Didaktik der Mathematik

18. Jahrgang 1990

Bayerischer Schulbuch-Verlag · München

Anschrift der Redaktion:
StD Franz Hager, Blütenstr. 9, 8039 Puchheim,
Telefon (089) 80 30 43

Bezugsbedingungen:
Jahresabonnement 4 Hefte DM 56,–,
Einzelheft DM 15,60 zuzüglich Versandkosten.
Postscheckkonto München 93370–805
Bankkonto: Bayer. Vereinsbank München 81 154
»Didaktik der Mathematik« erscheint einmal vierteljährlich. Für unverlangt eingesandte Manuskripte wird keine Gewähr übernommen. Nachdrucke innerhalb der gesetzlichen Frist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

Verlag und Anzeigenverwaltung:
Bayerischer Schulbuch-Verlag, Postfach 190253
Hubertusstraße 4, 8000 München 19,
Telefon (089) 17 40 67–69
Zur Zeit ist Anzeigenpreisliste Nr. 3 vom 1. 1. 1983 gültig.
Satz: Fotosatz W. Tutte, Salzweg
Druck: E. Rieder, Schrobenhausen

Didaktik der Mathematik wird laufend im PÄDAGOGISCHEN JAHRESBERICHT (Verlag für pädagogische Dokumentation, Duisburg) bibliografisch nachgewiesen und regelmäßig für ZDM bzw. die Datenbank MATHDI ausgewertet.

ISSN 0343-5334

Inhaltsverzeichnis

Fritz Schmidt

200 Jahre französische Revolution Problem und Satz von Napoleon mit Variationen

Im Verlauf der französischen Revolution übten einige bedeutende Mathematiker auch wichtige politische Funktionen aus. Für die Schulmathematik interessant sind zwei Themenbereiche, die direkt mit Napoleon in Verbindung gebracht werden.

„Wollen Sie mir einreden, daß ein ehemaliger Bischof weniger pflichteifrig ist als ein ehemaliger Mathematikprofessor?" läßt Annemarie Selinko in ihrem berühmten Roman *Désirée* den Marschall Bernadotte (1764–1844, später unter dem Namen Karl XIV. Johann König von Schweden) zum Außenminister Talleyrand (1754–1838) sagen ([25, S. 319]). Der hier als ehemaliger Mathematikprofessor Apostrophierte ist derjenige Mathematiker, der während der Revolution und der anschließenden Kaiserzeit den am längsten währenden politischen Einfluß ausübte und in seiner politischen Funktion am bekanntesten ist: der Polizeiminister Joseph Fouché (1759–1820). Von seinen mathematischen Leistungen weiß man allerdings wenig. Stefan Zweig bemerkt in seiner Fouché-Biographie nur ([29, S. 7]): der Priesterlehrer Joseph wird gerne gesehen, weil er von den neuen Errungenschaften der Physik viel zu berichten weiß. – Eine ganze Reihe namhafter Mathematiker betätigte sich in dieser Zeit politisch; im großen ganzen ist jedoch ihre politische Bedeutung umgekehrt proportional der mathematischen. Einige Karrieren werden hier kurz skizziert. Ausführliche Darstellungen findet man in [3] und [28]; noch detaillierter informiert [10].

Am höchsten stieg Lazare Nicolas Marguérite Carnot (1753–1823), auf den in dieser Zeitschrift im Zusammenhang mit der Tetraedergeometrie schon einmal hingewiesen wurde ([8, S. 33]). Er gilt als Schöpfer der Massenheere der französischen Revolution, war 1795–1797 einer der fünf Direktoren der Republik, vom Mai 1797 an sogar Präsident des Direktoriums. Er stürzte beim Staatsstreich in der Nacht vom 3. zum 4. September 1797 und verlor dabei sowohl seine politischen als auch seine wissenschaftlichen Funktionen. Sein Nachfolger im Direktorium wurde der Dichter Nicolas François de Neufchâteau (1750–1828); Carnots Sitz im *Institut national*, das die aufgelösten wissenschaftlichen Akademien ersetzte, erhielt der General Napoleon Bonaparte. Rehabilitiert diente Carnot dem Konsul Bonaparte im Jahre 1800 kurze Zeit als Kriegsminister. Weil er dessen ehrgeizige Pläne ablehnte, zog er sich aus der Politik zurück und beschäftigte sich mit Mathematik. Während der 100 Tage war er Napoleons Innenminister und nach dessen Sturz Mitglied der Provisorischen Regierung. Von den zurückgekehrten Bourbonen verbannt, starb er im Exil in Magdeburg. Mit Robespierre kam Carnot gut aus; deswegen verlangte der radikale Konventsabgeordnete Legendre auch seinen Kopf, allerdings vergeblich. Dieser Metzgermeister Louis Legendre (1755–1797) mit dem Beinamen „Donaubauer", der auf seinen bei aller demagogischen Begabung unmöglichen Dialekt hinweist, darf nicht mit Adrien-Marie Legendre (1752–1833) verwechselt werden. Letzterer war ausnahmsweise ein politisch unbedeutender Mathematiker; er führte im Jahre 1787 die berühmte Gradvermessung von Dünkirchen nach Boulogne durch und ist für den Mathematik-Unterricht vor allem wegen seiner Überlegungen zum Parallelenaxiom von Bedeutung, die er in den verschiedenen Auflagen seines Lehrbuches der Elementargeometrie anstellt ([18]). Der Lehrer Carnots und Erfinder der Mehrtafelprojektion in der Darstellenden Geometrie, Gaspard Monge (1746–1818), war 1792 Marine-Minister und mußte das Todesurteil an Ludwig XVI. vollstrecken lassen. Seine Entdeckung, die ihm um 1768 herum gelang, bildete zunächst ein militärisches Geheimnis; er durfte sie erst 1794 in Vorlesungen behandeln. Obwohl im Herzen Republikaner, war er doch ein großer Verehrer Napoleons, der ihn nach Ägypten mitnahm und auch sonst sehr auszeichnete. Nach der Restauration verlor er seine Ämter und starb verarmt; seinen Schülern von der École Polytechnique wurde die Teilnahme an der Beerdigung verboten, sie legten am Tag darauf einen Kranz an seinem Grab nieder.

Zu den bedeutendsten Mathematikern dieser Zeit ist wohl Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) zu rechnen. Er stand bei Ausbruch der Revolution schon in fortgeschrittenem Alter und brachte es nur zum Mitglied der *Belohnungskommission für nützliche Erfindungen* und zum Mitvorsteher der Münze. Viele seiner mathematischen Leistungen sind im Schulunterricht unzugänglich; dazu zählt jedoch nicht die Tetraedergeometrie, über die er die erste systematische Abhandlung verfaßte ([17]).

Vom Laplace-Würfel her den Schülern vertraut ist Pierre Simon Laplace (1749–1827). Er unterrichtete und prüfte an der École Militaire einen 16jährigen Kadetten namens Napoleone Buonaparte, der Konsul Napoleon Bonaparte ernannte ihn 1799 zum Innenminister; in diesem Amt war er ein totaler Versager und wurde schon nach sechs Wochen durch Napoleons Bruder Lucien ersetzt. In seinen Lebenserinnerungen schrieb Napoleon „*il ... portait enfin l'esprit des infiniments petits dans l'administration*" (er trug schließlich den Geist des Unendlich-Kleinen in die Verwaltung). Laplace blieb weiter ein Verehrer Napoleons, konnte aber auch nach der Restauration seine Stellung behaupten, sogar verbessern, was ihm den Vorwurf der politischen Charakterlosigkeit eintrug. Er starb hochgeehrt, von den Bourbonen zum Marquis und Pair von Frankreich erhoben; an seinem Begräbnis nahm auch Alexander von Humboldt teil.

Ob es auf den Einfluß des Lehrers Laplace zurückzuführen ist, ist schwer zu sagen; jedenfalls zeigte Napoleon (1769–1821) Begabung und zeitlebens Interesse für die Mathematik und die Naturwissenschaften; J. Fischer hat dieses sorgfältig untersucht und ist dabei zu erstaunlichen Ergebnissen gekommen ([10]), auf die sich die nachfolgende Darstellung stützt. Allgemein ist bekannt, daß Napoleon nicht nur eroberte, sondern sich auch um eine moderne staatliche Organisation seiner Eroberungen bemühte. Dazu gehörte für ihn auch das kulturelle und wissenschaftliche Leben. Schon bei seinem ersten Italien-Feldzug dachte er über einen dort zu schaffenden Staat nach und holte sich Künstler und Wissenschaftler ins Heerlager, unter anderen den Dichter, Altphilologen und Mathematiker Lorenzo Mascheroni (1750–1800), dessen Name heute vor allem in der *Euler-Mascheronischen Konstante*

$$C = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

der Analysis fortlebt. In Napoleons Hauptquartier im Schlößchen Mombello bei Monza (Provinz Mailand) überreichte Mascheroni dem – in seinen Augen – Befreier Italiens sein neuestes Buch ([20]), versehen mit einer Widmung „A Bonaparte l'Italico". Darin bewies

Mascheroni, daß alle mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen mit dem Zirkel allein ausgeführt werden können (natürlich können dabei keine Geraden gezeichnet werden, sie sind durch zwei ihrer Punkte bestimmt und der Schnittpunkt zweier so gegebener Geraden läßt sich konstruieren). Dies war eine eigenständige Leistung Mascheronis, obwohl der Däne Georg Mohr (1640–1697) schon über 120 Jahre vorher dasselbe herausgefunden hatte ([21]); Mohrs Buch blieb weithin unbekannt und wurde erst 1928 durch J. Hjelmslev (1873–1950) einer weiteren mathematischen Öffentlichkeit zugänglich gemacht. – Napoleon hat sich jedenfalls sofort mit Mascheronis Arbeit vertraut gemacht, entweder durch eigene Lektüre oder durch mündliche Erklärungen Mascheronis. Zurück in Paris, glänzte er in den Salons der feinen Gesellschaft mit seinem neuerworbenen Wissen. In der Pariser Tageszeitung, dem Moniteur, wurde zum Teil ausführlich über solche Ereignisse berichtet, so auch über ein Essen bei dem neuen Direktor François de Neufchâteau. Dort kam Napoleon in ein Gespräch mit Lagrange und Laplace; diese hatten noch nichts von Mascheronis Konstruktionen gehört, von denen Napoleon einige sofort skizzierte. Laplace drückte seine Überraschung mit folgenden Worten aus: „Général, nous nous attendions à recevoir tout de vous, excepté de leçons de mathématiques“ (General, wir haben alles von Ihnen erwartet, nur keine Mathematikvorlesung). Der Tenor ist durchaus bewundernd, nicht wie Coxeter und Greitzer schreiben, Laplace hätte sich eine mathematische Belehrung durch Napoleon verbeten ([7, S. 63, bzw. S. 68]): „… The last thing we want from you, general, is a lesson in geometry“ (in der deutschen Ausgabe: „Was wir am wenigsten von Ihnen brauchen, mon Général, ist eine Geometrielektion!“). Welche Konstruktionen Napoleon hierbei wirklich behandelte, läßt sich nicht mehr genau feststellen; jedoch wird mindestens seit 1815 die erste Aufgabe aus Mascheronis Buch mit Napoleon in Verbindung gebracht, als ([20, S. 14f]).

Problem von Napoleon: Eine gegebene Kreislinie k mit gegebenem Mittelpunkt M ist allein mit Hilfe eines Zirkels in vier gleiche Teile zu teilen.

Die Lösung dieser Aufgabe ist sehr einfach und läßt sich im Unterricht der 9. Jahrgangsstufe im Anschluß an den Satz des Pythagoras behandeln (siehe Figur 1).

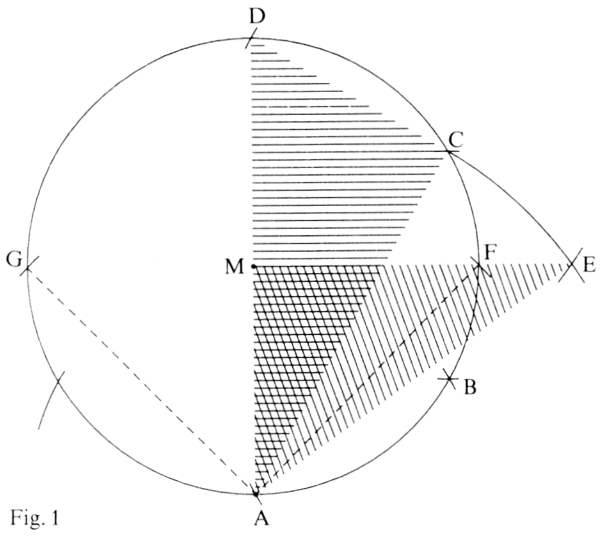

Fig. 1

Man wählt auf der Kreislinie einen beliebigen Punkt A und beschreibt um A den Kreis mit dem Radius $r = \overline{AM}$. Dieser Kreis schneidet den gegebenen Kreis k in zwei Punkten, von denen einer gewählt und mit B bezeichnet wird. Nun beschreibt man um B den Kreis mit Radius r, der k in A und einem weiteren Punkt schneidet; dieser wird mit C bezeichnet. Als nächstes folgt ein Kreis um C, ebenfalls mit dem Radius r; er schneidet k in B und einem weiteren Punkt D. Nun beschreibt man um A und D die Kreise mit dem Radius $\overline{AC}$. Diese beiden Kreise schneiden sich auch in zwei Punkten, von den einer gewählt und mit E bezeichnet wird. Als letzten Schritt beschreibt man den Kreis um A mit dem Radius $\overline{EM}$; er schneidet k in zwei Punkten F und G.

Behauptung: Die Punkte A, F, D und G teilen die gegebene Kreislinie in vier gleiche Teile.

Beweis: Ein Kreis wird durch zwei zueinander senkrecht stehende Durchmesser in vier gleiche Teile geteilt. Aus dem Satz des Pythagoras ergibt sich dann für den Abstand zweier benachbarter Teilpunkte der Wert $r\sqrt{2}$. Wählt man umgekehrt auf der Kreislinie zwei Punkte im Abstand $r\sqrt{2}$, so stehen die zugehörigen Durchmesser aufeinander senkrecht. Es genügt deshalb $(\overline{AF} = \overline{AG}) = \overline{EM} = r\sqrt{2}$ zu zeigen. Dazu überlegt man: Die Dreiecke AMB, BMC und CMD sind gleichseitig, haben also alle drei an der Ecke M einen Winkel von 60°. Daraus folgt $\sphericalangle AMD = 180^\circ$, das heißt, die Strecke [AD] ist ein Durchmesser von k. Damit ist k schon in zwei gleiche Teile geteilt und umgekehrt ist k der Thaleskreis über [AD]. Also ist das Dreieck ADC rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{AD} = 2r$ und einer Kathete $\overline{CD} = r$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt nun für die andere Kathete $\overline{AC} = r\sqrt{3}$. Also hat das gleichschenklige Dreieck ADE die Schenkel $\overline{AE} = \overline{DE} = r\sqrt{3}$ und Basis $\overline{AD} = 2r$. Da M der Mittelpunkt der Basis ist, ist die Strecke [ME] die Höhe zur Basis. Also ist das Dreieck AME rechtwinklig mit der Hypotenuse $\overline{AE} = r\sqrt{3}$ und einer Kathete $\overline{AM} = r$. Nun liefert Satz des Pythagoras für die andere Kathete $\overline{EM} = r\sqrt{2}$, wie verlangt. □

Eine Variation erhält diese Aufgabe durch den Verzicht auf die Vorgabe des Mittelpunktes. Dann hat man eben zunächst den Mittelpunkt zu konstruieren, was in Mascheronis Buch sehr viel später behandelt wird; eine genaue Diskussion dieses Problems wurde vor kurzem auch in dieser Zeitschrift gegeben ([26]). Es sei noch darauf hingewiesen, daß in neuerer Literatur manchmal auch diese Auffindung des verlorengegangenen Mittelpunktes mit dem Zirkel allein als *Problem von Napoleon* bezeichnet wird, wofür es eigentlich keine historische Rechtfertigung gibt.

Ganz ungeklärt ist die Zuweisung zu Napoleon bei dem

Satz von Napoleon: Errichtet man auf den Seiten eines beliebigen Dreiecks – nach außen – gleichseitige Dreiecke, so bilden die Mittelpunkte der neuen Dreiecke wieder ein gleichseitiges Dreieck (unabhängig von der Form des Ausgangsdreiecks).

Dabei wird unter dem *Mittelpunkt* eines gleichseitigen Dreiecks natürlich der Punkt verstanden, der gleichzeitig Umkreismittelpunkt, Inkreismittelpunkt, Höhenschnittpunkt und Schwerpunkt des Dreiecks ist. Die Behauptung dieses Satzes bleibt auch richtig, wenn man die gleichseitigen Dreiecke *nach innen* errichtet. Inhaltlich findet man die Aussage und ihren Beweis an vielen Stellen der Literatur, von vielen Autoren „neuentdeckt". Als frühesten Beleg gibt Joachim Fischer ([10]) ein italienisches Schulbuch aus dem Jahr 1843 an ([27]), die Zuweisung zu Napoleon findet er aber zum ersten Mal 1912 (!) in der 18. Auflage eines anderen italienischen Schulbuches ([9]). Dessen Autor, Aureliano Faifofer, formuliert den Satz und bemerkt anschließend: „*Teorema proposto per la dimostrazione da Napoleone a Lagrange*" (Satz, zum Beweis von Napoleon an Lagrange gegeben). Von den heute bekannten Beweisen ist der einfachste wohl der

Beweis von Kurt Schütte (bisher unveröffentlicht): Die Ecken des gegebenen Dreiecks seien A, B, C, die Spitzen der aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke A′, B′, C′, ihre Mittelpunkte A″, B″, C″ (Figur 2). Ferner seien die Seiten des Dreiecks ABC in üblicher Weise mit a, b, c bezeichnet.

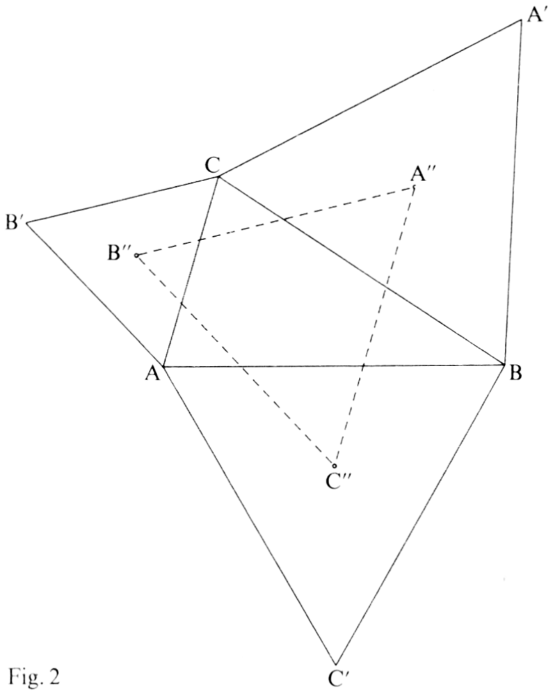

Fig. 2

Man beachte nun, daß die Strecke [AB″] einen Radius des Umkreises des gleichseitigen Dreiecks AB′C mit der Seitenlänge b bildet, also gilt $\overline{AB''} = b/\sqrt{3}$; entsprechend findet man $\overline{AC''} = c/\sqrt{3}$. Man drehe nun das Dreieck AC″B″ um 30° im Uhrzeigersinn um die Ecke A und strecke das erhaltene Dreieck von A aus mit dem Faktor $\sqrt{3}$. Als Bild erhält man das Dreieck AC′C (Figur 3) und insbesondere $\overline{C''B''} = \overline{C'C}/\sqrt{3}$.

Unterwirft man analog das Dreieck BC″A″ einer Drehstreckung mit Zentrum A und Faktor $\sqrt{3}$ um 30° gegen den Uhrzeigersinn, so erhält man entsprechend das Dreieck BC′C und

$$\overline{C''A''} = \frac{\overline{C'C}}{\sqrt{3}}.$$

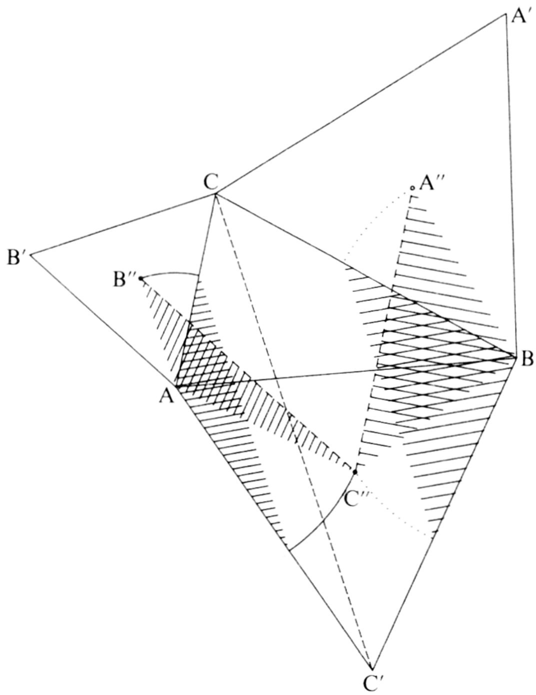

Fig. 3

Damit folgt $\overline{C''B''} = \overline{C''A''}$ und in gleicher Weise ergibt sich $\overline{C''A''} = \overline{B''A''}$; also ist das Dreieck A″B″C″ gleichseitig. □

1955 hat Adriano Barlotti den Satz von Napoleon verallgemeinert ([1]), zunächst zum

Satz von Napoleon-Barlotti: Errichtet man auf den Seiten eines affin-regulären n-Ecks nach außen (oder – auf allen Seiten – nach innen) reguläre n-Ecke, so bilden die Mittelpunkte der errichteten n-Ecke immer ein reguläres n-Eck.

Dabei heißt ein n-Eck *affin-regulär*, wenn es ein affines Bild eines regulären n-Eckes, das heißt eines n-Eckes mit lauter gleichen Seiten und lauter gleichen Winkeln ist. Jedes Dreieck ist affin-regulär; deswegen ist der Satz von Napoleon ein Spezialfall des Satzes von Napoleon-Barlotti. Ein affin-reguläres 4-Eck ist ein Parallelogramm.

Einen schulgemäßen Beweis des Satzes von Napoleon-Barlotti hat E. Schmidt angegeben ([22]); etwas eleganter, aber abstrakter, ist die Argumentation von J. Chris Fisher, Dieter Ruoff und J. Shilleto ([11]). Für Lehrer in Nordamerika hat Leon Gerber einen möglichen Beweis aufgeschrieben ([12]). Der Fall n = 4, in dem man von einem Parallelogramm ausgeht, ist einfacher als der Satz von Napoleon selbst; man erkennt ihn – mit einer Formulierung von Johannes Kratz – auf einen Blick (Figur 4).

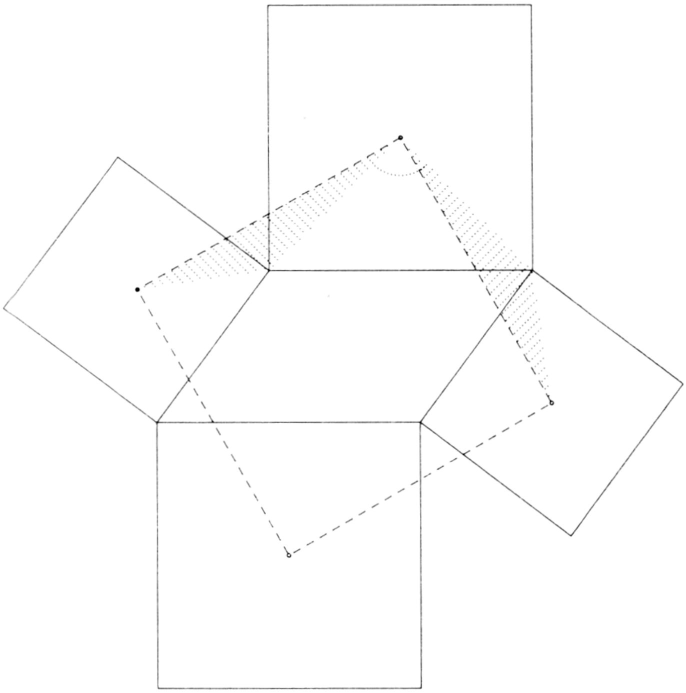

Fig. 4

Man kann sich nun fragen, was aus diesem Satz beim Grenzübergang $n \to \infty$ wird. Aus dem regulären n-Eck wird dann ein Kreis; als affines Bild erhält man eine Ellipse. Dafür hat Barlotti folgenden Sachverhalt festgestellt ([2]):

Satz: Gegeben sei eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. In jedem Punkt P dieser Ellipse sei auf der äußeren Normalen der Punkt P′ so bestimmt, daß $\overline{PP'}$ gleich der halben Länge des zu dem durch P gehenden Durchmessers konjugierten Durchmessers ist. Dann ist der geometrische Ort für die Punkte P′ der Kreis um den Mittelpunkt der Ellipse mit dem Radius $a + b$ (Figur 5). Geht man statt nach außen dieselbe Entfernung nach innen, so erhält man als geometrischen Ort einen Kreis mit dem Radius $|a - b|$.

Dabei ist unter der *äußeren Normale* die von P ausgehende Halbgerade zu verstehen, die senkrecht auf der Tangente durch P steht und keinen Punkt mit dem Inneren der Ellipse gemeinsam hat. Da auf einen allgemein zugänglichen Beweis hier nicht verwiesen werden kann (mangelnder Kenntnisstand des Autors), sei ein solcher hier trotz seiner Einfachheit skizziert:

Beweisgang: Zwei Durchmesser einer Ellipse heißen bekanntlich *konjugiert zueinander*, wenn sie unter einer affinen Abbildung, die die Ellipse in einen Kreis überführt, in zueinander senkrechte Kreisdurchmesser abgebildet werden. Es sei ein kartesisches Koordinatensystem so gewählt, daß die gegebene Ellipse durch die Gleichung

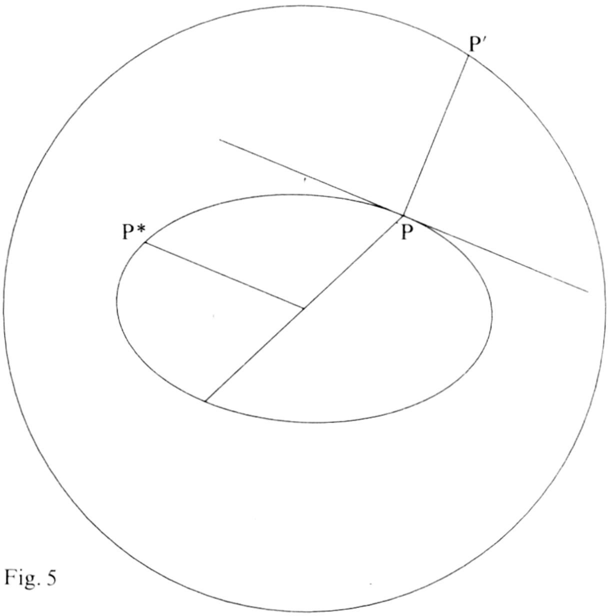

Fig. 5

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dargestellt wird. Ferner sei $P = (x_0, y_0)$. Die affine Abbildung

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$$

führt die gegebene Ellipse in den Einheitskreis über. Daraus entnimmt man, daß der zu dem durch P gehenden Durchmesser konjugierte Durchmesser durch den Punkt $P^* = (-ay_0/b, bx_0/a)$ geht. Der Vektor $\overrightarrow{PP'}$ entsteht aus dem Ortsvektor von P^* durch Drehung um 90° im Uhrzeigersinn[1]. Daher ist

$$P' = \left(\frac{a+b}{a} x_0, \frac{a+b}{b} y_0\right)$$

und analog

$$P'' = \left(\frac{a-b}{a} x_0, \frac{b-a}{b} y_0\right).$$

Beide Punkte liegen offensichtlich auf den angegebenen Kreisen. □

Nach dem Ausflug ins Unendliche zurück zum ursprünglichen Satz von Napoleon. In seinem Schulbuch bietet Johannes Kratz einen alternativen Beweis an ([16, S. 79]). Dieser hat zwar den Nachteil, daß er Fallunterscheidungen benötigt, aber er kommt ohne den

1 Für dieses Argument bedanke ich mich bei dem Referenten, der es vorgeschlagen hat.

Satz von Pythagoras aus und kann deshalb schon im 8. Schuljahr geführt werden. Darüberhinaus bringt er noch einen weiteren interessanten Gesichtspunkt ins Spiel. Kratz zeigt zunächst den folgenden

Satz: Errichtet man auf den Seiten eines beliebigen Dreiecks – nach außen – gleichseitige Dreiecke, so schneiden sich die drei Umkreise dieser gleichseitigen Dreiecke in einem Punkt.

Die Behauptung gilt auch, wenn die gleichseitigen Dreiecke nach innen errichtet werden; dabei erhält man aber im allgemeinen einen anderen Punkt. Beide Punkte zusammen sind sogenannte *Zwillingspunkte*, die *isogonischen* Punkte des Dreiecks ([4, S. 1218]). Eine andere Verallgemeinerung dieses Sachverhalts geben Coxeter und Greitzer an ([7, Satz 3.31, S. 65].

Der *erste* isogonische Punkt, der sich aus den nach außen errichteten Dreiecken ergibt, liegt im Inneren des Dreiecks, wenn kein Winkel größer-gleich 120° ist, außerhalb, wenn ein Winkel größer als 120° ist, und fällt auf eine Ecke, wenn dort ein Winkel von 120° anliegt. Er wird auch als *Fermatscher* oder *Torricellischer* Punkt des Dreiecks bezeichnet. Der Schüler und Nachfolger Galileis in Florenz, Evangelista Torricelli (1608–1647), fand ihn im Zusammenhang mit der von dem königlichen Rat am Parlament von Toulouse, Pierre Fermat (1601–1655), gestellten

Aufgabe: Gesucht ist der Punkt der Ebene, für den die Summe der Abstände von den Ecken eines in der Ebene gelegene Dreiecks minimal wird.

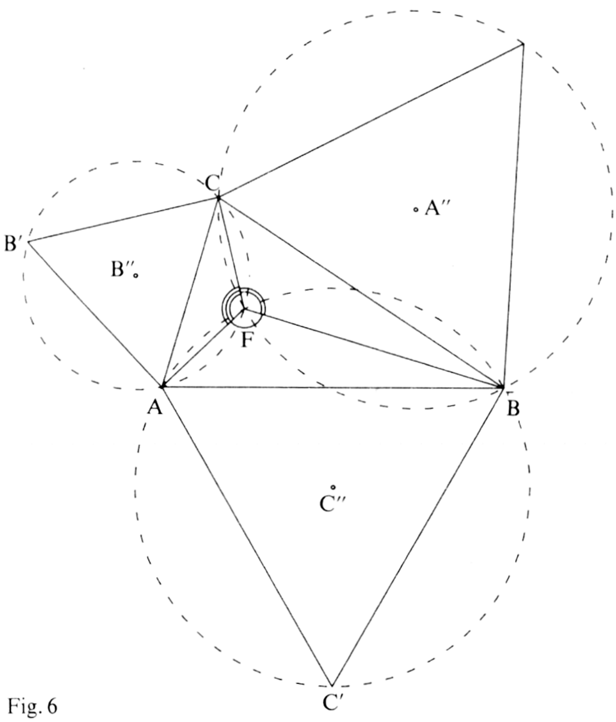

Fig. 6

(Natürlich handelt es sich trotz der etwas verfremdenden Bezeichnung um „unseren" Fermat, den Verantwortlichen für das bis heute ungelösten Fermatproblem der Zahlentheorie.)

Besitzt das gegebene Dreieck einen Winkel größer-gleich 120°, so hat die zugehörige Ecke die geforderte Eigenschaft. Andernfalls ist dies der Fermatsche Punkt. Dafür hat der Altmeister der Mathematik-Geschichte, Joseph Ehrenfried Hofmann (1900–1973), eine schulgerechte Begründung gegeben ([13], [6, S. 38]): Es sei ABC ein positiv orientiertes Dreieck mit keinem Winkel größer-gleich 120°; die Punkte A′, B′ und C′ seien wie früher die Spitzen der aufgesetzten gleichseitigen Dreiecke und F sei der Fermatsche Punkt. Dann folgt aus dem Umfangswinkelsatz $\sphericalangle AFB = \sphericalangle BFC = \sphericalangle CFA = 120^\circ$ (Figur 6).

Sei nun P ein beliebiger Punkt der Ebene. Für die Anschauungsfigur im Unterricht wird man den Punkt P im Innern des Dreiecks ABC annehmen, damit man besser sieht, was vorgeht; prinzipiell ist das jedoch nicht notwendig, wenn man sorgfältig auf die Orientierungen achtet, was für Schüler sicherlich eine große Schwierigkeit bedeutet. Man drehe das Dreieck APC mit A als Drehpunkt um 60° gegen den Uhrzeigersinn. Dabei wird C in B′ übergeführt; der Bildpunkt von P heiße P′ (Figur 7). Das Dreieck PP′A ist gleichschenklig und besitzt an der Spitze einen 60°-Winkel, also ist es gleichseitig.

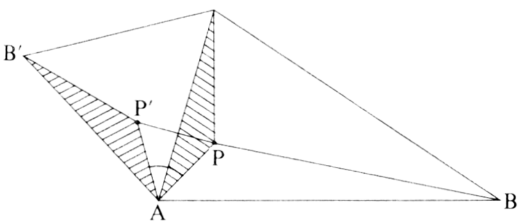

Fig. 7

Daraus ergibt sich insbesondere $\overline{PA} = \overline{PP'}$; ferner hat man $\overline{PC} = \overline{P'B'}$. Also ist die Länge des Streckenzuges von B über P und P′ nach B′ gleich der Summe der Abstände des Punktes P von den Ecken A, B und C: $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$. Die Länge des Streckenzuges ist nun aber genau dann minimal, wenn die Punkte B, P, P′ und B′ in dieser Anordnung auf einer Geraden liegen. Aus der Gleichseitigkeit des Dreiecks APP′ folgt noch $\sphericalangle P'PA = \sphericalangle AP'P = 60^\circ$. Damit sind die Punkte B, P, P′ genau dann kollinear mit P zwischen B und P′, wenn $\sphericalangle APB = 120^\circ$ gilt, und die Punkte P, P′, B′ sind genau dann kollinear, wenn $\sphericalangle B'P'A = \sphericalangle CPA = 120^\circ$ gilt. Die Strecken [AB] und [CA] müssen also beide von P aus unter einem Winkel von 120° erscheinen. Die zugehörigen Faßkreisbögen schneiden sich aber nur in einem Punkt, und das ist der Fermatsche Punkt F. □

Eine mechanische Lösung der Fermatschen Aufgabe gibt Nicholas Kazarinoff an ([14, S. 117f., Solution 2], Figur 8): Man trage das Dreieck ABC (mit keinem Winkel größer-gleich 120°) auf ein in einer gewissen Höhe horizontal gelagertes Brett auf und durchbohre dieses an den Ecken (sie dürfen nicht über einem Lager liegen). Dann nehme man drei gleiche Gewichte, befestige sie an nahezu gewichtslosen Schnüren, ziehe diese von unten durch die gebohrten Löcher und verknote sie oberhalb. Wenn die Schnüre kurz genug sind, so daß die Gewichte nicht auf dem Boden aufliegen, ergibt sich genau dann Gleichgewicht, wenn sich der Knoten auf dem Fermatschen Punkt befindet.

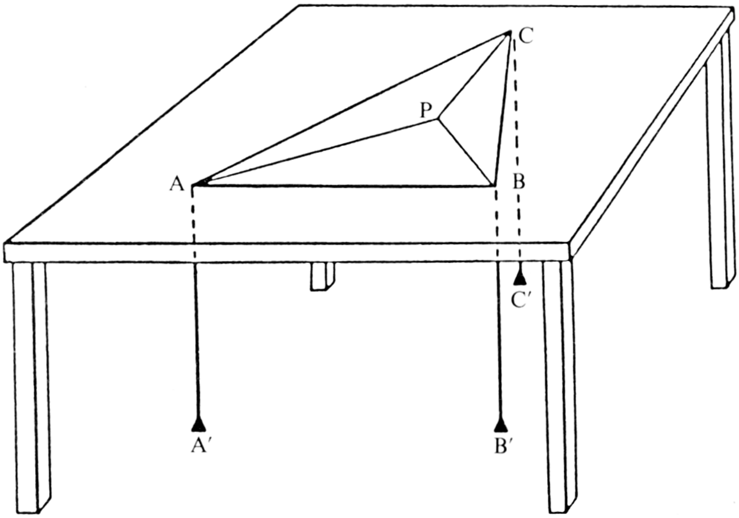

Fig. 8

Die Beweisführung Hofmanns hat gezeigt, daß in dem betrachteten Fall die Punkte B, F, B′ kollinear sind. Analog erhält man natürlich die Kollinearität der Punkte A, F, A′ und die Kollinearität der Punkte C, F, C′. Also schneiden sich die Geraden AA′, BB′, CC′ immer in einem Punkt, nämlich dem Fermatschen Punkt des Dreiecks ABC. Aus Figur 6 liest man dazu noch ab, daß die auftretenden Schnittwinkel alle 60° betragen. Außerdem hat man die arithmethische Beziehung

$$\overline{BB'} = \overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC}.$$

Da der rechtsstehende Ausdruck symmetrisch in A, B, C ist, sich unter Vertauschungen dieser Punkte also nicht ändert, erhält man auch

$$\overline{AA'} = \overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC}$$

und

$$\overline{CC'} = \overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC},$$

das heißt

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}.$$

Als Zwischenresultate kann man noch notieren:

$$\overline{FA'} = \overline{FB} + \overline{FC},$$
$$\overline{FB'} = \overline{FA} + \overline{FC},$$
$$\overline{FC'} = \overline{FA} + \overline{FB}.$$

Entsprechende Aussagen gelten auch für Dreiecke mit einem Winkel größer-gleich 120°. Nur hat man, falls der größte Winkel des Dreiecks an der Ecke C anliegt (Figur 9),

$$\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{FA} + \overline{FB} - \overline{FC}$$

und

$$\overline{FA'} = \overline{FB} - \overline{FC},$$
$$\overline{FB'} = \overline{FA} - \overline{FC},$$
$$\overline{FC'} = \overline{FA} + \overline{FB}.$$

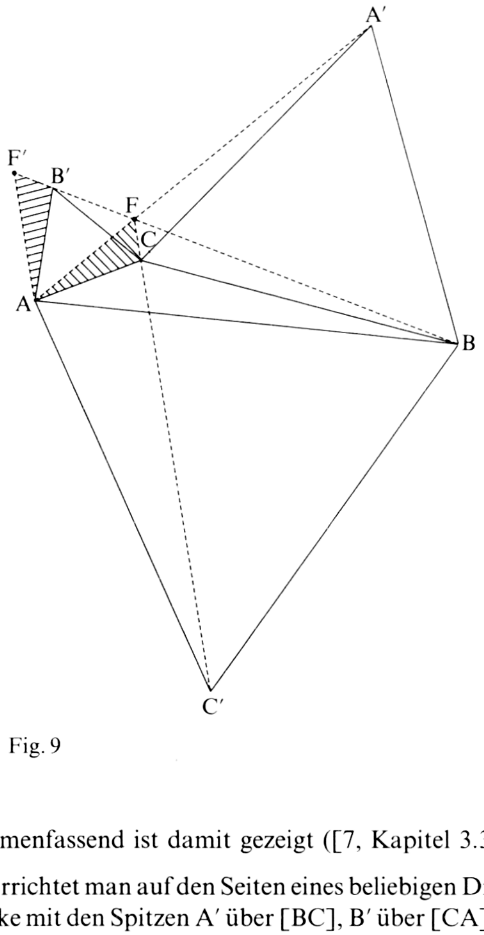

Fig. 9

Zusammenfassend ist damit gezeigt ([7, Kapitel 3.3, Aufgabe 2(c), S. 70]:

Satz: Errichtet man auf den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC nach außen gleichseitige Dreiecke mit den Spitzen A′ über [BC], B′ über [CA] und C′ über [AB], so schneiden sich die Geraden AA′, BB′, CC′ im Fermatschen Punkt F des Dreiecks ABC unter Winkeln von 60° und die Strecken [AA′], [BB′], [CC′] sind gleich lang.

Insbesondere ergibt sich

$$\sphericalangle B'FC' = \sphericalangle C'FA' = \sphericalangle A'FB' = 120^\circ;$$

daraus folgt der

Satz: Errichtet man auf den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC nach außen gleichseitige Dreiecke mit den Spitzen A′ über [BC], B′ über [CA] und C′ über [AB], so ist der Fermatsche Punkt F des Dreiecks ABC auch der Fermatsche Punkt des Dreiecks A′B′C′. Dabei sind alle Winkel des Dreiecks A′B′C′ kleiner als 120°.

Diese beiden Sätze stammen nicht in der Formulierung, aber inhaltlich von Ludwig Kiepert (1846–1934), Professor in Darmstadt und Hannover. Er gehört zu den Begründern der Versicherungsmathematik, und Generationen von Studenten an Technischen Hochschulen lernten aus seinen dickleibigen Lehrbüchern über Differential- und Integralrechnung; sie bildeten wohl das Standardwerk, bevor das dreibändige v. Mangoldtsche Lehrbuch (1911/12/14), später (seit 1931) der „Mangoldt–Knopp" populär wurde. Kiepert löste ([15]) als Student, das heißt genauer als Doktorand von Karl Weierstraß (1815–1897) in Berlin, die von dem französischen Mathematiklehrer Émile Michel Hyacinthe Lemoine (1840–1912), einem der Väter der modernen Dreiecksgeometrie, im Kontext des Satzes von Napoleon in den *Nouvelles Annales de Mathématiques* ([19]) gestellte

Aufgabe: Gegeben die Spitzen A′, B′, C′ der über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC nach außen errichteten gleichseitigen Dreiecke. Man finde die Ecken A, B, C des Ausgangsdreiecks.

Man vergleiche diese Aufgabe mit der Behauptung des Satzes von Napoleon, der impliziert, daß man das ursprüngliche Dreieck sicher nicht aus den Mitten der aufgesetzten Dreiecke zurückgewinnen kann. Da die Mitten ja immer ein gleichseitiges Dreieck bilden, kann man daraus nicht in irgendeiner kanonischen Weise ein beliebiges Dreieck machen.

Kiepert geht das Problem folgendermaßen an: Er errichtet über den Seiten des Dreiecks A′B′C′ noch einmal gleichseitige Dreiecke mit den kanonisch bezeichneten Ecken A″, B″, C″. Er weiß, daß die drei Dreiecke ABC, A′B′C′ und A″B″C″ alle den gleichen Fermatpunkt F haben, und schließt aus den genannten Kollinearitäten, daß die Punkte A′ und A″ auf der Geraden AF liegen, und damit, daß A auf der Geraden A′A″ liegt, entsprechend B auf der Geraden B′B″ und C auf der Geraden C′C″. Aus den genannten Formeln berechnet er außerdem

$$\begin{aligned}\overline{A'A''} &= \overline{B'B''} = \overline{C'C''} = \\ &= \overline{FA'} + \overline{FB'} + \overline{FC'} = \\ &= 2\cdot\overline{AA'} = 2\cdot\overline{BB'} = 2\cdot\overline{CC'}\end{aligned}$$

und erhält damit die gesuchten Ecken A, B, C als die Mittelpunkte der Strecken [A′A″], [B′B″], [C′, C″].

Kiepert war natürlich nicht der einzige, der Lösungen dieser Aufgabe einsandte, aber Lemoine stellte fest: *„Toutes ces solutions sont simples, mais moins complètes que celle de M. Kiepert que nous avons résumée"* (Alle diese Lösungen sind einfach, aber weniger vollständig als die von Herrn Kiepert, die wir zusammengefaßt haben). Vorangestellt hatte Lemoine die Bemerkung: *„La solution ci-après donne lieu à une élégante construc-*

tion" (Die folgende Lösung gibt Veranlassung zu einer eleganten Konstruktion). Kiepert hatte nämlich bemerkt, daß für die Kopunktalität der Geraden AA', BB', CC' die Gleichseitigkeit der aufgesetzten Dreiecke nicht erforderlich ist, und als Anhang zu seiner Lösung des Lemoineschen Problems bewiesen:

Satz: a) Errichtet man über den Seiten eines beliebigen Dreiecks gleichschenklige Dreiecke mit den Seiten als Basis und gleichen Basiswinkeln, so schneiden sich die Verbindungsgeraden der Ecken des Ausgangsdreiecks mit den Spitzen der gegenüberliegenden gleichschenkligen Dreiecke in einem Punkt.
b) Der geometrische Ort der so erhaltenen Punkte ist ein Kegelschnitt durch die Ecken des Ausgangsdreiecks.

Der gemeinsame Basiswinkel φ der aufgesetzten gleichschenkligen Dreiecke kann Werte zwischen -90° und $+90^\circ$ annehmen; bei positivem φ werden die Dreiecke nach außen, bei negativem nach innen errichtet. Für $\varphi = 0^\circ$ erhält man den Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks, für $\varphi = -\alpha, -\beta, -\gamma$ die Ecken A, B, C; im Grenzfall $\varphi \to \infty$ ergibt sich der Höhenschnittpunkt. Der in b) genannte Kegelschnitt ist eine gleichseitige Hyperbel, die *Kiepertsche Hyperbel* des Grunddreiecks, die in der Folge viele Mathematiker beschäftigt hat ([4, S. 1243f.]). Kiepert hat den Satz durch Rechnung bewiesen. Interessant ist die Frage, ob es einen „elementaren" Beweis für Teil a) gibt. Dies wäre insbesondere ein gemeinsamer Beweis dafür, daß sich die Schwerlinien und die Höhen eines Dreiecks jeweils in einem Punkt schneiden. Die Leser sind aufgefordert, nach einem solchen Beweis zu suchen.

Diese Überlegungen wurden hier ausgeführt, weil sie in der Literatur nicht leicht zugänglich sind. Andere Entwicklungen, die vom Satz von Napoleon ausgehen, findet man noch im Abschnitt über *Napoleon-Dreiecke* in [7, Kapitel 3.3, S. 65–70] und in [23].

Anschrift des Verfassers: Lehramtsassessor Fritz Schmidt, Klopstockstraße 5, 8800 Ansbach

Eingangsdatum: 16.3.1989

Literatur

[1] Barlotti, A.: Una proprietà degli n-agoni che si ottengono transformando in una affinità un n-agono regolare. In: Bolletino della Unione Matematica Italiana (3) 10 (1955), S. 96–98
[2] Barlotti, A.: Affinité et polygones réguliers: Extension d'un théorème classique relatif au triangle. Mathematica Paedagogie 9 (1955/56)
[3] Bell, E.T.: Die großen Mathematiker. Düsseldorf–Wien: Econ-Verlag 1967
[4] Berkhan, G. u. Meyer, W. Fr.: Neuere Dreiecksgeometrie. In: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Dritter Band: Geometrie, Erster Teil, Zweite Hälfte (1921), Heft 7, S. 1173–1276
[5] Carnot, L. N. M.: Mémoire sur la relation qui existe entre les distances réspéctives de cinq points quelconques pris dans l'espace. Paris: Courcier 1806
[6] Coxeter, H. S. M.: Unvergängliche Geometrie. Basel–Boston–Stuttgart: Birkhäuser 1981
[7] Coxeter, H. S. M. u. Greitzer, S. L.: Geometry Revisited. New York: Random House The L. W. Singer Company 1967 (deutsch unter dem Titel: Zeitlose Geometrie. Stuttgart: Klett 1983)
[8] Egger, Th., Fritsch, R. u. Seebach, K.: Zum Winkelsummensatz für Tetraeder. In: Didaktik der Mathematik 11 (1983), Heft 1, S. 14–35

[9] Faifofer, A.: Elementi di geometria. Edizione ad uso degli Instituti Tecnici (1° bienio) e dei Licei. Venedig: Sorteni e Vidotti [18]1912

[10] Fischer, J.: Napoleon und die Naturwissenschaften. Stuttgart: Franz Steiner Verlag Wiesbaden 1988

[11] Fisher, J. C., Ruoff, D. u. Shilleto, J.: Polygons and Polynomials. In: The Geometric Vein, The Coxeter Festschrift, herausgegeben von C. Davis, B. Grünbaum und F. A. Sherk. New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag 1982

[12] Gerber, L.: Napoleon's theorem and the parallelogramm inequality for affine-regular polygons. In: The American Mathematical Monthly 87 (1980), S. 644–648

[13] Hofmann, J. E.: Elementare Lösung einer Minimumsaufgabe. In: Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 60 (1929), S. 22–23

[14] Kazarinoff, N. D.: Geometric Inequalities. New York: Random House – The L. W. Singer Company 1961

[15] Kiepert, F. W. A. L.: Solution de Question 864. In: Nouvelles Annales de Mathématiques (Serie 2) 8 (1869), S. 40–42

[16] Kratz, J.: Geometrie – 8. Schuljahr. München: Bayerischer Schulbuch-Verlag 1985

[17] Lagrange, J.-L.: Solutions analytiques de quelques problèmes sur le pyramide triangulaires. In: Nouveaux Mémoires de l'académie royale de sciences et belles-lettres (1773), S. 149–176

[18] Legendre, A.-M.: Éléments de géométrie. Paris: [1]1794, [9]1833

[19] Lemoine, E. M. H.: Question 864. In: Nouvelles Annales de Mathématiques (Serie 2) 7 (1868), S. 191

[20] Mascheroni, L.: La Geometria del Compasso. Pavia: Pietro Galeazzi 1797

[21] Mohr, G.: Euclides danicus. Amsterdam: 1672

[22] Schmidt, E.: Affin-reguläre n-Ecke und ihre regulären Komponenten. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 39 (1986), Heft 8, S. 502

[23] Schütte, K.: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Napoleon. In: Mathematische Semesterberichte 34 (1987), Heft 2, S. 256–268

[24] Scriba, C. J.: Wie kommt „Napoleons Satz" zu seinem Namen? In: Historia Mathematica 8 (1981), S. 458–459

[25] Selinko, A.: Désirée. Gütersloh: Im Bertelsmann Lesering 1957

[26] Toepell, M.: Der verlorengegangene Mittelpunkt. In: Didaktik der Mathematik 17 (1989), Heft 3, S. 218–242

[27] Turner, G.: Elementi di geometria. Band 1. Palermo: 1843

[28] Wußing, H. u. Arnold, W.: Biographien bedeutender Mathematiker. Köln: Aulis Verlag Deubner 1978

[29] Zweig, S.: Joseph Fouché. Fischer Bücherei 4. Frankfurt am Main und Hamburg: Fischer Bücherei 1952