce peut aussi s'écrire

$$\psi(H')(u) \circ \psi(f)(i) = \psi_f(j) \circ \psi(H)(u)$$

Soit cette transformation induit bien une transformation naturelle entre morphismes faibles

$$\psi(f) : \psi(H) \to \psi(H')$$

On définit un foncteur en sens inverse suivant la même méthode. Si η est un morphisme faible de G dans F^{op} alors pour tout g, on a un morphisme faible $\eta_g : * \to F^{op}$. On définit alors

$$\Psi(\eta) : g \to \eta_g$$

Comme pour tout i, on a un morphisme de groupoïde $\eta_i : g \to \eta_{i,g}$, on en déduit que $\Psi(\eta)$ est un morphisme de groupoïde par niveau, soit un foncteur. Si on se donne maintenant une transformation naturelle entre morphismes faibles

$$f : \eta \to \eta'$$

$$\Psi(f) := g \to \Psi(f)_g := f_g : \eta_g \to \eta'_g$$

Il est clair que f_g est par restriction une transformation naturelle entre morphismes faibles. La famille f_g étant fonctorielle en g, Ψ_f définit une transformation naturelle de $\Psi(\eta)$ dans $\Psi(\eta')$.

On vérifie finalement qu'il s'agit d'un isomorphisme de groupoïde en remarquant que $\psi \circ \Psi = \Psi \circ \psi = Id$, ce qui est clair sur les objets comme sur les morphismes. finalement, en passant aux classe d'isomorphismes, on obtient

$$[G, Holim(F^{op})] \backsimeq [G, F^{op}]$$

♦

Lemme 3.3.12. *Soit $\mathfrak{I}$ un diagramme filtrant et $F : \mathfrak{I} \to Gpd$, alors la colimite homotopique de F est donnée par*

- ◇ *Sur les objets*

$$Hocolim(F)_0 := Colim_{i\in\mathfrak{I}}(F(i))$$

Où la colimite est pris dans Ens.

- ◇ *Sur les morphismes, pour $\bar{x}, \bar{y} \in colim(F(i))$ représentés par $x \in F(i)$ et $y \in F(i')$, il existe k au dessous de i et i' et on a*

$$Hom_{Hocolim(F)}(\bar{x}, \bar{y}) := Colim_{j\in k/\mathfrak{I}}(Hom_{F(j)}((l_{i,j})_*(x), (j_{i',j})_*(y))).$$

Où $l_{i,j} : i \to j \in \mathfrak{I}$ et où $l_{i',j} : i' \to j \in \mathfrak{I}$.

Preuve
Cela vient du fait que la catégorie des groupoïdes est compactement engendrée. La structure de modèles et ses générateurs sont explicités dans [Hol]. Il suffit donc de calculer la colimite de F pour obtenir à équivalence faible prés sa colimite homotopique. Il est clair que le groupoïde proposé dans ce lemme vérifie la propriété universelle de la colimite.

♦

Chapitre 4

Lissité

4.1 Morphismes d'Anneaux Lisses

La théorie que nous allons développer va généraliser la notion de lissité. Cette généralisation permet de disposer d'une notion de morphismes lisse dans des contextes non additifs ou la définition usuelle n'a pas de sens. Nous allons dans un premier temps discuter de lissité dans les anneaux. Essentiellement, nous donnons une définition équivalente de la lissité qui peut être traduite en terme d'algèbre homotopique et va donc faire sens dans un cadre non additif. On conclura cette partie en remarquant que l'on obtient ainsi une notion de morphisme lisse pour les anneaux simpliciaux, ce qui est déjà une première étape dans la généralisation.

Theoreme 4.1.1. *(Correspondance de Dold-Kan)*
Soit A un anneau. On a une équivalence:

$$sA - mod \simeq Ch(A - mod)^{\leq 0}$$

Notons $F : sA - mod \to Ch(A - mod)^{\leq 0}$, alors $\forall i\ \pi_i(X) \simeq H_i(F(X))$.

Definition 4.1.2. Soient A un anneau, M, N deux A-modules. On note Gr la catégorie des groupes.

- ▷ On définit les foncteurs $Tor_k : (Ch(A - mod)^{\leq 0})^2 \to Gr$ par

$$Tor_*^A(M, N) := H_*(M \otimes_A^L N)$$

- ▷ On définit les foncteurs $Ext^k : (Ch(A - mod)^{\leq 0})^{op} \times Ch(A - mod)^{\leq 0} \to Gr$ par

$$Ext_A^*(M, N) := H^*(R\underline{Hom}_{A-mod}(M, N))$$

- ▷ On définit la dimension projective de M par:

$$ProjDim_A(M) := inf\{n\ tq\ Ext_A^{n+1}(M, -) = \{0\}\}.$$

- ▷ On définit la Tor-dimension de M par:

$$TorDim_A(M) := inf\{n\ tq\ Tor_i^A(M, -) = \{0\}\ \forall i > n\}$$

Definition 4.1.3. Soit X un $\mathbb{Z} - module$ simplicial. Il est n-tronqué si $\pi_i(X) \simeq \{0\}$ pour tout $i > n$.

Lemme 4.1.4. *Soit $A \to B \in \mathbb{Z} - alg$. Alors $TorDim_A B \leq n$ si et seulement si $\pi_i(B \otimes_A^L N) \simeq \{0\}$ pour tout $i > n + k$, pour tout k et tout $N \in sA - mod$, k-tronqué.*

Preuve
Cela vient du fait que l'équivalence de Dold-Kan est donnée par un foncteur monoïdal symétrique fort qui vaut l'identité sur la sous catégorie commune $A - mod$ (en identifiant pour un A-module M, M lui même, le A-module simplicial constant M et le complexe de A-module concentré en degrés nul M) et induit un foncteur monoïdal symétrique fort sur les catégories homotopique. Si on note toujours $F : sA - mod \to Ch(A - mod)^{\leq 0}$, on a alors

$$\pi_i(B \otimes_A^L N) \simeq H_i(B \otimes_A^L F(N))$$

De plus, par Dold-Kan, il est clair que $F(N)$ est p-tronqué si et seulement si N est p tronqué. On a donc bien l'équivalence voulue.

♦

Lemme 4.1.5. *Soient $X \in Ho(sEns)$ et $M \in s\mathbb{Z}-mod$ (resp $sA-mod$, pour un anneau A)*

- ⋄ *L'objet X est n-tronqué si et seulement si $Map_{sEns}(*, X) \backsimeq Map_{sEns}(S^i, X)$ $\forall\, i > n$ dans $Ho(sEns)$.*
- ⋄ *L'objet M est n-tronqué si et seulement si $Map_{s\mathbb{Z}-mod}(Z, M)$ (resp $Map_{sA-mod}(A, M)$) est n-tronqué dans $Ho(sEns)$.*

Preuve

Pour le premier point, on se ramène au lemme 3.2.40 en considérant la sphère pointée et les morphismes évaluation au point de base. Il suffit alors de montrer que les fibres sont faiblement équivalentes, ce qui est le cas car la fibre de $Map_{sEns}(*, X)$ est un point et la fibre de $Map_{sEns}(S^i, X)$ en f est le Map pointé de la sphère pointé en $*$ vers l'ensemble simplicial X pointé en $f(*)$ et admet comme π_j, les groupes $\pi_{i+j}(X, f(*))$ qui sont bien triviaux pour $i > n$.

Les $\mathbb{Z}$-modules libres forment une sous catégorie génératrice de $\mathbb{Z}-mod$. En particulier, dans $Ho(s\mathbb{Z}-mod)$ tout objet est une colimite homotopique de modules libres, i.e. $\forall\, N \in s\mathbb{Z}-mod$ il existe une famille d'ensembles $(\lambda_i)_{i\in I}$ tels que $N \backsimeq hocolim_I \coprod_{\lambda_i} \mathbb{Z}$ in $Ho(s\mathbb{Z}-mod)$. Supposons donc que $M \backsimeq Map_{s\mathbb{Z}-mod}(\mathbb{Z}, M)$ (dans $Ho(s\mathbb{Z}-mod)$) est n-tronqué. $Map_{s\mathbb{Z}-mod}(N, M) \backsimeq holim_I \prod_{\lambda_i}(Map_{s\mathbb{Z}-mod}(Z, M))$, donc est une limite homotopique d'objets n-tronqués. D'après le point 1, les objets n-tronqués dans $sEns$ sont stables par limite homotopique.

♦

Definition 4.1.6. Soit $u : A \to B \in s\mathbb{Z}-alg$. Le morphisme u est plat si (cf [TV])

i. Le morphisme naturel $\pi_*(A) \otimes_{\pi_0(A)} \pi_0(B) \to \pi_i(B)$ est un isomorphisme.

ii. Le morphisme d'anneaux $\pi_0(A) \to \pi_0(B)$ est plat.

En particulier, si A est cofibrant et n-tronqué, B plat implique B n-tronqué.

Remarque 4.1.7. Soit $u : A \to B \in \mathbb{Z}-alg$. Le morphisme u est plat si et seulement si $TorDim_A(B) = 0$.

Avant d'énoncer le théorème principal de cette section, nous allons donner les lemmes nécessaires à sa preuve.

Proposition 4.1.8. *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux lisse. Il existe deux anneaux noethérien A' et B' respectivement au dessus de A et B et un morphisme d'anneaux lisse $A' \to B'$ tel que le diagramme suivant soit cocartésien*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[d] \\ A \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Preuve

Il s'agit du cas affine dans le corollaire 17.7.9(b) de [EGAIV].

♦

Lemme 4.1.9. *Soient $A \to B$ et $A \to C$ deux morphismes d'anneaux. Alors si B est un complexe parfait de $B \otimes_A B$-modules, $D := B \otimes_A C$ est un complexe parfait de $D \otimes_C D$-modules.*

Preuve:

Les complexes parfait sont stables par changement de base. Or $D \otimes_A D \backsimeq B \otimes_A D$ et le diagramme commutatif suivant est cocartésien

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ B \otimes_A D \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

En effet,

$$B \otimes_{B\otimes_A B} B \otimes_A D \backsimeq B \otimes_{B\otimes_A B} B \otimes_A B \otimes_A C \backsimeq B \otimes_A C = D$$

D'où le résultat.

♦

Lemme 4.1.10. *Soit A un anneaux noethérien. Alors tout A-module plat de type fini est projectif.*

Lemme 4.1.11. *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux. On suppose A noethérien et B de présentation finie en tant que A-algèbre. On a équivalence entre* *i. L'anneau B est de Tor-dimension finie sur A.*

ii. L'anneau B est de dimension projective finie sur A.

Preuve
Supposons que B est de dimension projective finie. Alors B admet une résolution projective finie

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow B$$

Pour tout $i > n$, on a alors $Tor_i^A(B,-) \backsimeq Tor_{i-n-1}^A(P_{n+1},-) \backsimeq \{0\}$ car $P_{n+1} \backsimeq \{0\}$.

Réciproquement, supposons que B est de Tor dimension finie sur A. Soit n sa Tor dimension. On peut alors considérer une résolution libre de B par des modules de type fini, donnée par

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow B$$

Le module $P' := P_n/Im(P_{n+1})$ est de Tor dimension nulle d'après la formule citée ci-dessus, il est donc plat. Comme A est noethérien, P' étant de type fini, il est donc projectif d'après 4.1.10. On obtient finalement une résolution projective finie de B.

♦

Lemme 4.1.12. *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux. Alors B est de Tor dimension finie sur A si et seulement si il existe n tel que pour tout corps algébriquement clos L au dessous de A et tout entier i supérieur à n, $Tor_i^A(B,L) \backsimeq \{0\}$.*

Proposition 4.1.13. *Soit $u : A \to B$ un morphisme d'anneaux. On suppose que A est un corps algébriquement clôt. On a équivalence entre*

i. Le morphisme u est formellement lisse au sens des anneaux.

ii. Tout morphisme d'anneaux $x : B \to A$ muni A d'une structure de B-module de dimension projective finie sur B.

Proposition 4.1.14. *Soit $u : A \to B$ un morphisme d'anneaux plat de présentation finie. Alors u est lisse si et seulement si, pour tout corps K algébriquement clôt au dessous de A, le morphisme induit $K \to K \otimes_A B$ est lisse.*

On peut maintenant énoncer le théorème que l'on veut démontrer.

Theoreme 4.1.15. *Soit $u : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Alors u est lisse si et seulement si*

i. L'anneau B est de présentation finie dans $A - alg$.

ii. L'anneau B est plat sur A.

iii. L'anneau B est un complexe parfait de $B \otimes_A B$-modules.

Preuve
Commençons par supposer que u est lisse. Il est clair que B vérifie alors i et ii. Le lemme 4.1.9 implique que iii est stable par pushout. D'après 4.1.8, il suffit donc de le prouver pour A et B noethériens. On commence par montrer que le morphisme

$$B \otimes_A B \to B$$

est de dimension projective finie. Comme on s'est ramené au cas noethérien, cela revient à prouver qu'il est de Tor-Dimension finie.

Soit alors L un corps au dessous de A. On considère l'anneau $B_L := B \otimes_A L$, on a pour tout A-module M

$$B_L \otimes_{B_L \otimes_L B_L} M \backsimeq B \otimes_A L \otimes_{B \otimes_A B \otimes_A L} M \backsimeq B \otimes_{B \otimes_A B} B \otimes_A B \otimes_A L \otimes_{B \otimes_A B \otimes_A L} M \backsimeq B \otimes_{B \otimes_A B} M$$

et donc

$$Tor_*^{B \otimes_A B}(B,M) \backsimeq Tor_*^{B_L \otimes_L B_L}(B_L,M)$$

On se ramène donc au cas où le morphisme lisse considéré $L \to B_L$ admet pour source un corps.

Dans ce cas, le morphisme

$$L \to B_L \to B_L \otimes_L B_L$$

est lisse comme composé de morphismes lisses. L'anneau $B_L \otimes_L B_L$ étant lisse sur un corps, il est régulier. De plus B_L est de type fini sur $B_L \otimes_L B_L$. Par conséquent, B_L est de type fini sur un anneau régulier. Cela implique que B_L est un complexe parfait de $B_L \otimes_L B_L$-modules. En particulier B_L est alors de dimension projective finie sur $B_L \otimes_L B_L$, et d'après 4.1.11, il est de Tor-dimension finie sur $B_L \otimes_L B_L$.

Finalement, B est de Tor-dimension finie sur $B \otimes_A B$ donc de dimension projective finie. De plus, comme précédemment B est de type fini sur $B \otimes_A B$. Comme il s'agit d'anneaux noethériens, on en déduit que B est un complexe parfait de $B \otimes_A B$-modules.

Réciproquement, Supposons que u vérifie i, ii et iii. On va utiliser 4.1.14 et 4.1.13. Soit K un corps algébriquement clôt au dessous de A, soit $B_K := B \otimes_A K$. On montre que $u_K : K \to B_K$ est lisse. Soit $x : B_K \to K$ un morphisme d'anneaux. On a un diagramme cocartésien

$$\begin{tikzcd} B_K \otimes_K B_K \arrow[r, "Id\otimes_K x"] \arrow[d] & B_K \otimes_K K \simeq B_K \arrow[d, "x"] \\ B_K \arrow[r, "x"'] & K \end{tikzcd}$$

En effet, soit C un anneaux tel que le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} B_K \otimes_K B_K \arrow[r, "Id\otimes_K x"] \arrow[d] & B_K \otimes_K K \simeq B_K \arrow[d, "f"] \\ B_K \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Alors en composant par le morphisme $l_{B_K^{-1}} \circ Id \otimes u_K : B_K \to B_k \otimes_K B_K$, on obtient deux morphismes égaux de B_K dans C décrit par

$$f \circ m_B \circ (Id \otimes u_K) \circ r_{B_K^{-1}} = f$$

et

$$\begin{aligned} & f \circ \mu_{B_K} \circ (Id \otimes x) \circ (u \otimes Id) \circ l_{B_K^{-1}}) \\ = {} & f \circ \mu_{B_K} \circ (u \otimes Id) \circ (Id \otimes x) \circ l_{B_K^{-1}}) \\ = {} & f \circ u \circ \mu_{B_K} \circ (Id \otimes x) \circ l_{B_K^{-1}}) \\ = {} & f \circ u \circ x \end{aligned}$$

On en déduit donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B_K \otimes_K B_K \arrow[r, "Id\otimes_K x"] \arrow[d] & B_K \otimes_K K \simeq B_K \arrow[d, "x"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ B_K \arrow[r, "x"'] \arrow[drr, bend right, "f"'] & K \arrow[dr, "f\circ u"] & \\ & & C \end{tikzcd}$$

Pour l'unicité du morphisme $K \to C$, remarquons que si g est un autre morphisme faisant commuter ce diagramme, alors $g \circ x = f$ et $g \circ x \circ u_K = f \circ u_K$. Or $x \circ u_K = Id_K$. En effet, u_K définit une action de K sur B_K ($(a, b) \in K \otimes_{\mathbb{Z}} B_K \to a.b := u_K(a).b$) et x est en particulier un morphisme de K-module i.e. préserve cette action et vérifie $x(a.b) = a.x(b)$. On a donc $x \circ u_K(a) = x(a.1_{B_K}) = a.x(1_{B_K}) = a$.
Les complexes parfait étant stable par pushout, on en déduit que K est un complexe parfait de B_K-modules pour la structure de module induite par x. En particulier, K est de dimension projective finie sur B_K pour la structure induite par x. Le morphisme $K \to B_K$ étant plat, on en déduit qu'il est lisse. Cela étant vrai pour tout corps K au dessous de A, on en déduit que $A \to B$ est lisse.

♦

4.2 Une Définition de Morphisme Lisse Relatif

Definition 4.2.1. Un morphisme $A \to B$ in $sComm(\mathcal{C})$ est formellement lisse si le morphisme $B \otimes^h_A B \to B$ est hf.

Remarque 4.2.2. - Cette notion ne généralise pas la notion usuelle de morphisme formellement lisse. Seule la notion de morphisme lisse que nous donnerons plus loin sera une généralisation de la notion usuelle correspondante.

- Un morphisme $A \to B$ est formellement lisse si et seulement si $q_{cA}B \otimes_{q_cA} q_cB \to q_cB$ est hf. Où q_c, q_{cA} sont respectivement les foncteurs remplacement cofibrant de $sComm(\mathcal{C})$ et $sq_cA - alg$.
- Un morphisme $A \to B \in sComm(\mathcal{C})$ est formellement lisse si et seulement si le morphisme $q_cA \to q_{cA}B$ est formellement lisse.
- Soit $A \to B \in sComm(\mathcal{C})$. Si A est cofibrant dans $sComm(\mathcal{C})$ et B est cofibrant dans $sA - alg$ alors $A \to B$ est formellement lisse si et seulement si $B \otimes_A B \to B$ est hf.

Proposition 4.2.3. *Les morphismes formellement lisses sont stables par composition.*

Preuve

Soit $A \to B \to C \in sComm(\mathcal{C})$ la composition de deux morphismes formellement lisses. D'après les remarques précédentes, on peut supposer sans perte de généralité que A est cofibrant dans $sComm(\mathcal{C})$, B est cofibrant dans $sA - alg$ et C est cofibrant dans $sB - alg$. Les morphismes $B \coprod_A B \to B$ et $C \coprod_B C \to C$ sont hf. On montre que le diagramme commutatif suivant est cocartésien

$$\begin{tikzcd} C & \\ C \coprod_A C \arrow[u] \arrow[r] & C \coprod_B C \arrow[ul] \\ B \coprod_A B \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Soit D un monoïde tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} B \coprod_A B \arrow[r] \arrow[d] & C \coprod_A C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B \coprod_A B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

Or le morphisme $B \coprod_A B \to B$ est scindé, plus précisément la composition $B \to B \coprod_A B \to B$ donne Id_B. Le diagramme commutatif précédent induit donc un unique morphisme de $C \coprod_B C$ dans D. Le diagramme considéré ci-dessus était donc bien cocartésien.

En particulier, s'il est cofibrant pour la structure de Reedy, il sera homotopiquement cocartésien. Or les morphismes $B \coprod_A A \to B \coprod_A B$ et $B \coprod_A B \to C \coprod_A C$ sont image par le foncteur de Quillen à gauche *colim*, de cofibrations pour la structure de Reedy (cf [A] pour une description de ces cofibrations) et sont donc des cofibrations. Soit $B \coprod_A B$ et $C \coprod_A C$ sont cofibrants et le diagrame considéré est cofibrant pour la structure de Reedy. Finalement, le morphisme $C \coprod_A C \to C \coprod_B C$ est hf comme pushout d'un morphisme hf et $C \coprod_A C \to C$ est hf comme composition de morphismes hf.

♦

Proposition 4.2.4. *Les morphismes formellement lisses sont stables par pushout homotopique de monoïdes simpliciaux.*

Preuve

Soient $u : A \to B$ un morphisme formellement lisse et C une A-algèbre commutative. On peut supposer sans perte de généralité que A et C sont cofibrants dans $sComm(\mathcal{C})$ et que B est cofibrant dans $sA - alg$. Soient D le pushout homotopique $B \otimes_A C$ et $u' : B \to D$. Clairement

$$D \otimes_C D \simeq B \otimes_A C \otimes_C B \otimes_A C \simeq B \otimes_A D$$

Et le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & B \otimes_A B \arrow[r, "m_B"] \arrow[dl] \arrow[d, "Id \otimes_A u'"] & B \arrow[d, "u'"] \\ D \otimes_C D \arrow[r] & B \otimes_A D \arrow[r, "m_D"'] & D \end{tikzcd}$$

Et est cocartésien, car

$$B \otimes_{B \otimes_A B} B \otimes_A B \otimes_A C \simeq B \otimes_A C = D$$

De plus il est clairement cofibrant pour la structure de Reedy car $B \otimes_A -$ préserve les cofibrations. Finalement par stabilité des morphismes hf par pushout homotopique , le morphisme $C \to D$ est formellement lisse.

♦

Definition 4.2.5. Soient $A \in sComm(\mathcal{C})$, $M \in sA - mod$ et $f : A \to B \in sComm(\mathcal{C})$.

- ▷ Le module M est n-tronqué si et seulement si $Map_{s\mathcal{C}}(X, M)$ est n-tronqué dans $sEns$, $\forall\ X \in s\mathcal{C}$.
- ▷ La Tor-dimension de M dans $sA - mod$ est définie par

$$Tordim_A(M) = inf\{n\ tq\ M \otimes^h_A X\ est\ n + p - tronqué\ \forall\ X \in\ sA - mod\ p - tronqué\}$$

- ▷ La Tor-dimension du morphisme de monoïde simpliciaux f est définit comme étant la Tor-dimension du A-module B.

Lemme 4.2.6. *Les morphismes de Tor dimension nulle sont stable par composition et pushout homotopique.*

Preuve

Prouvons d'abord la stabilité par composition. Soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C\ \in sComm(\mathcal{C})$ la composé de deux morphismes de Tor-dimension nulle. Alors, soit M un A-module p-tronqué. On a des isomorphismes dans $Ho(sA - mod)$

$$C \otimes^h_A M \simeq C \otimes^h_B (B \otimes^h_A M).$$

Comme $Tordim_A(B) = 0$, il vient que $B \otimes^h_A M$ est p tronqué. Comme $Tordim_B(C) = 0$, on obtient finalement que $C \otimes^h_B (B \otimes^h_A M)$ est p-tronqué. Soit $Tordim_A(C) = 0$.

Prouvons maintenant la stabilité par pushout homotopique. Soient $f : A \to B$ et $g : A \to C$ deux morphismes de $sComm(\mathcal{C})$ avec f de tor -dimension nulle. Soit M un C-module p-tronqué. On a des isomorphismes dans $Ho(sA - mod)$

$$B \otimes^h_A C \otimes^h_C M \simeq B \otimes^h_A M$$

Comme $Tordim_A(B) = 0$, cet objet est p-tronqué. Soit $Tordim_C(B \otimes^h_A C) = 0$.

♦

Definition 4.2.7. Un morphisme $A \to B \in sComm(\mathcal{C})$ est lisse si il est formellement lisse, hfp et est de Tor-dimension nulle.

Proposition 4.2.8. *Les morphismes lisses sont stables par composition et pushout homotopique.*

Preuve

C'est un corollaire de 4.2.6, 4.2.3, 4.2.4, et du fait que les morphismes de présentation finie sont stable par ces opérations.

♦

4.3 Exemples de Morphismes Lisses

4.3.1 Dans $(\mathbb{Z}-mod, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$

On va tout d'abord s'intéresser au cas usuel pour montrer que la notion de morphisme lisse relatif est une généralisation de la notion de morphisme d'anneaux lisse. On va se référer pour cela au théorème 4.1.15.

Lemme 4.3.1. *[HAGII] Soit $u : A \to B$ un morphisme d'anneaux.*

- *Si u est hpf, alors B est de présentation finie sur A.*
- *Si u est lisse au sens des anneaux, alors il est hpf.*

Lemme 4.3.2. *Soit $u : A \to B$ un morphisme d'anneaux. L'anneau B est un complexe parfait de A-modules si et seulement si u est hf.*

Theoreme 4.3.3. *Soit $u : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Alors u est lisse au sens des anneaux si et seulement si il est lisse relativement à $\mathbb{Z}-mod$.*

Preuve

Supposons que u est lisse au sens des anneaux. D'après 4.3.1, il est hpf. Il est plat donc de Tor dimension nulle et B est un complexe parfait de $B \otimes_A B$-modules donc le morphisme $B \otimes_A B \to B$ est hf.

Réciproquement, si u est lisse relativement à $\mathbb{Z}-mod$. D'après 4.3.1, il est de présentation finie. Il est de Tor-dimension nulle donc plat. Et $B \otimes_A B \to B$ est hf donc B est un complexe parfait de $B \otimes_A B$-modules.

♦

4.3.2 Dans $(Ens, \times, *)$

Le plus difficile est de trouver des exemples de morphismes formellement lisse au sens relatif i.e. dont le morphisme diagonal est hf. La proposition 3.2.34 et la section 3.3 nous sont alors particulièrement utiles.

Lemme 4.3.4. *Notons $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Le morphisme naturel $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \in Ens$ est hf dans $\mathbb{N}^2 - Gpd$.*

Preuve

Soit $\mathcal{I}$ un diagramme filtrant et $F : \mathcal{I} \to \mathbb{N}^2 - Gpd$. Compte tenu de la structure de la catégorie homotopique, on veut montrer que l'on a un isomorphisme dans Gpd

$$Colim(\underline{Hom}^{\Delta^{\leq 1}}_{[\mathbb{N}^2-Gpd]}(\mathbb{N}, F(-))) \backsimeq \underline{Hom}^{\Delta^{\leq 1}}_{[\mathbb{N}^2-Gpd]}(\mathbb{N}, Hocolim(F))$$

En décrivant les colimites homotopiques à l'aide du lemme 3.3.12, on construit un foncteur

$$\varphi : Colim(\underline{Hom}^{\Delta^{\leq 1}}_{[\mathbb{N}^2-Gpd]}(\mathbb{N}, F(-))) \to \underline{Hom}^{\Delta^{\leq 1}}_{[\mathbb{N}^2-Gpd]}(\mathbb{N}, Hocolim(F))$$
$$\overline{H} \to \hat{H} := n \to \overline{H(n)}$$
$$\overline{\eta} : \overline{G} \to \overline{G}' \to \hat{\eta} := n \to \overline{\eta_n}$$

où il existe $j \in \mathcal{I}$ tel que $\overline{H}$ soit représenté dans la colimite par $H \in Hom_{[\mathbb{N}^2-Gpd]}(N, F(j))$ (qui est l'ensemble sous-jacent au Hom interne) et où il existe, comme dans 3.3.12 $j' \in \mathcal{I}$ tel que $\overline{G}$ et $\overline{G}'$ soient représentés par des éléments $G, G' \in Hom_{[\mathbb{N}^2-Gpd]}(\mathbb{N}, F(j'))$. Le morphisme $\overline{\eta}$ admet alors un représentant $\eta \in Hom_{F(k)^{\mathbb{N}}}(G, G')$ où k est au dessous de j' dans $\mathcal{I}$.

On commence par montrer que ce foncteur est bien défini. Sur les objets, si $\overline{H} = \overline{H}'$ alors il existe $i, j, k \in \mathcal{I}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "H"] & F(i) \arrow[r] & F(k) \\ \mathbb{N} \arrow[r, "H'"'] & F(j) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{H(n)} = \overline{H'(n)}$ dans $colim(F(-))$.

Sur les morphismes, si $\overline{\eta} = \overline{\eta}' : \overline{G} \to \overline{G'}$, alors en notant $\eta \in Hom_{F(k)^{\mathbb{N}}}(G, G')$ et $\eta' \in Hom_{F(k')^{\mathbb{N}}}(G, G')$ leurs représentants, il existe k'' et un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
F(k)^{\mathbb{N}} \arrow[dr] & & F(k')^{\mathbb{N}} \arrow[dl] \\
& F(k'')^{\mathbb{N}} &
\end{tikzcd}
$$

Et on a donc pour tout n, $\overline{\eta_n} = \overline{\eta_n}'$.

On montre maintenant que ce foncteur est surjectif. Un foncteur de $\mathbb{N}$ dans $Hocolim(F)$ est déterminé par $\mathbb{N}^2$-linéarité par l'image de $1 \in \mathbb{N}$. Soit alors $\hat{H} : \mathbb{N} \to Hocolim(F(-))$. Il existe $i \in \mathcal{I}$ et un représentant $H(1) \in F(i)$ de $\bar{H}(1)$. Cela induit un morphisme $H : \mathbb{N} \to F(i)$. Un antécédent de $\bar{H}$ est alors donné par la classe d'équivalence de ce morphisme dans $Colim(Hom_{[\mathbb{N}^2-Gpd]}(\mathbb{N}, F(-)))$.

Ce foncteur est fidèle. En effet, si $\overline{\eta}$ et $\overline{\eta}'$ sont deux morphismes qui ont même image. On choisi deux représentants η, η' associés au même indice $j \in \mathcal{I}$ tels que $\eta_1 = \eta_1'$. Alors, il vient par $\mathbb{N}^2$-linéarité que $\eta_n = \eta_n'$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique $\overline{\eta} = \overline{\eta}'$.

Ce foncteur est plein. Soit $\hat{\eta}$ une transformation naturelle entre deux foncteurs $\hat{G}$ et $\hat{G}'$ de $\mathbb{N}$ dans $Hocolim_{\mathcal{I}}(F(i))$. Alors on peut choisir des représentants associé au même indice, $\eta_1 : G(1) \to G'(1)$. Le morphisme η_1 ainsi construit s'étend par $\mathbb{N}^2$-linéarité en une transformation naturelle $\eta : G \to G'$. Les foncteurs G et G' et la transformation naturelle η représentent deux foncteurs $\overline{G}$, $\overline{G'}$ dans $Colim(\underline{Hom}(\mathbb{N}, F(-)))$ et une transformation naturelle $\overline{\eta}$ entre eux qui est un antécédent de $\hat{\eta}$.

♦

Corollaire 4.3.5. *Le morphisme $* \to \mathbb{N}$ est formellement lisse dans $Comm(Ens)$ au sens de 4.2.1.*

Preuve

Il faut montrer que le morphisme $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est hf dans $s\mathbb{N}^2 - mod$. On se réfère alors à la proposition 3.2.34 et au lemme précédent. Cela découle alors du fait que $\mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$ est hf dans $s\mathbb{Z}[X] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[X] - mod^{\mathbb{Z}-grad}$.

♦

THEOREME 4.3.6. *Le morphisme $* \to \mathbb{N}$ est lisse dans $Comm(Ens)$.*

Preuve

Ce morphisme est hpf. Sa diagonale est hf d'après le lemme précédent. Enfin il est clairement de Tor-Dimension nulle car les π_i commutent aux produits.

♦

4.3.3 D'autres Exemples

Par changement de base d'une catégorie $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ vers $(Ens, \times, *)$, on peut mettre en évidence des morphismes hpf et formellement lisses au sens relatifs. L'adjonction

$$
\mathcal{C} \underset{K_0}{\overset{Hom(1,-)}{\rightleftarrows}} Ens
$$

Où $K_0(E) = \coprod_E 1$, induit une adjonction sur les catégories simpliciales

$$
s\mathcal{C} \underset{sK_0}{\overset{\underline{Hom}(1,-)}{\rightleftarrows}} sEns
$$

Le foncteur $\underline{Hom}(1, -)$ est de Quillen à droite par construction de la structure de modèles. L'unité 1 est cofibrante. De plus, toujours par construction de la structure de modèles, le foncteur $\underline{Hom}_{s\mathcal{C}}(1, -)$ préserve les équivalences faibles. Il est donc faiblement équivalent au foncteur $Map_{s\mathcal{C}}(1, -)$. Enfin, il commute clairement aux colimites filtrantes car 1 est de présentation finie. Comme notre catégorie de base est compactement engendrée, les colimites homotopiques filtrantes sont faiblement équivalentes à des colimites simples. Il en résulte que 1 est homotopiquement de présentation finie dans $s\mathcal{C}$. Il en résulte aussi que sK_0 préserve les objets homotopiquement de présentation finie. ce résultat peut aussi s'écrire

Proposition 4.3.7. *Soit $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ un contexte relatif. Soit $u : A \to B$ un morphisme dans $sComm(Ens)$, alors si u est homotopiquement de présentation finie dans $sA - mod$, $sK_0(u)$ est homotopiquement de présentation finie dans $s(sK_0(A)) - mod$.*

Corollaire 4.3.8. *Soit* $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ *un contexte relatif. Soit* $u : A \to B$ *un morphisme dans sComm(Ens). Alors si u est formellement lisse (i.e. de diagonale hf),* $sK_0(u)$ *est formellement lisse.*

Preuve
L'image du morphisme $B \times_A^h B \to B$ est en effet le morphisme $sK_0 B \otimes^L_{sK_0(A)} sK_0(B) \to sK_0(B)$.

♦

On a un corollaire similaire pour les morphismes hpf dans la mesure ou les colimites filtrantes commutent avec le foncteur d'oubli des monoïdes commutatifs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ pour tout contexte relatif $\mathcal{C}$.

Corollaire 4.3.9. *Soit* $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$ *un contexte relatif. Soit* $u : A \to B$ *un morphisme dans sComm(Ens). Alors si u est hpf, il en est de même de* $sK_0(u)$.

Preuve
L'adjonction citée précédemment se restreint aux catégories d'algèbres. Les colimites homotopiques sont les mêmes, de même que les équivalences faibles. sK_0 préserve donc toujours les objets homotopiquement de présentation finie.

♦

On donne maintenant un exemple concret en remarquant que pour un contexte relatif $\mathcal{C}$, la droite affine de $sEns$, $* \to \mathbb{N}$ envoi par sK_0 sur la droite affine de $\mathcal{C}$, $1 \to 1[X] := \coprod_{\mathbb{N}} 1$.

Remarquons que dans le corollaire suivant, la Tor-dimension nulle se transmettant mal par changement de base, il nous ai nécessaire de la conserver dans les hypothèses. On s'attend tout de même à ce que la droite affine soit bien de Tod dimension nulle dans tout contexte ayant des propriétés géométriques raisonnable, ce qui est le cas des exemple connus pour le moment. Cependant, il est non-trivial de le prouver en toute généralité à partir d'un contexte géométrique tel que nous l'avons définit.

Corollaire 4.3.10. *Soit* $\mathcal{C}$ *un contexte relatif. Supposons que la droite affine de* $\mathcal{C}$ *est de* Tor*-dimension nulle, alors elle est lisse.*

En particulier, cela s'applique à $\mathcal{C} = \mathbb{N} - mod$. On a en effet, on a le lemme suivant

Lemme 4.3.11. *Soit* $A \to B$ *un morphisme de monoïdes commutatifs dans* $\mathbb{N} - mod$*, où B est libre sur A, alors B est de* Tor*-dimension nulle sur A.*

Preuve
Soit M un A-module. Comme B est libre, il existe un ensemble E tel que $B \simeq \coprod_E A$. On a

$$B \otimes_A^L M \simeq \coprod_E (QM)$$

où Q est un remplacement cofibrant pour $A - mod$. On obtient donc

$$B \otimes_A^L M \simeq Colim_{E' \ fini \subset E} \prod (QM)$$

Car les unions disjointes finies dans $N - mod = Comm(Ens)$ sont des produits finis d'ensembles. Finalement comme les foncteurs π_i commutent aux produits et aux colimites filtrantes, il vient que $B \otimes_A^L M$ est tronqué au même degrés que M soit que B est de Tor-dimension nulle sur A.

♦

Corollaire 4.3.12. *La droite affine est lisse dans le contexte* $\mathcal{C} = \mathbb{N} - mod$.

Preuve
Le monoïde libre associé à $\mathbb{N}$ est $\coprod_{\mathbb{N}} \mathbb{N}$. Il est libre sur $\mathbb{N}$. On applique le lemme précédent au morphisme $\mathbb{N} \to \coprod_{\mathbb{N}} \mathbb{N}$. On conclut à l'aide des corollaires précédents.

♦

Notations

- $Comm(\mathcal{C})$ - Catégorie des monoïdes commutatifs (unitaires) dans $\mathcal{C}$ - 9.
- $A-alg$ - Catégorie des A-algèbres, $A \in Comm(\mathcal{C})$ - 10.
- $\underline{Hom}$ - Hom enrichis sur $\mathcal{C}$ - 14.
- $\mathcal{C}_0$ - Sous catégorie génératrice de $\mathcal{C}$ - 22.
- $\mathcal{C}_0^F$ - Catégorie des éléments de $F \in Pr(\mathcal{C}_0)$ - 22.
- $K : Pr(\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C})$ - Adjoint à gauche de Yoneda - 22.
- $(-)_0 : \mathcal{C} \to Ens$ - Foncteur ensemble sous-jacent - 23.
- $(-)_k : \mathcal{C} \to Ens$, $k \in \mathcal{C}_0$ - Foncteurs ensemble sous-jacent - 23.
- $Sub(X)$ - Catégorie des sous objets de X dans $\mathcal{C}$ - 23.
- $Sub_f(Y)$ - Catégorie des sous objets de Y *contenant l'image de* $f : X \to Y \in \mathcal{C}$ - 24.
- $Im(f)$ - Objet image d'un morphisme f de $\mathcal{C}$ - 24.
- X_F - Sous objet de X engendré par la famille F d'éléments de X - 27.
- $lim_F(G)$ - Limite enrichie de G suivant F - 32.
- $Colim_F(G)$ - Colimite enrichie de G suivant F - 32.
- $\int_{K\in\mathcal{K}} T(K,K)$ - End de T - 32.
- $\int^{K\in\mathcal{K}} T(K,K)$ - Coend de T - 33.
- $Spec(A)$ - Spectre d'un monoïde de $\mathcal{C}$ - 35.
- $Aff_{\mathcal{C}}$ - Catégorie des schémas affines relatifs à $\mathcal{C}$ - 35.
- $Sh(Aff_{\mathcal{C}})$ - Catégorie des faisceaux sur $Aff_{\mathcal{C}}$ - 36.
- $Sch(\mathcal{C})$ - Catégorie des schémas relatifs à $\mathcal{C}$ - 36.
- Aff - Catégorie usuelle des $\mathbb{Z}$-schémas affines - 37.
- Sch - Catégorie usuelle des $\mathbb{Z}$-schémas - 37.
- $Hocolim$ - Colimite homotopique - 39.
- $I-cell$ - Ensemble des compositions transfinies de pushouts de morphismes dans I - 39.
- $I(A)$ - Poset des idéaux d'un monoïde A de $\mathcal{C}$ - 41.
- qB - Idéal de B associé à un idéal q de A pour $u : A \to B$ - 41.
- τ_f - Endomorphisme multiplication par un élément f de A - 41.
- $Elt(A)$ - Ensemble des éléments d'un monoïde commutatif A - 41.
- $\oslash$ - Multiplication interne de $Elt(A)$, $A \in Comm(\mathcal{C})$ - 41.
- $S^{-1}A$ - Localisation de $A \in Comm(\mathcal{C})$ par un système multiplicatif S d'éléments de A_0 - 44.
- A_f è Localisation de $A \in Comm(\mathcal{C})$ par un élément $f \in A_0$ - 44.
- $\mathcal{B}A$ - $\mathcal{C}$-Catégorie associée au monoïde $A \in Comm(\mathcal{C})$ - 3.
- $f^{-1}q$ - Plus grand idéal de A qui s'envoit sur q par multiplication par f - 50.
- $LocA$ - Poset des localisations de la $\mathcal{C}$-catégorie $A-mod$, $A \in Comm(\mathcal{C})$ - 51.
- $GabA$ - Poset des filtres de Gabriels de $A \in Comm(\mathcal{C})$ - 51.
- G_f - Filtre de Gabriel associé à l'ouvert Zariski A_f de $A \in Comm(\mathcal{C})$ - 52.
- G_S - Filtre de Gabriel associé à l'ouvert Zariski formel $S^{-1}A$ de $A \in Comm(\mathcal{C})$ - 52.
- $q.q'$ - Produit de l'idéal q et de l'idéal q' - 53.
- G_q - Filtre de Gabriel engendré par l'idéal q - 55.

Bibliographie

[A] V. Angeltveit - Enriched Reedy Categories - *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 136, nÂ°7, july 2008, pp 2323-2332.

[B] Barr - Exact categories - *Springer, Lecture notes in mathematics 236,* pp1-120, 1971.

[B] K. S. Brown - Cohomology of groups - Graduate texts in mathematics, 87 - *Springer-Verlag, New York-Berlin , 1982.* x+308 pp.

[Bc] F. Borceux - Handbook of Categorical Algebra II - *Cambridge University Press* 1994 - 443 pp.

[BQ] F. Borceux, C. Quinteiro - A theory of enriched sheaves - *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégorique* volume XXXVII-2 pp 145-162.

[C] M. Chadeyras - Essai d'une théorie noethérienne homogène pour les anneaux dont la graduation est aussi générale que possible - *Mémoire de la société mathématique de France,* 22, 1970, pp 3-143.

[CC] A. Connes, C. Consani - On the Notion of Geometry Over $\mathbb{F}_1$ - prépublication math.NT/0809.2926.

[D] A. Deitmar - Schemes over $\mathbb{F}_1$ - pré-publication math.NT/0404185.

[D] A. Deitmar - $\mathbb{F}_1$-scheme and Toric Varieties - Pré-publication math.NT/0608179.

[G] P. Gabriel - Des Catégories abéliennes - *Bulletin de la société mathématique de France,* 90, 1962, pp 323-448.

[EGAIV] A. Grothendieck - Eléments de géométrie algébrique IV - étude locale des schémas et des morphismes de schémas, partie IV - *Inst. Hautes études sci. Publ. Math.*, N°32, 1967, 361pp.

[SGAI] A. Grothendieck - Revêtement étale et groupe fondamental - Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960-61 - Lecture notes in math., 224, Springer, Berlin. Document mathématiques (Paris), 3. *Société mathématique de France, Paris*, 2003 xviii+327pp.

[SGAIV] M. Artin, A.Grothendieck et J.L. Verdier - Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos - Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963-64 (SGA4) - lecture notes in mathematics 269 - *Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.* xix+525pp.

[Hol] S. Hollander - A Homotopy Theory For Stacks - *Israël Journal of Mathematics* 163, 2008 pp93-124

[H] M. Hovey - Model Categories - Mathematical Surveys and Monographs, 63 - *American Mathematical Society, Providence, RI,* 1999. xii+209pp.

[GJ] P. Goerss and J.F. Jardine - *Simplicial Homotopy Theory.* Progr. Math. 174, birkauser, 1999.

[J] J.F. Jardine - Diagrams and Torsors - *K-theory* 37 (2006) n°3 pp 291-309.

[FK] F. Kato - Log Smooth deformation theory - *Tôhoku Math. Journal 48*, 1996, pp 317-354.

[KK] K. Kato - Logarithmic Structures of Fontaine-Illusie, in Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory - J.-I. Igusa ed. - Johns Hopkins Univ. 1988, pp 191-224.

[KE] W.F.Keighen - Differential Schemes and Premodels of Differential Fields - *J. Algebra 79*, 1982, n°1, pp37-50.

[K] G.M. Kelly - Basic concepts of enriched category theory - London Mathematical Society Lecture Note Series, 64 - *Cambridge University Press, Cambridge-New York,* 1982. 285pp. Also available in Reprints in theory and applications of categories, No.10, 2005.

[KD] G.M.Kelly, B.J. Day - Enriched functors categories - 1969 *Reports of the Midwest Category Seminar, III.* pp178-191.

[McL] S. Mc-Lane- Categories for the working mathematician - Graduate text in mathematics, 5 - *Springer-Verlag, New York-Berlin , 1971.* ix+262pp.

[N] D.T. Nguyên - $\otimes$-strict AU Categories - *Acta Matematica Vietnamica* 1980 Tome 5 pp 182-194.

[Q] D. Quillen - On the (Co)-homology of Commutative Rings - *Applications of categorical Algebra, Proc. of the Symposium in Pure Mathematics*, 1968, New york - AMS, 1970.

[R] C. Rezk - Every Homotopy Theory of Simplicial Algebras Admits a Proper Model - prepublication math/0003065.

[S] C. Soulé - Les variétés sur le corps à un élément - *Mosc. Math. J.*, 4, 2004, n°1 pp217-244, 312.

[Sp] M. Spivak - A comprehensive Introduction to Differential Geometry - *Publish or Perish, Inc.,* Wilmington, Del, 1979, xiv+668pp (five volume set).

[T1] B. Toen - Champs Affines - *Selecta mathematica, New Series*, 12, 2006, pp 39-135.

[TV] B. Toën, M. Vaquie - Au dessous de Spec($\mathbb{Z}$) - pré-publication math/0509684.

[HAGI] B. Toen, G. Vezzozi - Homotopical Algebraic Geometry I: Topos Theory - *Adv. Math.* 193 (2005) n°2 pp 257-372.

[HAGII] B. Toen, G. Vezzozi - Homotopical Algebraic Geometry II: Geometric Stacks and Applications - *Memoirs of the American Mathematical Society* - Vol 193, 2008, 230pp.

[T2] B. Toën - Cours de Master2, non publié - http://www.math.univ-toulouse.fr/~toen/cours5.pdf.