ALEXANDER GROTHENDIECK

Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébriques. II. Le théorème d'existence en théorie formelle des modules

Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 195, p. 369-390
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1958-1960__5__369_0>

Séminaire BOURBAKI
12e année, 1959/60, n° 195

Février 1960

TECHNIQUE DE DESCENTE ET THÉORÈMES D'EXISTENCE EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUES
II. LE THÉORÈME D'EXISTENCE EN THÉORIE FORMELLE DES MODULES

par Alexander GROTHENDIECK

A. Foncteurs représentables et pro-représentables.

1. Foncteurs représentables.

Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie. Pour tout $X \in \underset{\sim}{C}$, soit h_X le foncteur contravariant de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie (Ens) des ensembles,

$$h_X : \underset{\sim}{C} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

défini par la formule

$$h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y , X)$$

Si on a un morphisme $X \longrightarrow X'$ dans $\underset{\sim}{C}$, on en déduit de façon évidente un homomorphisme $h_X \longrightarrow h_{X'}$ de foncteurs : h_X est un foncteur covariant en X, i. e. on a défini un foncteur covariant canonique

$$h : \underset{\sim}{C} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{C}^0 , (\mathrm{Ens}))$$

de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie des foncteurs covariants de la duale $\underset{\sim}{C}^0$ de $\underset{\sim}{C}$ dans la catégorie des ensembles. Rappelons alors :

PROPOSITION 1, 1. - Ce foncteur h est pleinement fidèle, en d'autres termes, pour tout couple X, X' d'objets de $\underset{\sim}{C}$, l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}(X , X') \longrightarrow \mathrm{Hom}(h_X , h_{X'})$$

est bijective.

En particulier, si un foncteur $F \in \mathrm{Hom}(\underset{\sim}{C}^0 , (\mathrm{Ens}))$ est isomorphe à un foncteur de la forme h_X, X est déterminé à un isomorphisme unique près. On dit alors que le foncteur F est représentable. La proposition précédente signifie alors que le foncteur canonique h définit une équivalence de la catégorie $\underset{\sim}{C}$ avec la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Hom}(\underset{\sim}{C}^0 , (\mathrm{Ens}))$ formée par les foncteurs représentables. Ce fait est à la base de la notion de "solution d'un Problème Universel", un tel problème consistant toujours à examiner si un foncteur donné (contravariant comme ici, ou covariant dans le cas dual) de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) est représentable.

Notons de plus, que, par définition même de la notion de produit dans une catégorie [1], le foncteur $h : X \rightsquigarrow h_X$ **commute aux produits chaque fois** qu'ils existent (et plus généralement aux limites projectives finies ou infinies, en particulier aux produits fibrés, à la formation de "noyaux" [2] etc., chaque fois qu'ils existent) : on a un isomorphisme de foncteurs

$$h_{X \times X'} \xrightarrow{\sim} h_X \times h_{X'}$$

chaque fois que $X \times X'$ existe, i. e. on a des bijections fonctorielles en Y

$$h_{X \times X'}(Y) \xrightarrow{\sim} h_X(Y) \times h_{X'}(Y) \quad .$$

En particulier, la donnée d'un morphisme

$$X \times X' \longrightarrow X''$$

dans $\underset{\sim}{C}$ (i. e. d'une "loi de composition" dans $\underset{\sim}{C}$ entre X , X' , X'') est équivalente à la donnée d'un morphisme $h_{X \times X'} = h_X \times h_{X'} \longrightarrow h_{X''}$, i. e. à la donnée pour tout $Y \in \underset{\sim}{C}$ d'une loi de composition d'ensembles

$$h_X(Y) \times h_{X'}(Y) \longrightarrow h_{X''}(Y)$$

de telle façon que, pour tout morphisme $Y \longrightarrow Y'$ dans $\underset{\sim}{C}$, le système des applications ensemblistes

$$h_{X^{(i)}}(Y) \longrightarrow h_{X^{(i)}}(Y') \qquad (\text{pour } i = 0 , 1 , 2)$$

soit un morphisme pour les deux lois de composition, relatives à Y et Y' . On voit de cette façon que la notion de structure de "$\underset{\sim}{C}$-groupe" , "$\underset{\sim}{C}$-anneau", etc. sur un objet X de $\underset{\sim}{C}$ s'exprime de la façon la plus commode (en théorie comme en pratique) en disant que pour tout $Y \in \underset{\sim}{C}$, on a une loi de groupes (resp. anneau, etc.) au sens usuel sur l'ensemble $h_X(Y)$, les applications $h_X(Y) \longrightarrow h_X(Y')$ correspondant à des morphismes $Y \longrightarrow Y'$ devant être des homomorphismes de groupes (resp. anneaux, etc.). C'est la façon la plus intuitive et la plus commode par exemple, pour définir les divers groupes classiques G_a , G_m , $G\ell(n)$, etc. sur un pré-schéma S de base quelconque et pour écrire les relations classiques entre ces groupes, pour mettre sur le schéma affine $V(\underset{\sim}{F})$ au-dessus de S , défini par un faisceau quasi-cohérent $\underset{\sim}{F}$, une structure de "fibré vectoriel", pour définir et étudier les diverses variétés de drapeaux (grassmaniennes, fibrés projectifs) associés, etc. ; le yoga général étant d'identifier purement et simplement, à l'aide du foncteur canonique h , les objets de $\underset{\sim}{C}$ à des foncteurs contravariants particuliers, les foncteurs représentables, *de* $\underset{\sim}{C}$ *dans la catégorie des ensembles*.

Le procédé habituel de renversement de flèches, qui s'impose par exemple, dans le cas des schémas affines pour passer du langage géométrique au langage de l'algèbre commutative, conduit à dualiser les considérations précédentes et en particulier, à introduire aussi les foncteurs *covariants* $\underset{\sim}{C} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ *représentables*, i. e. de la forme $Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X\ ,\ Y) = h'_X(Y)$.

2. *Foncteurs pro-représentables, pro-objets*.

Soit $\underset{\sim}{X} = (X_i)_{i\in I}$ un système projectif d'objets de $\underset{\sim}{C}$, il lui correspond un foncteur covariant

$$h'_{\underset{\sim}{X}} = \varinjlim_i h'_{X_i}$$

de façon plus explicite

$$h'_{\underset{\sim}{X}}(Y) = \varinjlim_i h'_{X_i}(Y) = \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i\ ,\ Y)$$

de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) . Un foncteur de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) qui est isomorphe à un foncteur de ce type avec I *filtrant*, est dit *pro-représentable*. D'après le numéro précédent, ce sont exactement les foncteurs isomorphes à des *limites inductives filtrantes de foncteurs représentables*. Soit $\underset{\sim}{X}' = (X'_j)_{j\in J}$ un deuxième système projectif filtrant dans $\underset{\sim}{C}$ (construit sur un deuximèe ensemble d'indices préordonné filtrant J), on vérifie aisément qu'on a une bijection canonique (généralisant la proposition 1, 1)

$$\mathrm{Hom}(h_{\underset{\sim}{X}'}\ ,\ h_{\underset{\sim}{X}}) = \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i\ ,\ X'_j) \qquad .$$

Cela amène à introduire la *catégorie* $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$ *des pro-objets de* $\underset{\sim}{C}$; ses objets sont les systèmes projectifs d'objets de $\underset{\sim}{C}$ (sur des ensembles d'indices préordonnés filtrants variables), et si $\underset{\sim}{X} = (X_i)_{i\in I}$ et $\underset{\sim}{X}' = (X'_j)_{j\in J}$ sont deux tels objets, on pose

$$\mathrm{Pro\ Hom}(\underset{\sim}{X}\ ,\ \underset{\sim}{X}') = \varprojlim_j \varinjlim_i \mathrm{Hom}(X_i\ ,\ X'_j)$$

la composition des pro-homomorphismes étant évidente. Par construction même, $\underset{\sim}{X} \rightsquigarrow h'_{\underset{\sim}{X}}$ peut être considéré comme un foncteur contravariant en $\underset{\sim}{X}$, établissant une *équivalence de la catégorie duale de la catégorie* $\mathrm{Pro}(C)$ *des pro-objets de* $\underset{\sim}{C}$, *avec la catégorie des foncteurs covariants pro-représentables de* $\underset{\sim}{C}$ *dans* (Ens) . Bien entendu, un objet X de $\underset{\sim}{C}$ définit canoniquement un pro-objet, dénoté encore par X , de sorte que C est équivalente à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Pro}(C)$. Si alors $X = (X_i)_{i\in I}$ est un pro-objet quelconque de C , alors on aura (avec l'identification précédente)

$$X = \varprojlim_i X_i$$

la limite projective étant prise dans $\mathrm{Pro}(C)$ (puisque $h_X = \varinjlim_i h_{X_i}$).

On fera attention que, lors même que la limite projective des X_i existe dans C , elle sera généralement non isomorphe à la limite projective X dans $\mathrm{Pro}(C)$, comme il est déjà évident dans le cas où C est la catégorie des ensembles. On notera que par définition même, $\varprojlim_C X_i = L$ est défini par la condition que le foncteur en $Y \in C$

$$\varprojlim_i \mathrm{Hom}_C(Y , X_i) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(C)}(Y , X)$$

et à valeurs dans (Ens) soit représentable à l'aide de L , i. e. soit isomorphe à $\mathrm{Hom}_C(Y , L)$; par suite, $\lim_C X_i$ est défini déjà en termes du pro-objet X , et de façon précise dépend fonctoriellement du pro-objet X chaque fois qu'elle est définie ; il n'y a donc pas d'inconvénient à la dénoter par $\varprojlim_C(X)$. Si les limites projectives dans C existent toujours, $\varprojlim_C(X)$ est un foncteur de $\mathrm{Pro}(C)$ dans C , et il y a un homomorphisme canonique de foncteurs $\lim_C(X) \longrightarrow X$. Comme tout foncteur, covariant pour fixer les idées

$$F : C \longrightarrow C'$$

se prolonge de façon évidente en un foncteur

$$\mathrm{Pro}(F) : \mathrm{Pro}(C) \longrightarrow \mathrm{Pro}(C')$$

il s'ensuit que, si dans C' les limites projectives existent toujours, F définit aussi canoniquement un foncteur composé $\varprojlim_{C'} \circ \mathrm{Pro}(F)$:

$$\bar{F} : \mathrm{Pro}(C) \longrightarrow C'$$

transformant $X = (X_i)_{i\in I}$ en $\varprojlim_{C'} F(X_i)$.

Un pro-objet X est dit pro-objet strict s'il est isomorphe à un pro-objet $(X_i)_{i\in I}$, où les morphismes de transition $X_i \longrightarrow X_j$ sont des épimorphismes ; un foncteur défini par un tel objet est dit strictement pro-représentable. On peut alors exiger de plus que I soit ordonné filtrant, et que tout épimorphisme

$X_i \to X'$ soit équivalent à un épimorphisme $X_i \to X_j$ pour $j \in I$ convenable (déterminé de façon unique par cette condition). Sous ces conditions, le système projectif $(X_i)_{i\in I}$ est déterminé à un isomorphisme unique près (au sens usuel d'isomorphismes de systèmes projectifs). Il en résulte que dans $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$ la limite projective d'un système projectif de pro-objets stricts $\underset{\sim}{X}^{(\alpha)}$ existe toujours et qu'avec les notations ci-dessus pour F , $\bar{F}$ on aura

$$\bar{F}(\varprojlim_{\alpha} \underset{\sim}{X}^{(\alpha)}) = \varprojlim_{\alpha}{}_{\underset{\sim}{C'}} F(X^{(\alpha)})$$

En particulier, si tout pro-objet de $\underset{\sim}{C}$ est strict, (cf. le numéro suivant), le foncteur prolongé $\bar{F}$ commute aux limites projectives.

3. Caractérisation des foncteurs pro-représentables.

Soient $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{C}'$ deux catégories où les limites projectives finies (i. e. relatives à des ensembles préordonnés finis, non nécessairement filtrants) existent, ou ce qui revient au même, où les produits finis et les produits fibrés finis existent (ce qui implique en particulier, l'existence d'un "objet unité à droite" e , tel que $\mathrm{Hom}(X , e)$ soit réduit à un élément pour tout X). Soit F un foncteur covariant de $\underset{\sim}{C}$ dans $\underset{\sim}{C}'$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i. F permute aux limites projectives finies ;

ii. F permute aux produits finis et aux produits fibrés finis ;

iii. F permute aux produits finis, et pour tout diagramme exact

$$X' \to X' \rightrightarrows X''$$

dans $\underset{\sim}{C}$ ([3], A, définition 2, 1) le diagramme transformé par F

$$F(X) \to F(X') \rightrightarrows F(X'')$$

est exact.

On dit alors que F est exact à gauche.

Par la suite, on suppose que dans $\underset{\sim}{C}$, les limites projectives finies existent. Il est alors immédiat sur les définitions qu'un foncteur représentable est exact à gauche, et par passage à la limite qu'un foncteur pro-représentable est exact à gauche.

Pour obtenir une réciproque, soit

$$F : \underset{\sim}{C} \to (\mathrm{Ens})$$

un foncteur covariant, soient $X \in C$ et $\xi \in F(X)$. On dit que ξ (ou le couple

$(X, \xi))$ est minimal si pour tout $X' \in \underset{\sim}{C}$ et $\xi' \in F(X')$, et tout monomorphisme strict ([3], A, 2) $u : X' \longrightarrow X$ tel que $\xi = F(u)(\xi')$, u est un isomorphisme. On dit d'autre part, qu'un couple (X, ξ) domine (X'', ξ'') ($\xi \in F(X)$, $\xi'' \in F(X'')$) s'il existe un morphisme $v : X \longrightarrow X''$ tel que $\xi'' = F(v)(\xi)$; si ξ est minimal et si F est exact à gauche, ce morphisme v est alors unique ; si ξ'' est minimal, v est surjectif. On en déduit facilement la proposition suivante :

PROPOSITION 3, 1. - Pour que F soit strictement pro-représentable, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux deux conditions :

i. F est exact à gauche ;

ii. Tout couple (X, ξ), avec $\xi \in F(X)$, est dominé par un couple minimal.

Cette dernière condition est vide si tout objet de $\underset{\sim}{C}$ est artinien, (en prenant un sous-objet X' de X minimal parmi ceux pour lesquels il existe $\xi' \in F(X')$ tel que ξ soit l'image de ξ'). D'où :

COROLLAIRE. - Soit $\underset{\sim}{C}$ une catégorie dont les objets sont artiniens et où les limites projectives finies existent. Alors les foncteurs pro-représentables de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) sont exactement les foncteurs exacts à gauche, et ils sont même strictement pro-représentables.

Ce dernier fait signifie aussi que tout pro-objet de $\underset{\sim}{C}$ est strict.

4. Exemple : groupes du type galoisien, groupes pro-algébriques.

Si $\underset{\sim}{C}$ est la catégorie des groupes finis ordinaires, $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$ est équivalente à la catégorie des groupes topologiques compacts totalement discontinus. Ce sont des groupes de ce type et leurs généralisations, obtenues en remplaçant les groupes finis ordinaires par des schémas en groupes finis au-dessus d'un pré-schéma de base donné (par exemple, les groupes algébriques finis sur un corps k), qui tiendront lieu de groupes fondamentaux, d'homotopie, d'homologie absolus et relatifs pour les pré-schémas. Dans tous ces exemples, le corollaire à la proposition 3, 1 s'applique, et c'est bien par le foncteur associé que le π_1 doit se définir [2]. Il en est de même en partant de la catégorie des groupes algébriques ou quasi-algébriques sur un corps (ou plus généralement sur un pré-schéma noethérien) : on trouve les "groupes pro-algébriques" de SERRE [4].

5. Exemple : "variétés formelles".

Soient Λ un anneau noethérien, $\underset{\sim}{C}$ la catégorie des Λ-algèbres A qui sont des modules de type fini artiniens sur Λ (ou plus brièvement, des Λ-algèbres artiniennes). On est sous les conditions du corollaire à la proposition 3, 1. La catégorie $\mathrm{Pro}(\underset{\sim}{C})$ est ici équivalente à la catégorie des algèbres topologiques O sur Λ isomorphes à des limites projectives topologiques

$$O = \varprojlim O_i$$

d'algèbres $O_i \in \underset{\sim}{C}$, i. e. dont la topologie est linéaire, séparée et complète, et telle que pour tout idéal ouvert J_i de O, O/J_i soit une algèbre artinienne sur Λ. Le foncteur $\underset{\sim}{C} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$ associé à une telle algèbre n'est autre que

$$\begin{aligned} F(A) = h'_O(A) &= \text{ensemble des homomorphismes continus de } \Lambda\text{-algèbres} \\ &\quad \text{topologiques } O \longrightarrow A \\ &= \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-algèbres}}(O_i\, , A) \end{aligned}$$

On notera d'ailleurs que la catégorie $\underset{\sim}{C}$ est essentiellement le produit des catégories analogues, correspondant aux anneaux locaux complétés des $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ pour les idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ de Λ ; on peut donc si on le désire se limiter au cas où A est un tel anneau local complet. En tous cas, O se décompose canoniquement en le produit topologique de composants locaux, correspondants aux "points" du schéma formel [2] défini par O. Un tel point est défini par un objet ξ d'un $F(K)$, où $K \in \underset{\sim}{C}$ est un corps (par exemple, le corps résiduel du composant local envisagé), deux couples $(\xi\, , K)$ et $(\xi'\, , K')$ définissant le même point si et seulement si ils sont dominés par un même $(\xi''\, , K'')$, ou encore s'ils dominent un même $(\xi'''\, , K''')$. (Si les $\Lambda/\mathfrak{m}$ sont algébriquement clos, il suffit de prendre l'ensemble somme des $F(\Lambda/\mathfrak{m})$).

Il importe de donner des conditions pour que le composant local O_ξ de O correspondant à un $\xi \in F(K)$ soit un anneau noethérien. Lorsque Λ est un anneau local complet (noethérien, on le rappelle), il revient au même de dire que O_ξ est isomorphe à un anneau quotient d'un anneau de séries formelles $\Lambda[[t_1\, , \dots\, , t_n]]$ sur Λ. Pour donner un tel critère, introduisons (pour tout anneau A) la A-algèbre I_A des "nombres duaux" de A par

$$I_A = A[t]/t^2 A[t] \quad .$$

Soit $\varepsilon : I_A \longrightarrow A$ l'homomorphisme d'augmentation, il définit (si $A \in \underset{\sim}{C}$) une application

$$F(\varepsilon) : F(I_A) \longrightarrow F(A)$$

et utilisant le fait que F est exact à gauche, on définit de façon intrinsèque une structure de A-module dans la partie

$$F(I_A, \xi) = F(\varepsilon)^{-1}(\xi)$$

de $F(I_A)$ formée des $\xi' \in F(I_A)$ qui "se réduisent suivant ξ" ; utilisant la forme explicite de F en termes de O, on trouve que ce K-module s'identifie à $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2, A)$, où $\mathfrak{m}_\xi$ est le noyau de l'homomorphisme $\xi : O \longrightarrow A$, i. e. si A est un corps, l'idéal maximal du composant local O_ξ de O. On en déduit aussitôt la proposition suivante :

PROPOSITION 5, 1. - Soit $\xi \in F(K)$, où $K \in \underset{\sim}{C}$ est un corps. Pour que le composant local O_ξ correspondant de O soit un anneau <u>noethérien</u>, il faut et il suffit que l'ensemble $F(I_K, \xi)$ des éléments de $F(I_K)$ se réduisant suivant ξ soit un espace vectoriel de <u>dimension finie</u> sur K. Sous ces conditions, on a un isomorphisme canonique

$$F(I_K, \xi) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2 + \mathfrak{n}_\xi \underset{\sim}{O}_\xi), K)$$

(où $\mathfrak{n}_\xi$ est l'idéal maximal de Λ noyau de l'homomorphisme $\Lambda \longrightarrow K$), en particulier, la dimension du K-espace vectoriel $F(I_K, \xi)$ est égale à la dimension de l'espace vectoriel $\mathfrak{m}_\xi/\mathfrak{m}_\xi^2$ sur le corps $O_\xi/\mathfrak{m}_\xi = K(\xi)$.

Supposons que O_ξ soit noethérien, et supposons pour simplifier l'écriture que Λ soit local complet, et $O = O_\xi$. On dit que O <u>est simple sur</u> Λ si O est une algèbre finie et étale sur l'algèbre complétée du localisé de $\Lambda[t_1, \ldots, t_n]$ en un idéal maximal de cet anneau, induisant l'idéal maximal de Λ ; lorsque l'extension résiduelle de O sur Λ est triviale, (par exemple, le corps résiduel de Λ est algébriquement clos), cela équivaut à dire que O lui-même est isomorphe à une telle algèbre de séries formelles. Enfin, si on ne suppose plus nécessairement O noethérien, on dira encore que O <u>est simple sur</u> Λ si O est isomorphe à une limite projective topologique de Λ-algèbres quotients qui sont noethériennes et Λ-simples au sens précédent. On généralise aussitôt au cas où Λ, O ne sont plus supposés locaux. Ceci dit, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 5, 2. - Pour que O soit simple sur Λ, il faut et il suffit que le foncteur F associé transforme épimorphismes en épimorphismes.

Cela signifie donc que pour tout homomorphisme <u>surjectif</u> $A \longrightarrow A'$ dans $\underset{\sim}{C}$, $F(A) \longrightarrow F(A')$ est <u>surjectif</u>. Bien entendu, il suffit de vérifier cette condition quand A est <u>local</u>, et (en procédant de proche en proche) quand l'idéal de A noyau de $A \longrightarrow A'$ est annulé par l'idéal maximal de A. Cela ramène, en pratique, à vérifier qu'une certaine obstruction, liée à des invariants <u>infinitésimaux</u>

de la situation donnant naissance au foncteur F , est nulle, problème qui est de nature cohomologique.

Pour finir, disons quelques mots, dans le contexte précédent, des anneaux de définition. Soit toujours F un foncteur de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) , pro-représentable à l'aide d'une Λ-algèbre topologique O . Alors pour tout $A \in \underset{\sim}{C}$ et tout $\xi \in F(A)$, il existe un plus petit sous-anneau A' de A tel que ξ soit image d'un élément ξ' de $F(A')$ (lequel est alors uniquement déterminé) : en effet, il suffit d'interpréter ξ au moyen d'un homomorphisme de O dans A , et de prendre pour A' l'image de O par ce dernier. On dit alors que A' est l'anneau de définition de l'objet $\xi \in F(A)$. Si $u : A \longrightarrow B$ est un homomorphisme d'algèbres et si $\eta = F(u)(\xi)$, alors l'anneau de définition de η est l'image par u de l'anneau de définition de ξ . Lorsqu'on part d'un foncteur F de $\underset{\sim}{C}$ dans (Ens) , l'existence des anneaux de définition et les propriétés qu'on vient d'en donner sont à peu de choses près équivalentes au fait que F soit pro-représentable ; c'est dire qu'elles sont le plus souvent loin d'être triviales.

B. Les deux théorèmes d'existence.

Gardons les notations de A, paragraphe 5, et partons d'un foncteur covariant

$$F : \underset{\sim}{C} \longrightarrow (\mathrm{Ens})$$

on cherche des critères maniables pour que F soit pro-représentable, i. e. exprimable à l'aide d'une Λ-algèbre O comme plus haut. En vertu du corollaire de A, proposition 3, 1., il faut et il suffit pour cela que F soit exact à gauche. Dans l'état actuel de la technique de descente, (cf. questions posées dans [3], p. 9) ce critère n'est pas directement vérifiable sous cette forme dans les cas les plus importants, et on a besoin de critères en apparence moins exigeants.

THÉORÈME 1. - Pour que le foncteur F soit pro-représentable, il faut et il suffit qu'il satisfasse les deux conditions suivantes :

i. F permute aux produits finis ;

ii. Pour toute algèbre $A \in \underset{\sim}{C}$ et tout homomorphisme $A \longrightarrow A'$ dans $\underset{\sim}{C}$ tel que le diagramme

$$A \longrightarrow A' \rightrightarrows A' \otimes_A A'$$

soit exact ([3] A, définition 1, 2.), le diagramme transformé

$$F(A) \longrightarrow F(A') \rightrightarrows F(A' \otimes_A A')$$

est exact.

De plus, il suffit de vérifier (ii) quand A est local et quand de plus, on est dans l'un des deux cas suivants :

a. A' est un module libre sur A ;

b. Le module quotient A'/A est un A-module de longueur 1.

La démonstration de ce théorème est assez délicate et ne peut être esquissée ici. Bornons-nous à signaler qu'elle repose essentiellement sur une étude des relations d'équivalence (au sens des catégories) dans le spectre d'une algèbre artinienne, (étude qui pose encore plusieurs problèmes, dont la solution semble indispensable pour le développement ultérieur de la théorie).

Dans les applications, la vérification de la condition (i) est toujours triviale. Celle de (ii) se décompose en deux : le cas où A' est un A-module libre relève de la technique de descente par morphismes plats ([3], théorèmes 1, 2 et 3) et n'offre pas de difficulté. Pour traiter le cas (b), on utilisera le résultat suivant :

THÉORÈME 2. - Soient A un anneau local artinien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, A' une A-algèbre contenant A telle que $\mathfrak{m}A' \subset A$ et que $A \to A' \rightrightarrows A' \otimes_A A'$ soit exact (ce qui est le cas en particulier si A'/A est un A-module de longueur 1). Soit $\mathcal{F}$ la catégorie fibrée ([3] A, définition 1, 1) des faisceaux quasi-cohérents et plats sur des pré-schémas variables. Alors le morphisme $\mathrm{Spec}(A') \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ est un morphisme de $\mathcal{F}$-descente strict ([3] A, définition 1, 7).

En d'autres termes, la donnée d'un A-module plat M est complètement équivalente à la donnée d'un A'-module plat M', muni d'un $A' \otimes_A A'$-isomorphisme de $M' \otimes_A A'$ sur $A' \otimes_A M'$ satisfaisant la condition de transitivité habituelle pour une donnée de descente (loco citato).

Le théorème 2 se démontre en prouvant d'abord que

$$H^i(A'/A\ ,\ G_a) = 0 \qquad \text{pour } i \geqslant 1$$

([3] A, 4. e.), l'hypothèse $\mathfrak{m}A' \subset A$ permettant de se ramener aisément au cas où A est un corps k (savoir $A/\mathfrak{m}$). On applique alors les équivalences signalées dans [3], page 16,

C. Applications à quelques cas particuliers.

1. Remarques générales sur les foncteurs représentés par des pré-schémas.

Soit S un pré-schéma localement noethérien. Un pré-schéma X sur S est dit localement de type fini sur S si pour tout $x \in X$, se projetant en $y \in Y$, il existe un voisinage affine de y d'anneau A, et un voisinage affine de x au-dessus de ce dernier, d'anneau B, tels que B soit une A-algèbre de type fini. On trouve de nombreux exemples importants de pré-schémas localement de type fini sur S, qui ne sont pas de type fini sur S, comme solutions de problèmes universels classiques ; ainsi il importe de pouvoir considérer le schéma de Picard d'une courbe comme réunion d'une infinité de composantes connexes, (qu'il faut se garder de confondre avec la composante connexe de l'élément neutre, i. e. la "variété de Picard"). Il est alors parfois commode de se placer dans la catégorie $\underset{\sim}{C}$ des pré-schémas localement de type fini sur S, pour y examiner la question de la représentabilité d'un foncteur contravariant F. Le but principal de ces exposés est de développer une technique générale permettant de reconnaître si un tel foncteur F est représentable, et d'étudier les propriétés du S-pré-schéma X correspondant à l'aide de celles de F. Signalons en passant que dans cette étude, on trouve des exemples non pathologiques de pré-schémas sur S non séparés sur S, notamment comme "pré-schémas de Picard" d'excellents S-schémas ; il faut donc se garder de bannir de la géométrie algébrique les pré-schémas qui ne sont pas des schémas

Soit X un pré-schéma localement de type fini sur S, et soit F :

$$F(Y) = \mathrm{Hom}_S(Y , X)$$

le foncteur contravariant associé. On peut considérer la restriction F_o de F à la sous-catégorie $\underset{\sim}{C}_o$ de $\underset{\sim}{C}$ formée des pré-schémas Y sur S qui sont artiniens et finis sur S : lorsque $S = \mathrm{Spec}(\Lambda)$, $\underset{\sim}{C}_o$ est donc la catégorie duale de la catégorie des Λ-algèbres artiniennes considérée dans B . Si $Y = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau local artinien, Y est réduit à un seul point y placé au-dessus d'un point fermé s de S, et un S-homomorphisme de Y dans (i. e. un élément de $F(Y)$ est défini par la donnée d'un point $x \in X$ au-dessus de s, et d'un $\underset{\sim}{O}_s$-homomorphisme de $\underset{\sim}{O}_x$ dans A. S'il existe un tel homomorphisme, alors x est nécessairement un point fermé de X (son corps résiduel étant algébrique sur celui de s). Cela montre donc que la restriction F_o de F aux " Y-algèbres artiniennes" est pro-représentable, et est représentée par la Y-algèbre topologique dont les composants locaux sont les complétés $\hat{\underset{\sim}{O}}_x$ des anneaux locaux de X aux points x de X qui sont fermés et se trouvent au-dessus de points fermés de Y. Cela montre que la seule connaissance de F_o donne des renseignements précis sur la structure de X (savoir la structure des complétés de ses anneaux locaux aux points indiqués). On notera que même dans le cas où S

est le spectre d'un corps algébriquement clos, ce n'est que grâce à la considération systématique de "variétés" Y telles que $\underset{\sim}{O}_X$ peut admettre des éléments nilpotents, en particulier en travaillant avec les spectres d'anneaux artiniens locaux, qu'on peut arriver à la "bonne formulation" des problèmes universels classiques, et à en saisir l'aspect "infinitésimal".

Quand on part d'un foncteur F donné à l'avance, dont on veut décider s'il est représentable, l'étude du foncteur F_o (à l'aide des théorèmes 1 et 2) donnera des indications quasi-complètes ; soit, comme il arrive fréquemment (en testant simplement, par exemple, la nature des ensembles $F(I_K , \xi)$ et leur comportement fonctoriel, cf. A) qu'on constate que F_o déjà n'est pas pro-représentable (ce qui explique l'échec des tentatives faites jusqu'à présent pour définir de façon plus ou moins naturelle des variétés de modules pour la classification des fibrés vectoriels de rang >1) ; soit qu'on arrive à vérifier que F_o est bien représentable, mais que les espaces vectoriels $F(I_K , \xi)$ ne sont pas de dimension finie, auquel cas il faut se contenter de la solution "formelle" ; soit enfin que F_o est bien représentable par un produit d'anneaux locaux complets noethériens, ce qui donne de très fortes présomptions pour que F soit lui-même représentable et, joint à des propriétés analogues mais de nature plus globale que nous pensons développer par la suite, suffira sans doute à entraîner qu'il en est effectivement ainsi. Enfin, on rencontre des problèmes géométriques intéressants (voir paragraphes 4 et 5 ci-dessous) où on ne dispose que du foncteur F_o (ne provenant d'aucun foncteur "global" F), et où on s'estimera heureux quand on aura pu lui associer un "schéma formel de modules".

Pour terminer ces généralités, indiquons comment la théorie des schémas explique des anomalies apparentes, telles la surface de Igusa V dont la "variété de Picard" P est réduite à un point, et pour laquelle pourtant on a $H^1(V , \underset{\sim}{O}_V) \neq 0$; dans ce cas, P est un groupe "purement infinitésimal" non réduit au groupe unité, i. e. défini par une algèbre locale O de rang fini sur le corps de base k et muni d'une application diagonale correspondant à la structure multiplicative de P ; si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de O , le dual de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est canoniquement isomorphe à $H^1(V , \underset{\sim}{O}_V)$ (cf. le paragraphe 3 ci-dessous). Ce n'est que lorsque le groupe de Picard est un groupe algébrique au sens classique, i. e. simple sur le corps de base k , que la dimension de $H^1(V , \underset{\sim}{O}_V)$ (toujours égale à celle de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$) est égale à celle du groupe de Picard.

2. Schémas $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$, $\prod_{X/S} Z$, $\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}_S(X)$ etc.

Soient X , Y deux pré-schémas sur S ; pour tout pré-schéma T sur S , soient $X_T = X \times_S T$, $Y_T = Y \times_S T$ et considérons l'ensemble

$$F(T) = \mathrm{Hom}_T(X_T , Y_T) = \mathrm{Hom}_S(X_T , Y) = \mathrm{Hom}_S(X \times_S T , Y)$$

comme un foncteur contravariant en T . S'il est représentable, on dénote par $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$ le pré-schéma sur S qui le représente, donc on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_S(T , \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(T \times_S X , Y)$$

Il y a bien des variantes de ce problème universel, dont la solution s'y ramène : pré-schéma des S-<u>automorphismes</u> d'un S-pré-schéma X (ce sera un pré-schéma en <u>groupes</u>), pré-schéma des S-<u>homomorphismes</u> d'un S-pré-schéma en <u>groupes</u> dans un autre (ce sera un pré-schéma en groupes commutatifs si le deuxième schéma en groupes est commutatif) etc. On peut aussi généraliser la définition de $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$ en considérant un pré-schéma Z sur le pré-schéma X sur S , et le foncteur

$$F(T) = \mathrm{Hom}_{X_T}(X_T , Z_T)$$

(ensemble des "sections" de Z_T sur X_T) ; si ce foncteur est représentable, le S-pré-schéma qui le représente sera noté $\prod_{X/S} Z$, on aura donc par définition un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_S(T , \textstyle\prod_{X/S} Z) = \mathrm{Hom}_{X_T}(X_T , Z_T)$$

Faisant $Z = Y \times_S X$, on retrouve $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$. De ces définitions résulte pour les nouveaux pré-schémas ainsi introduits un formulaire aussi trivial qu'utile, que nous ne donnerons pas ici (vu qu'il vaut dans toute catégorie où les produits et produits fibrés existent). Plus sérieuse est la question de l'<u>existence</u> des schémas du type $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$. On constate d'abord que pour X fixé, $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$ ne peut exister pour tout Y sur S (ou $\prod_{X/S} Z$ pour tout Z sur X) que si X est <u>plat</u> sur S . De plus, on se convainc qu'il n'est raisonnable de s'attendre à l'existence d'une solution, pour des Y assez généraux, que si X est de plus <u>propre</u> sur S . Il semble par ailleurs que ces conditions soient suffisantes pour l'existence de $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_S(X , Y)$ et $\prod_{X/S} Z$, à condition le cas échéant de faire une hypothèse genre "quasi-projective" sur Y/S resp. sur Z/X ; c'est ce qu'on peut vérifier en tous cas dans des cas assez nombreux (par exemple, lorsque Y est <u>affine</u> sur S ; ou, par constructions directes élémentaires, lorsque X est <u>fini</u> sur S). Voici ce que donnent les théorèmes 1 et 2 :

PROPOSITION 2, 1. - Soient Λ un anneau noethérien, X et Y deux pré-schémas quelconques sur Λ, considérons le foncteur

$$F(A) = \mathrm{Hom}_A(X_A , Y_A)$$

sur la catégorie $\underset{\sim}{C}_o$ des Λ-algèbres artiniennes. Si X est plat sur Λ, ce foncteur est pro-représentable.

De plus, on vérifie que pour tout $A \in \underset{\sim}{C}_o$ et $\xi \in F(A)$, on a un isomorphisme canonique

$$F(I_A , \xi) = H^1(X_A , \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\underset{\sim}{O}_{X_A}}(\xi^*(\underset{\sim}{\Omega}^1_{Y_A/A}) , \underset{\sim}{O}_{X_A})$$

où $\underset{\sim}{\Omega}^1_{Y_A/A}$ est le faisceau des 1-différentielles de Kähler de Y_A par rapport à A. Prenant pour A un corps, on trouve, utilisant A. 5, 1. et le théorème de finitude de [2] le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - Supposons X plat et propre sur S, Y localement de type fini sur S. Alors F est pro-représentable et les composants locaux de la Λ-algèbre topologique correspondante sont des anneaux <u>noethériens</u>.

REMARQUES. - Les problèmes envisagés dans ce numéro, et de nombreux autres, étaient étudiés communément, dans le cadre de la géométrie algébrique classique, à l'aide des "coordonnées de Chow" des cycles dans l'espace projectif, permettant de considérer ces cycles comme des points de variétés projectives convenables. Ce procédé, et de façon générale l'utilisation des coordonnées de Chow, semble irrémédiablement insuffisant dans le point de vue des schémas, car il détruit les éléments nilpotents dans les variétés de paramètres, et en particulier, ne se prête pas à une étude satisfaisante des variations infinitésimales de cycles (sans compter sa nature non intrinsèque, liée à l'espace projectif). Le langage des coordonnées de Chow était malheureusement le seul utilisé par de nombreux géomètres algébristes pour l'étude des familles de variétés ou des familles de cycles, ce qui semble avoir été un obstacle sérieux à la clarification de ces notions, malgré son intérêt technique certain (probablement provisoire). Si on veut obtenir l'analogue des variétés de Chow en théorie des schémas, on est conduit au problème universel suivant : soit X un pré-schéma sur S, pour tout pré-schéma T sur S, on considère l'ensemble F(T) des sous-pré-schémas fermés de $X_T = X \times_S T$ qui sont <u>plats</u> sur T. On essaie de représenter ce foncteur en T à l'aide d'un pré-schéma sur S. Plus généralement, on peut se donner un faisceau quasi-cohérent G sur X, et prendre pour F(T) l'ensemble des faisceaux quotients de G_T qui sont plats sur T . Il semble qu'il existe une solution du problème, avec un schéma C localement de type fini sur S , lorsque X est propre sur S localement noethérien et lorsque F est de plus cohérent. En tous cas, supposant seulement S localement noethérien, la restriction de F aux " S-algèbres artiniennes" est pro-représentable, et si de plus X est propre sur S et F cohérent, les composants locaux de l'anneau topologique 0 correspondants sont noethériens. Bien entendu, même une fois prouvée l'existence du "schéma de Chow" de X sur S , il restera à en trouver une décomposition en ouverts disjoints C_i (correspondants à la fixation d'invariants continus tels que degré et dimension des cycles qu'on fait varier), qui soient de <u>type fini</u> (et non seulement localement de type fini) sur S , à préciser les relations de ce schéma avec les classiques variétés de Chow et à préciser quand un C_i est même <u>projectif</u> ou du moins quasi-projectif sur S .

3. <u>Schémas de Picard</u>.

Soit $f : X \to S$ un S-pré-schéma, considérons le faisceau multiplicatif $\underset{\sim}{O}_X^*$ des unités du faisceau structural de X , et le groupe

$$P(X/S) = H^0(S , R^1 f_*(\underset{\sim}{O}_X))$$

appelé <u>groupe de Picard relatif</u> de X/S . Un élément de ce groupe est donc défini en se donnant un recouvrement ouvert (U_i) de S , et un faisceau inversible $\underset{\sim}{L}_i$ sur chaque $f^{-1}(U_i)$, de telle façon que pour tout couple (i , j) , $\underset{\sim}{L}_i | f^{-1}(U_i \cap U_j)$ soit isomorphe à $\underset{\sim}{L}_j | f^{-1}(U_i \cap U_j)$, du moins localement au-dessus de $U_i \cap U_j$ (i. e. ces deux faisceaux sont "équivalents" au sens de [3], B, 4.). Si X/S admet une section, alors $P(X/S)$ n'est autre que l'ensemble des classes de faisceaux inversibles sur X/S à "équivalence" près (loco citato). Posons maintenant, pour tout T sur S :

$$F(T) = P(X_T/T)$$

on obtient un foncteur covariant en T , qu'on pourra appeler le <u>foncteur de Picard</u> de X/S ; si ce foncteur est représentable, le pré-schéma sur S qui le représente sera appelé le <u>pré-schéma de Picard</u> de X/S et noté $\underset{\sim}{P}(X/S)$. On aura donc un isomorphisme de foncteurs :

$$\mathrm{Hom}_S(T , \underset{\sim}{P}(X/S)) \xrightarrow{\sim} P(X_T/T) \quad .$$

La formation de pré-schémas de Picard est compatible avec l'extension de la base, en particulier, les pré-schémas de Picard des fibres de X sur S (qui sont des pré-schémas sur les corps résiduels $K(s)$ des $s \in S$) sont les fibres de $\underline{P}(X/S)$. Bien entendu, comme $P(X_T/T) = F(T)$ est un groupe commutatif, les pré-schémas de Picard sont des pré-schémas en groupes. Notons aussi que les jacobiennes généralisées de ROSENLICHT ne sont autres que les composantes connexes de l'unité dans les schémas de Picard de courbes complètes pouvant avoir des singularités, ce qui devrait rendre évidentes la plupart de leurs propriétés (une fois démontrée l'existence).

REMARQUE. - La définition adoptée ici n'est raisonnable que lorsque tout point de Y admet un voisinage ouvert U sur lequel X admette une section. Dans le cas général, il faut modifier un peu la définition du foncteur de Picard, pour pouvoir obtenir encore un théorème d'existence.

Ici, les conditions plausibles d'existence d'un pré-schéma de Picard sont les suivantes : X est propre et plat sur S , $f_*(\underline{O}_X) = \underline{O}_S$, et X admet localement une section sur S . Cette condition s'introduit de façon naturelle dans l'application de la technique de descente, pour éliminer les automorphismes d'un faisceau inversible $\underline{L}$ sur X en le munissant d'une section marquée au-dessus de la section s ([3], B, 4). On trouve notamment :

PROPOSITION 3, 1. - Supposons X plat sur $S = \mathrm{Spec}(\Lambda)$, Λ noethérien, et que pour tout T de type fini sur S , on ait $f_{T*}(\underline{O}_{X_T}) = \underline{O}_T$ (si f est propre et à fibres séparables ou si S est le spectre d'un corps, il résulte de Künneth que la dernière condition équivaut à $f_*(\underline{O}_X) = \underline{O}_S$. Alors le foncteur de Picard de X/S sur la catégorie des Λ-algèbres artiniennes est pro-représentable.

De plus, on aura ici :

$$F(I_A , \xi) = H^1(X_A , \underline{O}_{X_A})$$

en particulier :

COROLLAIRE. - Si X est propre sur S , alors les composants locaux de la Λ-algèbre topologique O correspondant au foncteur de Picard sont noethériens.

REMARQUES. - On peut généraliser les définitions et résultats de ce numéro à la classification des fibrés principaux sur X , à groupe structural un schéma en groupes G sur S qui est affine et plat sur S , et commutatif. Dans le cas où G ne serait pas commutatif, donc le fibré en groupes adjoint d'un fibré principal (dont les sections sont les automorphismes du fibré principal) n'est plus trivial, la proposition 3, 1 ne reste plus valable telle quelle. On peut cependant modifier le problème universel de façon à obtenir encore une solution (du moins, pour l'instant, en géométrie formelle). La règle d'or à retenir, dans le contexte du présent numéro et des suivants, et chaque fois qu'on cherche des "schémas de modules" pour des classes d'objets qui ne sont définis qu'à un isomorphisme près, reste toujours la suivante : éliminer les automorphismes éventuels des objets qu'on veut classifier, par l'introduction si besoin est de structures auxiliaires (points ou éléments de sections marquées, fixation de formes différentielles, etc.), qu'on prendra assez anodines pour ne pas modifier de façon substantielle le problème initial.

4. Modules formels d'une variété.

Soit Λ un anneau local noethérien de corps résiduel k (le plus souvent, Λ sera égal à k, ou à un p-anneau de Cohen) X_0 un pré-schéma sur k. Pour toute Λ-algèbre artinienne locale A, on considère l'ensemble $F(A)$ des classes à un isomorphisme près de A-pré-schémas X plats sur A, munis d'un isomorphisme

$$(*) \qquad X \otimes_A \mathcal{K}(A) \xleftarrow{\sim} X_0 \otimes_k \mathcal{K}(A)$$

où $\mathcal{K}(A)$ est le corps résiduel de A ; bien entendu, les isomorphismes entre tels A-pré-schémas plats doivent respecter l'isomorphisme précédent donné dans la structure. Si A est une Λ-algèbre artinienne non nécessairement locale, de composantes locales A_i, on prend pour $F(A)$ le produit des $F(A_i)$. Ainsi F devient un foncteur multiplicatif en A, qu'on pourra appeler le foncteur des modules pour X_0 (et Λ). Si ce foncteur est représentable, il lui correspond une Λ-algèbre topologique O locale, de corps résiduel k, et le spectre formel de O sera appelé schéma formel des modules pour X_0 (et Λ), cf. [2] pour quelques détails sur cette notion.

Ici, pour appliquer la technique de descente, les automorphismes "finis" de X_0 sont inoffensifs, car ils sont sans influence sur l'existence d'automorphismes (au sens précisé plus haut) des A-pré-schémas X ; la condition nécessaire et suffisante, lorsque A n'est pas réduit à un corps, pour que X n'ait pas de A-automorphisme non trivial, est qu'on ait

$$H^0(X_0 , \mathfrak{G}_{X_0/k}) = 0$$

où $\mathfrak{G}_{X_0/k}$ désigne le faisceau des k-dérivations (= faisceau tangent) de X_0.
On trouve d'ailleurs facilement (du moins si X_0 est simple sur k),

$$F(I_A , \xi) = H^1(X_A , \mathfrak{G}_{X_A/A})$$

On en conclut alors, comme d'habitude :

PROPOSITION 4, 1. - Supposons que $H^0(X_0, \mathcal{G}_{X_0/k}) = 0$. Alors le schéma formel des modules pour X_0 existe. Si de plus X_0 est propre sur k , le schéma formel des modules est noethérien.

REMARQUES.

1° Lorsque X_0 n'est pas supposé simple sur k , $F(I_A, \xi)$ s'identifie à un sous-A-module de

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{P_A}}(P_A ; \mathcal{I}_{X_A}, \mathcal{O}_{X_A})$$

où on pose $P_A = X_A \times_A X_A$, où $\mathcal{O}_{X_A}$ est regardé comme un faisceau cohérent sur P_A grâce au morphisme diagonal $X_A \to P_A$, et où $\mathcal{I}_{X_A}$ désigne le faisceau cohérent d'idéaux sur P_A défini par le morphisme diagonal. De façon précise, une globalisation facile de la théorie de Hochschild montre que le Ext^1 ci-dessus s'identifie à l'ensemble des classes, à un isomorphisme près, de faisceaux de I_A-algèbres plates $\mathcal{O}$ sur X_A , munies d'un isomorphisme d'augmentation $\mathcal{O} \otimes_{I_A} A \to \mathcal{O}_{X_A}$ (on rappelle que l'on pose $I_A = At/(t^2)$). Le sous-module $F(I_A, \xi)$ est celui qui correspond aux faisceaux d'algèbres <u>commutatives</u>. Les hypothèses de simplicité ne sont donc pas essentielles en théorie des modules, comme [2] le laissait entendre.

2° Rappelons (loco citato) qu'en particulier, toute <u>courbe algébrique</u> X_0 <u>simple</u> et <u>propre</u> sur k admet un schéma formel des modules, simple sur Λ, de dimension relative $3g - 3$ si le genre g est ≥ 2 , g si $g = 0$ ou 1 . Ces deux derniers cas ne rentrent plus directement dans la proposition 4, 1. On pourrait cependant s'y ramener; dans le cas des courbes elliptiques $(g = 1)$ grâce aux considérations qui vont suivre.

On peut bien entendu, varier ad libitum la proposition 4, 1 en considérant des systèmes de schémas sur k , munis de structures diverses. Supposons par exemple, que X_0 soit un <u>schéma abélien</u> sur k , à point origine marqué (i. e. X_0 est considéré comme un schéma en <u>groupes</u> sur k), et soit $F(A)$ l'ensemble des classes à un isomorphisme près, de schémas <u>abéliens</u> sur A (i. e. de schémas en groupes propres et simples sur A) munis d'un isomorphisme de schémas abéliens (*) . On vérifie que l'imposition d'une structure multiplicative (et même seulement, d'une "section unité") élimine les automorphismes infinitésimaux, et qu'il existe par suite un schéma formel de modules, correspondant à un anneau local complet noethérien $\mathcal{O}$. On peut d'ailleurs montrer que, si X est un schéma propre et simple à fibres "absolument connexes" au-dessus d'un pré-schéma localement noethérien S , toute structure multiplicative sur X admettant une section unité est nécessairement associative et commutative (pourvu du moins qu'elle le soit sur <u>une</u> fibre et que S soit connexe) et est de plus uniquement déterminée par la connaissance de la section unité. De plus, supposant que S est le spectre d'un anneau local artinien A de corps résiduel k, X propre sur A et muni d'une section s, et enfin $X \otimes_A k$ muni d'une structure de schéma abélien sur k, admettant pour élément neutre le point de $X \otimes_A k$ correspondant à s, un calcul facile d'obstructions joint à un raisonnement dû à SERRE permet de prouver qu'il existe effectivement sur X une structure multiplicative admettant la section s comme section unité. (A partir de là, utilisant le "théorème d'existence" de [2] pour passer au cas où A est noethérien local complet, puis la technique de descente de [3] pour le cas général, on peut prouver l'énoncé analogue pour tout S localement noethérien connexe). Cela prouve que le foncteur $F(A)$ considéré ici est isomorphe au foncteur analogue défini au début de ce numéro en faisant abstraction de la structure multiplicative sur X_0. Il s'ensuit en particulier que, si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de 0, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est canoniquement isomorphe au dual de $H^1(X_0, \mathcal{G}_{X_0/k})$ et est donc de dimension n^2, où $n = \dim X_0$. Il serait fort intéressant de déterminer si 0 est bien <u>simple</u> sur Λ, i. e. isomorphe à une algèbre de séries formelles à n^2 indéterminées sur Λ. Le paragraphe 1, proposition 5, 2 permet de donner une formulation équivalente de ce problème comme un <u>problème d'existence de schémas abéliens se réduisant suivant un schéma abélien donné</u>. On voit en tous cas, par voie transcendante, que la réponse est affirmative si k est de caractéristique 0. En caractéristique $p \neq 0$, il suffit évidemment de se borner au cas où Λ est l'anneau des vecteurs de Witt construit sur un corps algébriquement clos k. Ce serait peut-être le moment pour le "<u>foncteur de Greenberg</u>" de faire ses preuves...

5. <u>Extension des revêtements</u>.

Soient $\mathfrak{X}$ un pré-schéma <u>formel</u> noethérien [2], U une partie ouverte de $\mathfrak{X}$, définie localement par la "non annulation" d'une section de $\underset{\sim}{O}_{\mathfrak{X}}$ qui est non diviseur de zéro , donc assez gros pour que toute section de $\underset{\sim}{O}_{\mathfrak{X}}$ sur un ouvert V nulle sur $U \cap V$ soit nulle. Soit $\mathfrak{J}$ un "idéal de définition" pour $\mathfrak{X}$, et soit $X_n = (\mathfrak{X}, \underset{\sim}{O}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{J}^{n+1})$, qui est donc un pré-schéma noethérien ordinaire. Si alors $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}''$ sont deux <u>revêtements plats</u> de $\mathfrak{X}$, (i. e. deux pré-schémas sur $\mathfrak{X}$ définis par des faisceaux d'algèbres qui sont cohérents et localement libres comme faisceaux de modules), <u>non ramifiés sur</u> U, l'application évidente

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}', \mathfrak{X}'') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{X_0}(X_0', X_0'')$$

est <u>injective</u>, en particulier <u>un automorphisme de</u> $\mathfrak{X}'$ <u>qui induit l'identité sur</u> X_0' <u>est l'identité</u>. Cela permet d'appliquer à la situation la technique de descente. Partons en particulier, d'un revêtement plat X_0' de X_0, non ramifié au-dessus de U_o , soit $G(\mathfrak{X})$ l'ensemble des classes, à un isomorphisme près (induisant l'identité sur X'_o) de revêtements plats $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$ qui induisent X'_o sur X_o (et sont donc nécessairement non ramifiés sur U). On définit de même $G(V)$ pour toute partie ouverte V de $\mathfrak{X}$, et plus généralement $G(\mathfrak{Y})$ pour tout pré-schéma formel $\mathfrak{Y}$ au-dessus de $\mathfrak{X}$. Cela dit, les résultats de [2] et [3] impliquent d'abord les résultats suivants :

a. Lorsque V est un ouvert variable de $\mathfrak{X}$, les $G(V)$ forment un <u>faisceau</u> sur $\mathfrak{X}$, soit $\underset{\sim}{G}_{\mathfrak{X}} = \underset{\sim}{G}$. La restriction de ce faisceau à U est le faisceau <u>constant</u> dont les fibres sont réduites à un élément.

De façon plus générale, la détermination des fibres de $\underset{\sim}{G}_{\mathfrak{X}}$ est une question d'anneaux locaux complets, de façon précise :

b. Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, on a $\underset{\sim}{G}_x = G(\mathrm{Spec}(\hat{\underset{\sim}{O}}_{\mathfrak{X},x}))$ (= classes à un isomorphisme près d'algèbres finies et libres B sur $\hat{\underset{\sim}{O}}_{\mathfrak{X},x}$ munies d'un isomorphisme de $B \otimes_{\hat{\underset{\sim}{O}}_{\mathfrak{X},x}} \underset{\sim}{O}_{X_o,x}$ avec $\underset{\sim}{O}'_{ox}$, où $\underset{\sim}{O}'_o$ est le faisceau d'algèbres sur X_o qui définit X'_o).

c. On a un isomorphisme canonique $\underset{\sim}{G}_{\mathfrak{X}} = \varprojlim \underset{\sim}{G}_{\mathfrak{X}_n}$, en d'autres termes, pour tout ouvert V de $\mathfrak{X}$, on a $G(V) = \varprojlim G(V_n)$.

d. Supposons que $\mathfrak{X}$ se déduise d'un schéma ordinaire <u>propre</u> X sur un anneau local noethérien complet Λ ayant un idéal de définition $\mathfrak{m}$, en prenant le complété $\underset{\sim}{J}$-adique de $\underset{\sim}{O}_X$, où $\underset{\sim}{J} = \mathfrak{m}.\underset{\sim}{O}_X$. Alors $G(\mathfrak{X})$ est canoniquement isomorphe à l'ensemble des classes de revêtement plats du schéma <u>ordinaire</u> X qui "se réduisent suivant X'_o ".

De façon imagée, on peut dire que (a) et (b) établissent les relations fondamentales entre l'aspect local et l'aspect global du problème, (c) donne les relations entre l'aspect "fini" et l'aspect "infinitésimal" , enfin (d) rappelle (sous les conditions précisées) l'identité entre l'aspect "formel" et l'aspect "algébrique".

Supposons maintenant que $\mathfrak{X}$ soit défini sur un anneau local noethérien complet Λ , avec $\underset{\sim}{J} = \mathfrak{m}\underset{\sim}{O}_{\mathfrak{X}}$ (donc X_o est un pré-schéma sur $\Lambda/\mathfrak{m}$). Pour toute algèbre A finie sur Λ , posons

$$F(A) = G(\mathfrak{X} \times_{\Lambda} A) \quad .$$

C'est un foncteur covariant en A , à valeurs dans la catégorie des ensembles, et d'après (c) ce foncteur est complètement connu si on le connaît pour A artinien ; et il revient au même de dire que ce foncteur est pro-représentable, i. e. de la forme

$$F(A) = \mathrm{Hom}_{\Lambda\text{-algèbres top.}}(\mathcal{O} , A)$$

où $\mathcal{O}$ est une Λ-algèbre topologique du type envisagé dans A, paragraphe 5,.ou de dire qu'il en est de même quand on se restreint aux A artiniens. La conjonction des théorèmes 1 et 2 implique alors effectivement:

PROPOSITION 5, 1. - Le foncteur précédent est pro-représentable.

Bien entendu, d'après (a), si $U = \mathfrak{X}$, $G(\mathcal{Y})$ est réduit à un seul élément pour tout $\mathcal{Y}$ sur $\mathfrak{X}$, et le foncteur F est alors sans grand intérêt (on aura $\mathcal{O} = \Lambda$). Il semble que dans pratiquement tout autre cas, l'anneau local topologique $\mathcal{O}$ n'est pas noethérien. Son existence met néanmoins en évidence, de façon frappante, la nature "continue" de l'ensemble $G(\mathfrak{X})$ des solutions (correspondant intuitivement au fait qu'il y a un choix "continu" dans la façon dont la ramification se propage quand on fait une extension de X'_0). On comparera ce résultat avec le point de vue de J. P. SERRE [4] en théorie du corps de classes local, mettant lui aussi en évidence le caractère continu du groupe de Galois topologique de l'extension abélienne maximale d'un corps local "géométrique", le groupe dual (au sens de Pontrjagin) y apparaissant comme une limite inductive de groupes algébriques (ou du moins quasi-algébriques) ; ici aussi, la classification des extensions est donnée par des "variétés" de dimension infinie. D'ailleurs, on peut prendre dans ce qui précède pour $\mathfrak{X}$ le spectre formel d'un anneau local complet (dont Λ sera par exemple, un sous-anneau de Cohen), et on peut espérer que les résultats de ce numéro puissent être utilisés dans l'étude des extensions d'un anneau local complet de dimension >1 . Aussi bien dans le cas local que global, ils permettront peut-être de formuler des relations précises entre les phénomènes de ramification supérieure, et des phénomènes en caractéristique 0 (abordables par voie transcendante). En tous cas, c'est l'analyse préliminaire à la proposition 5, 1 qui permet d'étendre au cas "tamely ramified" les méthodes exposées dans [2] pour l'étude du groupe fondamental, et de résoudre par voie transcendante le "problème des trois points".

Pour finir, signalons que la situation se simplifie lorsque X_0 est de dimension 1 : alors, en vertu de (a) et (b) $G(\mathfrak{X})$ s'identifie à $\prod_i G(\mathrm{Spec}(\underset{\sim}{O}_{\mathfrak{X},x_i}))$, où les x_i sont les points de $X_0 - U$: on peut se donner arbitrairement les extensions "locales" aux points de ramification. De plus, lorsque X_0 est normale, on constate que le schéma formel des modules garanti par 5, 1 est simple sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GROTHENDIECK (Alexander). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., t. 9, 1957, p. 119-221.

[2] GROTHENDIECK (Alexander). - Géométrie formelle et géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, fasc. 3, n° 182.

[3] GROTHENDIECK (Alexander). - Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I : Généralités, Descente par morphismes fidèlement plats, Séminaire Bourbaki, t. 12, 1959/60, fasc. 1, n° 190.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Corps locaux et isogénies, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, fasc. 3, n° 185.