Masarykova univerzita

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

BOOLEOVA ALGEBRA A JEJÍ MODELY

Bakalářská práce

Brno 2019

Vedoucí bakalářské práce: Autor práce:

doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc. Patricie Plesníková

Bibliografická citace

PLESNÍKOVÁ, Patricie. *Booleova algebra a její modely*. Brno, 2019. Bakalářská práce. Masarykova univerzita. Pedagogická fakulta. Katedra matematiky. Vedoucí práce doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc.

Anotace

Bakalářská práce *Booleova algebra a její modely* se zaměřuje na problematiku Booleovy algebry, jejích modelů a využití této problematiky v praxi v tzv. Booleovském počítání. Práce může sloužit jako shrnutí oblastí, kterými jsou množiny a Vennovy diagramy, výroková logika, operace na množinách a jejich vlastnosti a samotná Booleova algebra, pro studenty gymnázií a vysokých škol. Bakalářská práce nabízí možnost procvičení získaných znalostí na množství řešených příkladů. Součástí práce je také menší výzkum mapující povědomí a zájem o výuku Booleovy algebry na gymnáziích v České republice.

Klíčová slova

Booleova algebra, Booleovské počítání, množina, Vennův diagram, průnik, sjednocení, doplněk, výroková logika, výrok, výroková formule, logické spojky, tautologie, kartézský součin množin, binární operace, unární operace, princip duality, množinová algebra, algebra pravdivostních hodnot

Abstract

The bachelor thesis *Boolean algebra and its* models focuses on matters of Boolean algebra, its models and usage of this issue in practice in so-called Boolean numeration. The thesis can be used as a summary of areas such as sets, Venn´s diagrams, propositional logic, sets operations and their properties and Boolean algebra itself, for students of grammar schools and universities. The bachelor thesis offers the possibility to practise acquired knowledge on several solved examples. The bachelor thesis also includes small research which survey awareness and an interest in teaching Boolean algebra at grammar schools in the Czech Republic.

Keywords

Boolean algebra, Boolean numeration, set, Venn’s diagram, intersection, unification, cofactor, propositional logic, predicament, propositional formula, logical couplings, tautology, Cartesian product of sets, binary operation, unary operation, duality principle, set algebra, truth value algebra

Prohlášení o původnosti

„Prohlašuji, že jsem závěrečnou vypracovala samostatně, s využitím pouze citovaných pramenů, dalších informací a zdrojů v souladu s Disciplinárním řádem pro studenty Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity a se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů.“

V Brně dne 28. 3. 2019

………………………

Patricie Plesníková

Poděkování

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Jaroslavu Beránkovi, CSc. za odborné vedení, za jeho rady, pomoc a čas, který mi věnoval při zpracování této práce. V neposlední řadě také děkuji všem respondentům, kteří mi poskytli potřebné informace.

Obsah

Úvod

V mé bakalářské práci se budu zabývat problematikou Booleovy algebry. Booleova algebra není téma, které by se často vyučovalo na středních nebo vysokých školách. Jelikož je však tato problematika velice zajímavá, rozhodla jsem ji zpracovat v mé bakalářské práci tak, aby byla přívětivější pro studenty jak středních, tak i vysokých škol. To je také důvodem, proč je text pojat spíše z populárního než z odborného hlediska. V každé kapitole jsou nadefinovány důležité pojmy a vlastnosti jednotlivých matematických jevů tak, aby bylo možné používat je v praxi. Za každou kapitolou následují příklady s postupným řešením, aby bylo možné nabyté informace ihned aplikovat. Čtenáři se postupně dozví, kdo to byl George Boole a za co mu vděčíme, zopakují si, co je to množina a pojmy s ní spojené, co je to Vennův diagram a jak s ním pracovat, základní informace o výrokové logice, o operacích na množinách a jejich vlastnostech a konečně o samotné Booleově algebře a pravidlech Booleovského počítání.

Problém, který Booleovská algebra řeší, jsou dlouhé a složité zápisy množin, které už nelze graficky znázornit ve Vennově diagramu. Vennův diagram je možné použít maximálně pro čtyři množiny. Zápisy obsahující pět a více množin jsou tedy pro použití této metody velice obtížné nebo dokonce neřešitelné. Je tedy potřeba najít jiné řešení, pomocí kterého komplikované zápisy zjednodušit. Tímto řešením je soubor axiomů, díky kterým se zápisy množin značně zkrátí a simplifikují. Dalším problémem, který Booleovské počítání zjednodušuje, jsou složité zápisy výrokových formulí. Pro řešení jednodušších zápisů používáme tabulky, ve kterých postupně určujeme pravdivostní hodnoty jednotlivých částí výrokových formulí. Pro delší zápisy je však opět tato metoda nevhodná, jelikož tabulky, pomocí kterých bychom museli komplexní příklady řešit, by nabyly enormních velikostí. Díky axiomům můžeme zápisy opět zjednodušit až do podoby, kdy je možné výrokové formule pravdivostně ohodnotit. Příklady v mé bakalářské práci jsou nejčastěji inspirovány publikací [5].

V praktické části mé bakalářské práce je uveden výzkum, který proběhl formou sběru online dotazníků od učitelů matematiky na několika vybraných gymnáziích v České republice. Dotazník byl odeslán prostřednictvím emailů ředitelům gymnázií, kteří jej dále rozeslali učitelům, vyučujícím matematiku na jejich gymnáziích. Cílem dotazníku bylo zjistit, jaké je povědomí učitelů v praxi o Booleově algebře a zda by dané učivo zařadili do běžné výuky nebo alespoň do výuky seminářů matematiky na středních školách.

1 George Boole

V úvodu mé bakalářské práce bych chtěla uvést několik informací o životě George Boolea (obr. 1), o jeho dílech a zásluhách.

1.1 Mládí George Boolea

George Boole se narodil 2. listopadu 1815 ve městě Lincoln v Anglii a zemřel 8. prosince 1864 v Ballintemple v Irsku ve věku 49 let. Příčinou úmrtí byl zápal plic. George Boole byl britský matematik, který pomohl rozvinout moderní symbolickou logiku a jehož logická algebra, dnes nazývána Booleova algebra, tvoří základ digitálních počítačových obvodů. [2]

Jelikož George Boole pocházel z rodiny obchodníka, nebylo mu umožněno získat vyšší vzdělání. Jeho touha přiblížit se vyšší společnosti ho však motivovala k rozhodnutí, že se latinsky a řecky naučí sám. Ve 12 letech přeložil z latiny do angličtiny ódu Horace. Jeho otec byl tak hrdý, že jeho práci otiskl do místních novin. Ohlasy kritiků však nebyly vůbec pozitivní. Několik z nich popřelo, že by byl chlapec Booleova věku schopný přeložit tak složité dílo a zároveň vypíchlo jeho chyby, což George Boola ponížilo. [1]

Důležitým člověkem v Booleově životě byl jeho otec, který ho učil jak základy matematiky, tak také vyrábět optické nástroje. Kromě pomoci od svého otce a pár let strávených na místních školách, byl George Boole spíše samouk. Po krachu otcova podniku musel začít pracovat, aby se mohl postarat o svou rodinu. Od svých 16 let učil na vesnických školách ve West Riding of Yorkshire a ve věku 20 let si dokonce otevřel svoji vlastní školu ve městě Lincoln. Jelikož byl velice nespokojen s učebnicemi matematiky, rozhodl se, že se pokusí napsat svou vlastní knihu. Ve volném čase si četl matematické časopisy a začal řešit pokročilé problémy algebry. [2]

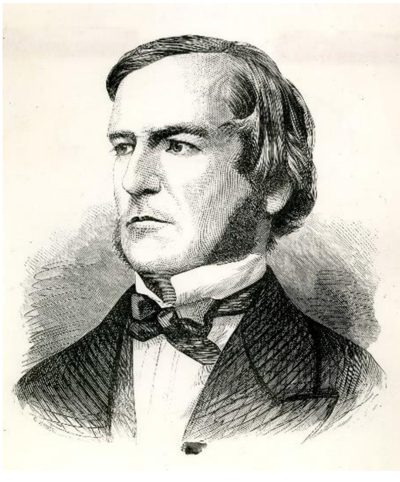
1.2 Dílo George Boolea

George Boole přispíval svými postřehy do *Cabridge Mathematical Journal*. Jedním z jeho prvních příspěvků byly výzkumy *Researches of the Theory of Analytical Transformations,* týkající se diferenciálních rovnic a algebraických problémů lineárních proměnných. V roce 1844 získal první zlatou medaili pro matematiky. V roce 1847 vydal brožuru *Mathematical Analysis of Logic*, ve které tvrdil, že logika by měla být spojována s matematikou, nikoli pouze s filozofií. Na základě svých publikací byl Boole jmenován profesorem matematiky na Queen's College i přesto, že neměl žádný univerzitní titul.

V roce 1855 se oženil s Mary Everest – neteří Sira George Everesta, po němž je pojmenována nejvyšší hora světa Mount Everest. [2]

Jako jeden z prvních Angličanů píšící o logice, Boole vypíchl analogii mezi algebraickými symboly a těmi, které reprezentují logické formy a úsudky. Poukázal na to, jakou mohou mít symboly pro množství spojitost se symboly pro operace. Booleova pozoruhodná obecná symbolická metoda logického úsudku plně započala vydáním jeho nejdůležitějšího díla *An Investigation into the Laws of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (1854), které umožnilo zakreslit do prostoru jakékoli množství termínů. Také se pokusil o obecnou metodu v pravděpodobnosti, která by umožnila ze zadané pravděpodobnosti systému události odvodit vyplývající pravděpodobnost jiných událostí logicky spojených se zadaným případem. [2]

V roce 1857 byl Boole zvolen členem Královské společnosti. Booleovo vlivné dílo *Treatise on Differentila Equations* (1859) bylo o rok později následováno dalším dílem *Treatise on the Calulus of Finite Differences*. Tato dvě díla, která obsahují Booleovy nejdůležitější objevy, byla mnoho let používána jako učebnice. Přínos George Boolea do matematiky má mnoho moderních využití. Jeho obtížně pochopitelné úvahy vedly k užitím, o kterých on sám nikdy ani nesnil, jelikož například o počítačích nemohlo být v době jeho života ani uvažováno. [2] Booleova algebra přispěla k existenci elektrického počítače používajícího binární soustavu a logické elementy, počítačového programování, elektrického inženýrství, satelitních obrazů, elektrických obvodů, telefonních okruhů, a dokonce Einsteinovy teorie relativity. [1]



Obrázek 1 George Boole [2]

2 Množiny a Vennovy diagramy

2.1 Množina

Definice 2.1.1

Množina je libovolně, jednoznačně vymezený souhrn nějakých objektů, které nazýváme *prvky* množiny. [3]

Poznámka 2.1.1

- Pro označení množin budeme používat velká latinská písmena a pro označení prvků množin malá latinská písmena.
- Základní, a přitom vlastně jedinou vlastností množin je, že obsahují prvky.
- Skutečnost, že objekt x je prvkem množiny A (tzn. x patří do A) budeme zapisovat: $x \in A$.
- Skutečnost, že objekt x není prvkem množiny A (tzn. x nepatří do A) pak budeme zapisovat: $x \notin A$. [3]
- Říkáme, že množina je určena, jestliže o každém objektu umíme jednoznačně rozhodnout, zda je jejím prvkem či nikoliv.
- Množiny lze určovat charakteristickou vlastností. V případě konečných množin také výčtem (tj. vypsáním) všech jejich prvků. [5]
- V běžném jazyce se slovo množina nahrazuje slovy: hromada (kamení), hejno (hus), sbírka (poštovních známek), …

Několik příkladů množin:

a) Množina krajů v ČR k dnešnímu dni.
b) Množina všech českých řek, které ústí do moře.
c) Množina všech samohlásek používaných v českém jazyce.
d) A je množina všech sudých čísel: $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
e) B je množina všech prvočísel menších než číslo 8: $B = \{2, 3, 5, 7\}$

Množiny d) a e) jsou zcela jiného druhu než přechozí množiny, protože jejich prvky jsou objekty ideální. [9]

Množiny lze určit dvojím způsobem:

a) Výpis prvků:
   - Do složených závorek vypíšeme seznam prvků, ze kterých se množina skládá.
   - Důležité je, že na pořadí prvků v seznamu nezáleží.
   - Uvažujeme-li množinu M všech českých řek, které ústí do moře, určením množiny bude M = {Labe, Odra, Dunaj}, nebo stručněji M = {L, O, D}. Množinu M jsme zapsali výčtem prvků.
   - Každý prvek množiny má být v zápisu množiny zastoupen právě jedním symbolem. Nechceme-li například zcela vyloučit zápisy množin typu {a, a}, {a, b, a}, apod. je třeba dohodnout se na tom, že budeme považovat za správný zápis {a, a} = {a}, {a, b, a} = {a, b}, apod.
   - Je zřejmé, že výčtem prvků nelze zapsat každou množinu, např. množinu A všech sudých čísel zapisujeme výčtem pouze několika prvků a existenci dalších prvků uvažované množiny vyznačíme dále několika tečkami. A = {2, 4, 6, 8, …}. [9]

b) Určení charakteristickou vlastností:
   - Druhým způsobem zápisu množiny M všech českých řek, které ústí do moře je M = {x; x je česká řeka ústící do moře}. Čteme „množina M se skládá právě z takových prvků x, že x je česká řeka ústící do moře.“ O tomto zápisu říkáme, že množina M je určena charakteristickou vlastností (zde je charakteristická vlastnost: „prvek x je česká řeka ústící do moře“). [9]

Definice 2.1.2

Prázdnou množinou nazýváme množinu, jež neobsahuje žádný prvek. Označujeme ji symbolem ∅ nebo { }. Množina, která není prázdná, se nazývá *neprázdná množina*. [5]

Pro označování základních číselných množin jsou použity následující standardní symboly:

$\mathbb{N}$ . . . množina všech přirozených čísel
$\mathbb{Z}$ . . . množina všech celých čísel
$\mathbb{Q}$ . . . množina všech racionálních čísel
$\mathbb{R}$ . . . množina všech reálných čísel

$\mathbb{C}$ . . . množina všech komplexních čísel [3]

Definice 2.1.3

Množinu A nazýváme *podmnožinou* množiny B, právě když platí: každý prvek množiny A je také prvkem množiny B. Zapisujeme: $A \subset B$. [5]

Definice 2.1.4

Rovnost množin: Říkáme, že množiny A, B jsou si rovny, právě když platí $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$. K zápisu rovnosti množin používáme obyčejného rovnítka; píšeme $A = B$. [5]

Definice 2.1.5

Nerovnost množin: Nejsou-li splněny obě podmínky ve výše uvedené definici, říkáme, že množiny A, B jsou různé, a zapisujeme $A \neq B$. [5]

2.2 Vennovy diagramy

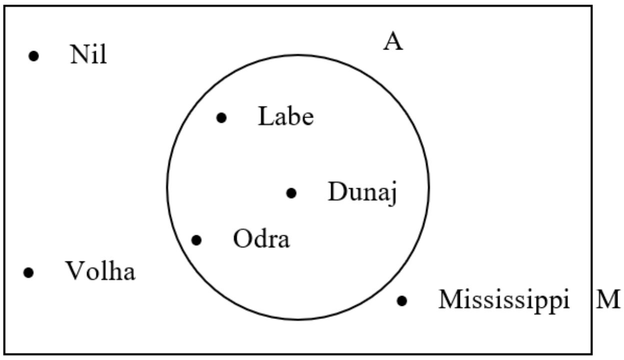
Definice 2.2.1

Vennův diagram je grafické znázornění množin. Ve Vennových diagramech jsou množiny zachyceny jako část roviny ohraničená uzavřenou křivkou. V jednodušších případech postačí kruh (část roviny ohraničená kružnicí), při větším počtu množin se používají složitější tvary. [4]

Poznámka 2.2.1

- Pro odvozování obecných vztahů mezi množinami se používá schéma, které přestavil anglický vědec a kněz John Venn v 19. století, a proto jej nazýváme Vennův (množinový) diagram.
- Tento diagram umožňuje zaznamenat libovolný konečný počet množin tak, že zachycujeme všechny připustné možnosti rozložení prvků a můžeme tak na stejném diagramu modelovat různé situace.
- Nejčastější použití Vennova diagramu je pro dvě, tři nebo maximálně čtyři množiny, neboť pro větší počet množin se diagram stává nepřehledným. [4]

Chceme-li například znázornit množinu A = {x ∈ M, x je česká řeka ústící do moře}, kde M je množina všech řek, postupujeme takto: (obr. 2)

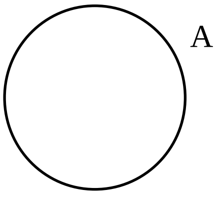


Obrázek 2 Množina českých řek ústících do moře

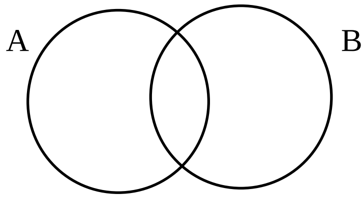
- Ve zvolené rovině M sestrojíme nějakou jednoduchou uzavřenou křivku A (kružnice, elipsa, …) tak, že se množina všech bodů roviny rozpadne na dvě množiny:
    1) Množina všech bodů ležících uvnitř křivky
    2) Množina všech bodů ležících vně křivky
- Jednotlivé prvky uvažované množiny A znázorníme jednotlivými body uvnitř sestrojené uzavřené křivky.
- Prvky, které nepatří do uvažované množiny A znázorníme jednotlivými body vně sestrojené uzavřené křivky. [9]

Následující Vennovy diagramy vyjadřují:

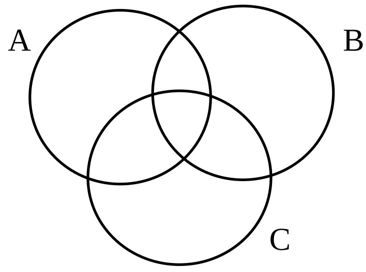
- Množinu A (obr. 3)
- Množinu A, množinu B (obr. 4)
- Množinu A, množinu B, množinu C (obr. 5)



Obrázek 3 Množina A



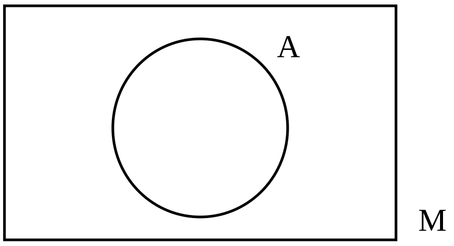
Obrázek 4 Množina A, B



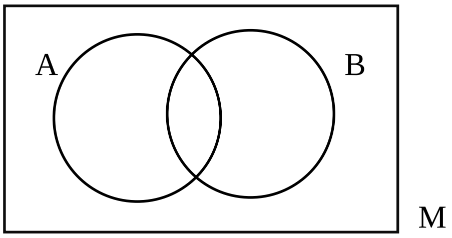
Obrázek 5 Množina A, B, C

Následující Vennovy diagramy vyjadřují:

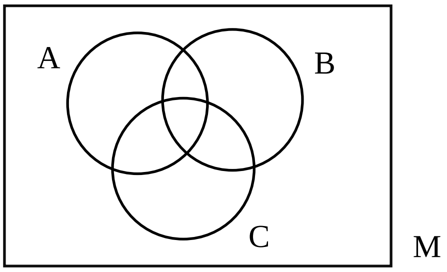
- podmnožinu A množiny M, tedy $A \subset M$ (obr. 6)
- podmnožinu A, B množiny M, tedy $A \subset M$, $B \subset M$ (obr. 7)
- podmnožinu A, B, C množiny M, tedy $A \subset M$, $B \subset M$, $C \subset M$ (obr. 8)
- podmnožinu A, B, C, D množiny M, tedy $A \subset M$, $B \subset M$, $C \subset M$, $D \subset M$ (obr. 9)



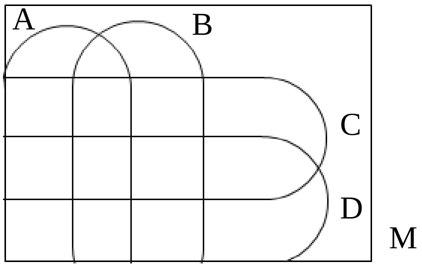
Obrázek 6 Podmnožina A množiny M



Obrázek 7 Podmnožina A, B množiny M



Obrázek 8 Podmnožina A, B, C množiny M



Obrázek 9 Podmnožina A, B, C, D množiny M

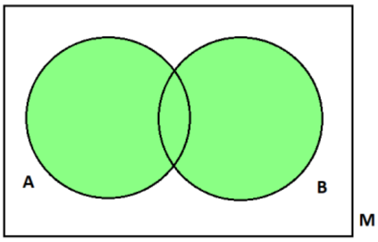
- Ovály na obrázku číslo 7 znázorňující množiny A, B rozdělí obdélník, jenž je obrazem množiny M, na čtyři části. Těmto částem říkáme *pole Vennova diagramu.*
- Části obdélníka, které vznikají „skládáním“ polí, nazýváme *oblasti Vennova diagramu*. Také pole počítáme mezi oblasti. Stejným způsobem budeme mluvit i o polích a oblastech pro jednu, tři a čtyři množiny. [5]

Definice 2.2.2

Ke každým dvěma množinám A, B existuje jednoznačně určená množina, kterou nazýváme *sjednocení množin* A, B a označujeme A ∪ B. Je to množina všech takových prvků z M, které patří množině A nebo patří množině B. Přitom slůvko „nebo" chápeme ve smyslu nevylučovacím (tj. do A ∪ B patří prvky, které jsou z A i z B). Před spojkou „nebo“ v tomto významu nepíšeme čárku. [5]

Poznámka 2.2.2

Sjednocením množin A, B je celá vybarvená část obrázku 10, tedy množina A i množina B.



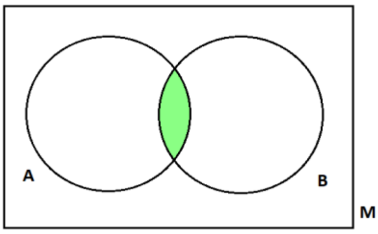
Obrázek 10 Sjednocení množin A, B

Definice 2.2.3

Ke každým dvěma množinám A, B existuje jednoznačně určená množina, kterou nazýváme *průnik množin* A, B a označujeme A ∩ B. Je to množina všech těch prvků z M, jež patří A a zároveň patří B. [5]

Poznámka 2.2.3

Na obrázku 11 je vybarveno pole, jež znázorňuje průnik množin A a B.



Obrázek 11 Průnik množin A, B

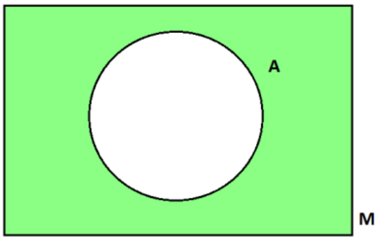
Definice 2.2.4

Doplněk množiny A vzhledem k množině M je jednoznačně určená množina všech takových prvků z M, které nepatří množině A. Tuto množinu stručněji nazýváme doplněk množiny A a označujeme A′. Tato množina lze charakterizovat následujícími dvěma podmínkami:

- $A \cap A' = \emptyset$
- $A \cup A' = M$ [5]

Poznámka 2.2.4

Na obrázku 12 je vybarveno pole, jež znázorňuje doplněk množiny A.



Obrázek 12 Doplněk množiny A

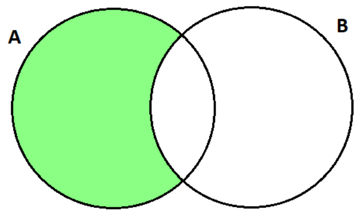
Definice 2.2.5

Rozdíl množin A, B je jednoznačně určená množina, kterou značíme A ∖ B, a která obsahuje právě ty prvky množiny A, které nepatří do množiny B.

Poznámka 2.2.5

Tento rozdíl lze také zapsat jako $A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\} = \{x;\ x \in A \wedge x \notin B\}$ [9]

Na obrázku 13 je vybarveno pole, jež znázorňuje rozdíl množin A, B.



Obrázek 13 Rozdíl množin A, B

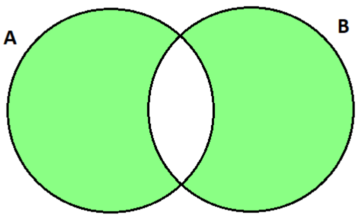
Definice 2.2.6

Symetrický rozdíl množin A, B je jednoznačně určená množina, kterou značíme A Δ B, a která obsahuje právě ty prvky, které patří právě do jedné z množin A, B. Tedy množina, která obsahuje všechny prvky z obou množin, které nejsou v jejich průniku.

Poznámka 2.2.6

Tento symetrický rozdíl lze zapsat také jako $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ nebo $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ [9]

Na obrázku 14 je vybarveno pole, jež znázorňuje symetrický rozdíl množin A, B.



Obrázek 14 Symetrický rozdíl množin A, B

Příklad 2.2.1

Nechť P_1 je množina všech reálných kořenů rovnice $x^2 + 7x + 6 = 0$ a P_2 je množina všech reálných kořenů rovnice $x^2 + 8x + 7 = 0$.

Určete:

a) průnik $P_1 \cap P_2$,

b) sjednocení $P_1 \cup P_2$,

c) doplněk P_1',

d) rozdíl $P_1 \setminus P_2$,

e) symetrický rozdíl $P_1 \Delta P_2$.

Řešení:

a) Průnik množin je jednoznačně určená množina prvků, které patří zároveň do množiny P_1 i do množiny P_2. Tedy $x \in P_1$ a zároveň $x \in P_2$. Řešením je teda soustava dvou rovnic:

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$
$$\underline{x^2 + 8x + 7 = 0}$$
$$x + 1 = 0$$
$$\underline{x = -1}$$

Průnikem množin $P_1 \cap P_2$ je množina obsahující prvek -1, tedy $P_1 \cap P_2 = \{-1\}$.

b) Sjednocení množin je jednoznačně určená množina prvků, které patří do množiny P_1 nebo do množiny P_2, přičemž spojku nebo chápeme ve smyslu nevylučovacím. Řešením je tedy rovnice:

$$(x^2 + 7x + 6) \cdot (x^2 + 8x + 7) = 0$$
$$x^2 + 7x + 6 = 0 \vee x^2 + 8x + 7 = 0$$

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$
$$D: b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$
$$\underline{x_1 = -1, \quad x_2 = -6}$$

$$x^2 + 8x + 7 = 0$$
$$D: b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 36$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 \pm 6}{2}$$
$$\underline{x_1 = -1, \quad x_2 = -7}$$

Sjednocením množin $P_1 \cup P_2$ je množina obsahující prvky -1, -6 a -7, tedy $P_1 \cup P_2 = \{-1, -6, -7\}$.

c) Doplněk P_1' množiny P_1 je jednoznačně určená množina prvků, které nepatří množině P_1.

Řešením jsou tedy všechna reálná čísla x, pro která platí: $x^2 + 7x + 6 \neq 0$.

d) Rozdíl množin $P_1 \setminus P_2$ je jednoznačně určená množina prvků, která obsahuje právě ty prvky množiny P_1, které nepatří množině P_2.
   Řešením jsou teda všechna reálná čísla x, pro která platí: $x^2 + 7x + 6 = 0 \wedge x^2 + 8x + 7 \neq 0$.

e) Symetrický rozdíl množin $P_1 \Delta P_2$, je jednoznačně určená množina, která obsahuje právě ty prvky, které patří právě do jedné z množin P_1, P_2. Tedy množina, která obsahuje všechny prvky z obou množin, které nejsou v jejich průniku.
   Řešení:

$$P_1\colon x^2 + 7x + 6 = 0$$
$$D\colon b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$
$$\underline{x_1 = -1, \qquad x_2 = -6}$$

$$P_2\colon x^2 + 8x + 7 = 0$$
$$D\colon b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 36$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 \pm 6}{2}$$
$$\underline{x_1 = -1, \qquad x_2 = -7}$$

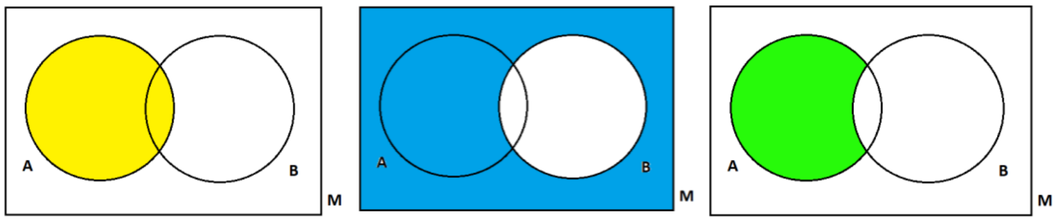
Symetrický rozdíl množin $P_1 \Delta P_2$ je množina obsahující prvky -6 a -7, tedy $P_1 \Delta P_2 = \{-6, -7\}$.

Příklad 2.2.2

Zjednodušte zápisy následujících množin tak, aby bylo možné, zakreslit je do Vennova diagramu:

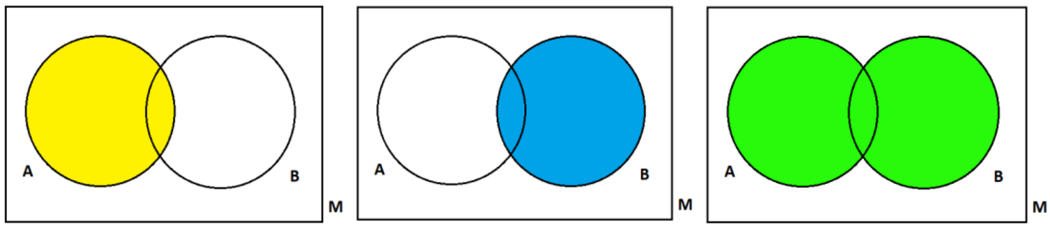
a) $(A \cap B') \cup [(A \cup B) \cap (A' \cup B)]$
b) $(A \cap B \cap D') \cup (D' \cap B' \cap A') \cup (A \cap B' \cap D') \cup (B \cap D' \cap A')$

a) Řešení pomoci Vennových diagramů:
   - Do Vennova diagramu zakreslíme množinu A, potom doplněk množiny B, a nakonec průnik množin $(A \cap B')$. (obr. 15)



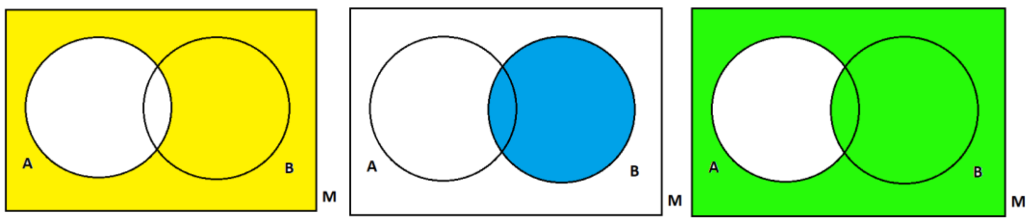
Obrázek 15 Množina A, množina B', průnik množin A ∩ B'

- Do Vennova diagramu zakreslíme množinu A, potom množinu B, a nakonec sjednocení množin (A ∪ B). (obr. 16)



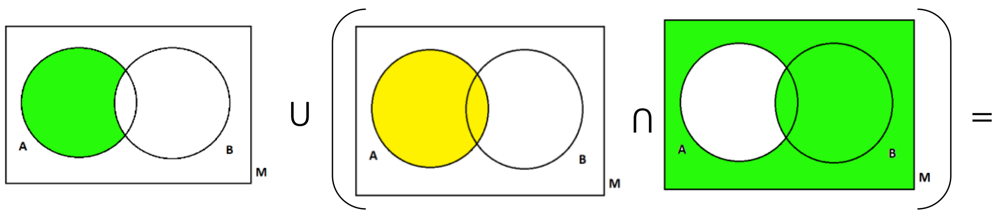
Obrázek 16 Množina A, množina B, sjednocení množin A ∪ B

- Do Vennova diagramu zakreslíme doplněk množiny A, potom množinu B, a nakonec sjednocení množin (A′ ∪ B). (obr. 17)



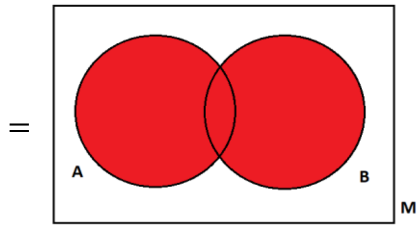
Obrázek 17 Množina A', množina B, sjednocení množin A' ∪ B

- Na obrázku 18 vidíme zadaný zápis množin, ve kterém jsou množiny (A ∩ B'), (A ∪ B), (A' ∪ B) vyobrazeny pomocí Vennových diagramů.



Obrázek 18 Množina (A ∩ B'), množina (A ∪ B), množina (A' ∪ B)

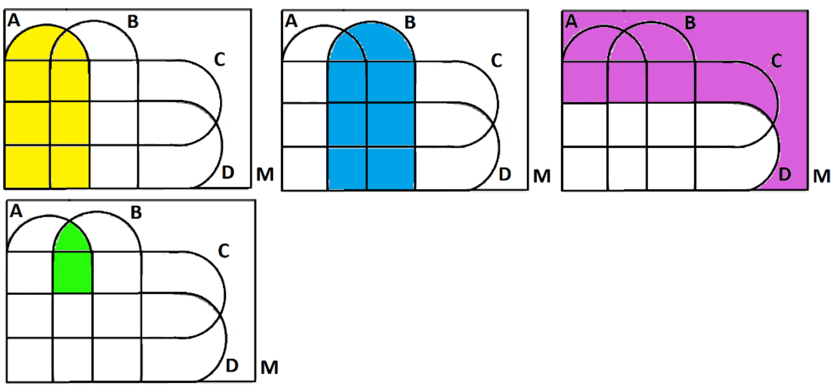
- Na obrázku 19 je pomocí Vennova diagramu vyobrazen zjednodušený zápis zadané množiny, kterým je sjednocení množin A a B. Tedy A ∪ B.



Obrázek 19 Množina (A ∩ B') ∪ [(A ∪ B) ∩ (A' ∪ B)]

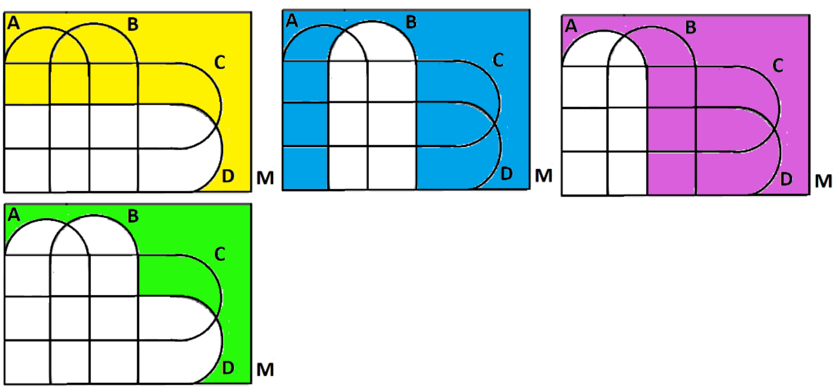
b) Řešení pomocí Vennových diagramů:

- Do Vennova diagramu zakreslíme množinu A (žlutá), množinu B (modrá) a množinu D′ (fialová). Zeleně zakreslíme průnik těchto tří množin A, B, D′, tedy A ∩ B ∩ D′. (obr. 20)



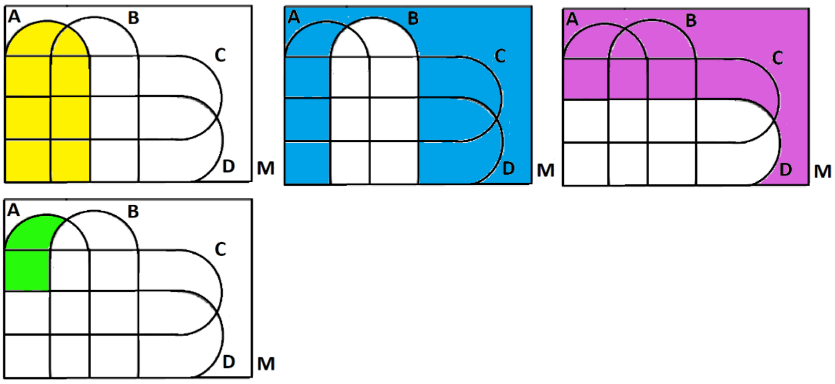
Obrázek 20 Množina A, množina B, množina D', množina A ∩ B ∩ D'

- Do Vennova diagramu zakreslíme množinu D′ (žlutá), množinu B′ (modrá) a množinu A′ (fialová). Zeleně zakreslíme průnik těchto tří množin D′, B′, A′, tedy D′ ∩ B′ ∩ A′. (obr. 21)



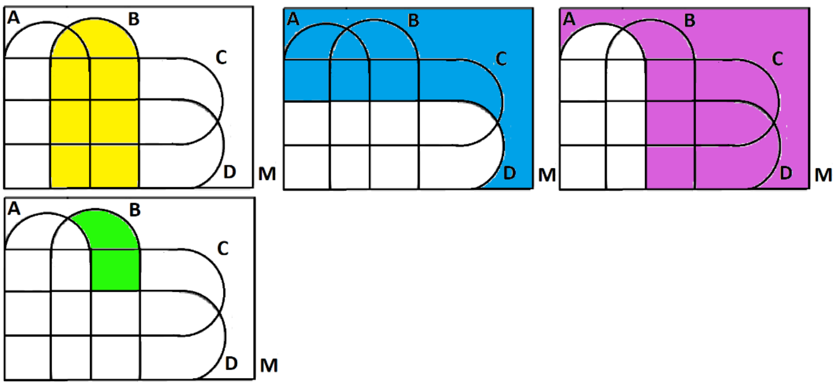
Obrázek 21 Množina D', množina B', množina A', množina D'∩ B'∩ A'

- Do Vennova diagramu zakreslíme množinu A (žlutá), množinu B′ (modrá) a množinu D′ (fialová). Zeleně zakreslíme průnik těchto tří množin A, B′, D′, tedy A ∩ B′ ∩ D′. (obr. 22)



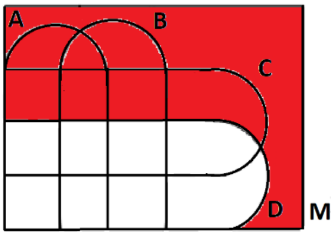
Obrázek 22 Množina A, množina B', množina D', množina A ∩ B'∩ D'

- Do Vennova diagramu zakreslíme množinu B (žlutá), množinu D′ (modrá) a množinu A′ (fialová). Zeleně zakreslíme průnik těchto tří množin B, D′, A′, tedy B ∩ D′ ∩ A′. (obr. 23)



Obrázek 23 Množina B, množina D', množina A', množina B ∩ D'∩ A'

- Na obrázku 24 je pomocí Vennova diagramu vyobrazeno sjednocení množin (A ∩ B ∩ D′) ∪ (D′ ∩ B′ ∩ A′) ∪ (A ∩ B′ ∩ D′) ∪ ∪ (B ∩ D′ ∩ A′) (průnik zeleně zakreslených polí v předchozích Vennových diagramech (obr.20, obr. 21, obr. 22, obr. 23).



Obrázek 24 Zjednodušený zápis zadané množiny

- Z Vennova diagramu je zřejmé, že zjednodušeným zápisem množiny $(A \cap B \cap D') \cup (D' \cap B' \cap A') \cup (A \cap B' \cap D') \cup (B \cap D' \cap A')$ je množina D'.

Příklad 2.2.3

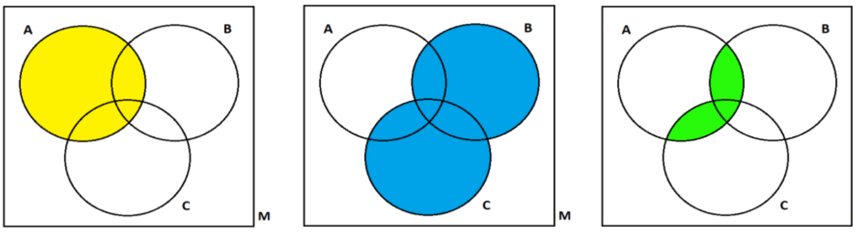
Dokažte, že pro všechny podmnožiny A, B, C platí:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

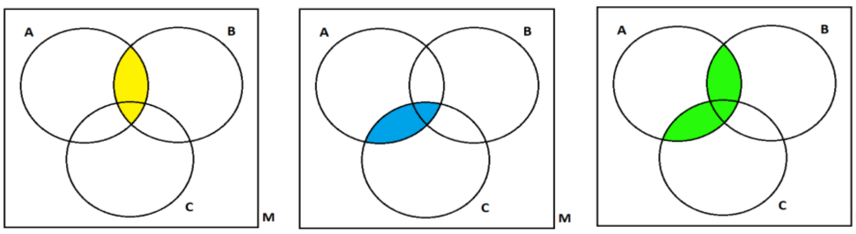
a) Řešení pomocí Vennových diagramů:

- Levá strana: Do Vennova diagramu zakreslíme množinu A, sjednocení množin $B \cup C$ a průnik $A \cap (B \cup C)$. (obr. 25)



Obrázek 25 Množina A, množina $B \cup C$, množina $A \cap (B \cup C)$

- Pravá strana: Do Vennova diagramu zakreslíme průnik množin $A \cap B$, průnik množin $A \cap C$ a průnik množin $(A \cap B) \cup (A \cap C)$. (obr. 26)

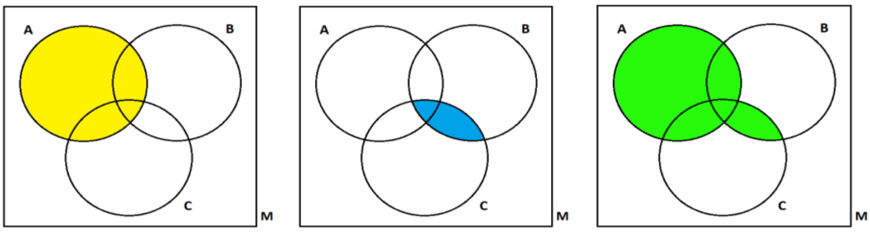


Obrázek 26 Množina $A \cap B$, množina $A \cap C$, množina $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Řešení levé a pravé strany je shodné, zadaná rovnost tedy platí.

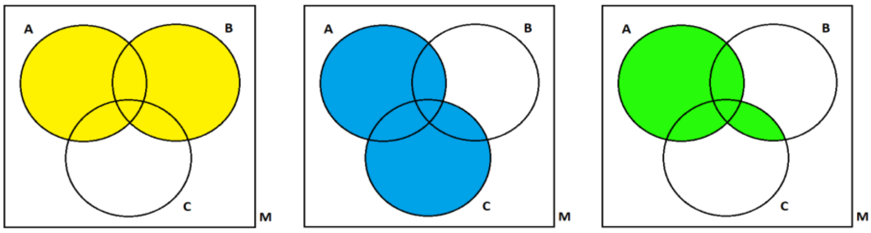
b) Řešení pomocí Vennových diagramů:

- Levá strana: Do Vennova diagramu zakreslíme množinu A, průnik množin B ∩ C a sjednocení množin A ∪ (B ∩ C). (obr. 27)



Obrázek 27 Množina A, množina B ∩ C, množina A ∪ (B ∩ C)

- Pravá strana: Do Vennova diagramu zakreslíme sjednocení množin A ∪ B, sjednocení množin A ∪ C a průnik množin (A ∪ B) ∩ (A ∪ C). (obr. 28)



Obrázek 28 Množina A ∪ B, množina A ∪ C, množina (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

- Řešení levé a pravé strany je shodné, zadaná rovnost tedy platí.

3 Výroková logika

3.1 Výrok

Definice 3.1.1

Výrok je sdělení, o němž můžeme s jistotou rozhodnout, zda je pravdivé – pravdivý výrok, nebo nepravdivé – nepravdivý výrok. [3]

Příklady výroků:

- Brno je hlavní město České republiky – nepravdivý výrok
- Číslo 13 je prvočíslo – pravdivý výrok

Poznámka 3.1.1

Sdělení může být výrokem i v případě, kdy o jeho pravdivosti či nepravdivosti nemůžeme momentálně rozhodnout. [3]

- Ve vesmíru žijí i jiné myslící bytosti než lidé.

Definice 3.1.2

Každému výroku V je přirazena jeho *pravdivostní hodnota*. V případě, že je výrok V pravdivý, píšeme p (V) = 1 a čteme „pravdivostní hodnota výroku p je rovna jedné". V opačném případě píšeme p (V) = 0 a čteme „pravdivostní hodnota výroku p je rovna nule". [3]

Definice 3.1.3

Logické spojky jsou logické operace, které nám umožňují z jednotlivých výroků tvořit další výroky. Předpokládejme, že A, B jsou libovolné výroky. Pravdivostní hodnoty přiřazené výroku vytvořenému za pomocí logických spojek lze zapsat do tzv. tabulky pravdivostních hodnot. (tab. 1) [3]

Tabulka 1 Tabulka pravdivostních hodnot

Název logické spojky	Označení	Slovní vyjádření
Negace	$\neg A$	není pravda, že A
Konjunkce	$A \wedge B$	A a (současně) B
Disjunkce	$A \vee B$	A nebo B
Implikace	$A \Rightarrow B$	jestliže A, pak B
Ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	A právě když B

Definice 3.1.4

Negace výroku A je operace, která se dá vytvořit obratem „není pravda, že A". Abychom však každou negaci neopisovali touhle zdlouhavou a kostrbatou frází, snažíme se tvořit negace jinak. Např. místo „není pravda, že číslo 5 je větší než číslo 6" řekneme „číslo 5 je menší nebo rovno číslu 6". (tab. 2) [3]

Tabulka 2 Negace výroku

$p\ (A)$	$p\ (\neg A)$
1	0
0	1

Definice 3.1.5

Konjunkce $A \wedge B$ je operace, která je pravdivá pouze v případě, kdy jsou pravdivé oba výroky A a B zároveň. (tab. 3) [3]

Tabulka 3 Konjunkce

$p\ (A)$	$p\ (B)$	$p\ (A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Definice 3.1.6

Disjunkce $A \vee B$ je operace, která je pravdivá v případě, kdy je pravdivý alespoň jeden z výroků A, B (tzn. jeden, druhý nebo oba). Spojka nebo může být obecně použita ve smyslu slučovacím („Můžu přijít dnes nebo zítra.“) a vylučovacím („Přijdu dnes, nebo zítra.“) V případě disjunkce je spojka nebo vždy užita ve smyslu slučovacím. (tab. 4) [3]

Tabulka 4 Disjunkce

$p\ (A)$	$p\ (B)$	$p\ (A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Definice 3.1.7

Implikace $A \Rightarrow B$ je operace, která je nepravdivá pouze v případě, když výrok A je pravdivý a výrok B je nepravdivý. Ve všech ostatních případech je implikace pravdivá. Je nutné si uvědomit, že implikace $A \Rightarrow B$ je vždy pravdivá v případě, kdy výrok A je nepravdivý, bez ohledu na pravdivostní hodnotu výroku B. (tab. 5) [3]

Poznámka 3.1.2

V případě, že implikace $A \Rightarrow B$ je pravdivá, říkáme též, že A je dostatečná podmínka pro B a B je nutná podmínka pro A. [3]

Tabulka 5 Implikace

$p\ (A)$	$p\ (B)$	$p\ (A \Rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Definice 3.1.8

Ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ je operace, která je pravdivá jen když oba výroky A, B mají stejnou pravdivostní hodnotu. Tato situace může nastat, pokud jsou oba výroky současně pravdivé nebo současně nepravdivé. Výroky A, B se pak nazývají ekvivalentní. (tab. 6) [3]

Tabulka 6 Ekvivalence

$p\ (A)$	$p\ (B)$	$p\ (A \Leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Poznámka 3.1.3

Na závěr uvedeme přehlednou tabulku všech dosud definovaných složených výroků (tab. 7): [3]

Tabulka 7 Tabulka složených výroků

$p\ (A)$	$p\ (B)$	$p\ (\neg A)$	$p\ (\neg B)$	$p\ (A \wedge B)$	$p\ (A \vee B)$	$p\ (A \Rightarrow B)$	$p\ (A \Leftrightarrow B)$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

3.2 Výrokové formule

Definice 3.2.1

Výroková formule je definována třemi následujícími body:

1) Všechny výrokové proměnné jsou výrokové formule.
2) Jsou-li A, B formule, potom rovněž ¬A, A ∧ B, A ∨ B, A ⇒ B, A ⇔ B jsou formule.
3) Žádný jiný zápis není výroková formule. [10]

Poznámka 3.2.1

Výrokovou formulí bude každý zápis, ze kterého po dosazení výroků za výrokové proměnné dostaneme (jediný) výrok. [9]

Příklady výrokových formulí:

- (A ⇒ B) ⇔ (¬ A ∨ B),
- [(A ⇒ B) ∧ (B ∨ ¬C)] ⇔ (A ⇒ C)

Příklady zápisů, které nejsou výrokové formule:

- A ⇒ (B ⇔)
- ¬A ⇔ C ⇔ B
- A ∨ (B ∧ ¬ CA, atd. [9]

Poznámka 3.2.2

Každá výroková formule lze pravdivostně ohodnotit. Touto činností zjišťujeme, pro které pravdivostní hodnoty výrokových proměnných vznikne z dané výrokové formule jednak výrok pravdivý a jednak výrok nepravdivý. [9]

3.3 Tautologie

Definice 3.3.1

Formule, která nabývá pouze pravdivostní hodnoty 1 bez ohledu na pravdivostní hodnotu jednotlivých částí výroku, se nazývá *tautologie*. Jestliže pro výrokové formule L, P platí, že výroková formule L $\Leftrightarrow$ P je tautologie, říkáme pak, že výroková formule L je ekvivalentní s výrokovou formulí P; píšeme $\vdash L \Leftrightarrow P$. [9]

Poznámka 3.3.1

Nyní si uvedeme několik tautologií, kde A, B, C jsou výrokové proměnné:

$\vdash [\neg(\neg A)] \Leftrightarrow A$	Zákon dvojí negace
$\vdash [\neg(A \vee B)] \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$	De Morganův zákon
$\vdash [\neg(A \wedge B)] \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	De Morganův zákon
$\vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$	De Morganův zákon
$\vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Zákon transpozice
$\vdash (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$	Zákon transpozice
$\vdash A \vee \neg A$	Zákon vyloučení třetí možnosti
$\vdash [\neg(A \wedge \neg A)]$	Zákon sporu [9]

Příklad 3.3.1

Jsou dány výroky K, L, M, N, pro něž je p (K) = 1, p (L) = 0, p (M) = 1, p (N) = 0. Určete pravdivostní hodnotu výroků:

a) $[(K \wedge M)' \Rightarrow (L \Leftrightarrow N)] \Rightarrow (M' \vee L)'$
b) $(N \Rightarrow K)' \Leftrightarrow [(L \wedge M)' \wedge (M \vee N)']'$

K určení pravdivostní hodnoty výroků budeme potřebovat znalosti pravidel z tabulky číslo 7 z podkapitoly 3.1.

a) Řešení: postupně zjistíme pravdivostní hodnoty jednotlivých částí zadané výrokové formule.
   - $p\ (K \wedge M) = 1$
   - $p\ [(K \wedge M)'] = 0$
   - $p\ (L \Leftrightarrow N) = 1$
   - $p\ ([(K \wedge M)' \Rightarrow (L \Leftrightarrow N)]) = 1$
   - $p\ (M') = 0$
   - $p\ (M' \vee L) = 0$
   - $p\ ((M' \vee L)')= 1$
   - $p\ ([(K \wedge M)' \Rightarrow (L \Leftrightarrow N)] \Rightarrow (M' \vee L)') = 1$

   Pravdivostní hodnota zadané výrokové formule je rovna jedné, tedy $p\ ([(K \wedge M)' \Rightarrow (L \Leftrightarrow N)] \Rightarrow (M' \vee L)') = 1$.

b) Řešení: postupně zjistíme pravdivostní hodnoty jednotlivých částí zadané výrokové formule.
   - $p\ (N \Rightarrow K) = 1$
   - $p\ ((N \Rightarrow K)') = 1$
   - $p\ (L \wedge M) = 0$
   - $p\ ((L \wedge M)') = 1$
   - $p\ (M \vee N) = 1$
   - $p\ ((M \vee N)') = 0$
   - $p\ ((L \wedge M)' \wedge (M \vee N)') = 0$
   - $p\ ([(L \wedge M)' \wedge (M \vee N)']') = 1$
   - $p\ ((N \Rightarrow K)' \Leftrightarrow [(L \wedge M)' \wedge (M \vee N)']') = 1$

   Pravdivostní hodnota zadané výrokové formule je rovna jedné, tedy $p\ ((N \Rightarrow K)' \Leftrightarrow [(L \wedge M)' \wedge (M \vee N)']') = 1$.

Příklad 3.3.2

Určete pravdivostní hodnoty, jichž nabývají výrokové formule při všech pravdivostních hodnotách výroků, které dosazujeme za A a B.

a) $(A \wedge B)' \Leftrightarrow (A' \vee B')$
b) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$

Na rozdíl od minulého příkladu zde nemáme zadané pravdivostní hodnoty u jednotlivých výrokových proměnných. Aby bylo možné zjistit, jakých pravdivostních hodnot nabývají zadané výrokové formule pro všechny možné uspořádané dvojice pravdivostních hodnot výroků, které dosazujeme za proměnné A, B, stačí prozkoumat jednotlivé kombinace pravdivostních hodnot.

a) V tabulce číslo 8 vidíme, že výroková formule $(A \wedge B)' \Leftrightarrow (A' \vee B')$ je pravdivá (pro všechny kombinace výrokových proměnných nabývá hodnoty 1). Tato situace se nazývá tautologicky pravdivá čili tautologie.

Tabulka 8 Tabulka složených výroků pro $(A \wedge B)' \Leftrightarrow (A' \vee B')$

$p\ (A)$	$p\ (B)$	$p\ (A')$	$p\ (B')$	$p\ (A \wedge B)$	$p\ (A \wedge B)'$	$p\ (A' \vee B')$	$p\ (A \wedge B)' \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (A' \vee B')$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

b) V tabulce číslo 9 vidíme, že výroková formule $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ je pravdivá (pro všechny kombinace výrokových proměnných nabývá hodnoty 1). Tato situace se nazývá tautologicky pravdivá čili tautologie.

Tabulka 9 Tabulka složených výroků pro (A ⇔ B) ⇔ [(A ⇒ B) ∧ (B ⇒ A)]

$p\ (A)$	$p\ (B)$	$p\ (A \Leftrightarrow B)$	$p\ (A \Rightarrow B)$	$p\ (B \Rightarrow A)$	p (A ⇒ B)∧ ∧(B ⇒ A)	p (A ⇔ B) ⇔ [(A ⇒ B) ∧ (B ⇒ A)]
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

4 Operace a jejich vlastnosti

4.1 Kartézský součin

Definice 4.1.1

Kartézským součinem množin K, L nazýváme množinu všech uspořádaných dvojic [x, y], kde $x \in K$ a $y \in L$. Kartézský součin množin K, L označujeme $K \times L$. [5]

Poznámka 4.1.1

Je-li například $A = \{5, \pi, 0\}$ a $B = \{\sqrt{2}, 1\}$, pak je $A \times B = \{[5, \sqrt{2}], [5, 1], [\pi, \sqrt{2}], [\pi, 1], [0, \sqrt{2}], [0, 1]\}$. [5]

Definice 4.1.2

Zobrazením množiny K do množiny L nazýváme každou podmnožinu T kartézského součinu $K \times L$, pro niž platí: ke každému $x \in K$ existuje právě jedno $y \in L$ takové, že $[x, y] \in T$. [5]

Poznámka 4.1.2

Množiny $T_1 = \{[5, \sqrt{2}], [\pi, \sqrt{2}], [0, 1]\}$, $T_2 = \{[5, 1], [0, 1], [\pi, 1]\}$ jsou příklady zobrazení A do B.

Množiny $T_3 = \{[5, \sqrt{2}], [0, 1]\}$, $T_4 = \{[5, \sqrt{2}], [\pi, \sqrt{2}], [5, 1]\}$ jsou příklady podmnožin $A \times B$, které nejsou zobrazením A do B. [5]

4.2 Binární operace na množině

Definice 4.2.1

Uvažujeme-li speciální případ zobrazení K do L, kdy $K = L \times L$. Zobrazením $L \times L$ do L je pak každá podmnožina U kartézského součinu $(L \times L) \times L$, pro niž platí: ke každé uspořádané dvojici $[x, y] \in L \times L$ existuje právě jedno $z \in L$ takové, že $[[x, y], z] \in U$. Toto zobrazení nazýváme *binární operace* na množině L a symbolicky označujeme například $z = x \circ y$ na L („○“ čteme kolečko). [5]

Poznámka 4.2.1

Běžnými příklady binárních operací jsou například operace sčítání a násobení na množině všech reálných čísel R. Ke každé dvojici čísel [x, y] existuje jednoznačně určené reálné číslo $x + y$, které nazýváme součet čísel x, y a jednoznačně určené číslo $x \cdot y$ (nebo stručněji „xy“), jež nazýváme součin čísel x, y. [5]

Poznámka 4.2.2

Z kapitoly 2 víme, že ke každým dvěma podmnožinám A, B dané neprázdné množiny M existuje jednoznačně určená podmnožina množiny M, zvaná sjednocení množin A, B a podmnožina množiny M, zvaná průnik množin A, B. Uvažujeme-li množinu $\widehat{M}$ všech podmnožin množiny M, ke každým dvěma prvkům A, B množiny $\widehat{M}$ existuje právě jeden prvek množiny $\widehat{M}$, který je roven $A \cup B$, a právě jeden prvek množiny $\widehat{M}$ rovný $A \cap B$. To znamená, že na množině M jsou definovány dvě binární operace „sjednocení“ a „průnik“. [5]

4.3 Vlastnosti binárních operací

Definice 4.3.1

Operace $u = x \circ y$ na L je *komutativní* právě tehdy, když pro všechny prvky x, y z množiny L platí:

- $x \circ y = y \circ x$ [5]

Věta 4.3.2

Nechť množina H je algebra pravdivostních hodnot používající pouze symboly 0 a 1. O následujících příkladech operací je možné říci, že jsou komutativní:

- $A \cup B = B \cup A$ – sjednocení na množině M
- $A \cap B = B \cap A$ – průnik na množině M
- $1 + 0 = 0 + 1$ – sčítání na H
- $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1$ – násobení na H [5]

Definice 4.3.2

Operace $u = x \circ y$ na L je *asociativní*, právě tehdy když pro všechny prvky x, y, z z množiny L platí:

- $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ [5]

Věta 4.3.3

O následujících příkladech operací je možné říci, že jsou asociativní:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – sjednocení na množině M
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – průnik na množině M
- $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$ – sčítání na H

- $(1 \cdot 2) \cdot 3 = 1 \cdot (2 \cdot 3)$ – násobení na H [5]

Věta 4.3.4

Pro všechna reálná čísla x, y, z platí:

- $x + y = y + x$ komutativnost sčítání
- $x \cdot y = y \cdot x$ komutativnost násobení
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ asociativita sčítání
- $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ asociativita násobení [5]

Definice 4.3.3

Operace $u = x \circ y$ na L je *distributivní* vzhledem k operaci $u = x * y$ na L, právě tehdy když pro každé tři prvky x, y, z z množiny L platí:

- $x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$ a zároveň $(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$ [5]

Poznámka 4.3.1

Je-li operace $u = x \circ y$ na L komutativní, lze psát pouze jednu z výše uvedených podmínek. [5]

Věta 4.3.5

Příklady operací, o kterých lze říci, že jsou distributivní:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (důkaz použitím Vennova diagramu)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (důkaz použitím Vennova diagramu) [5]

Definice 4.3.4

Obecně nazýváme *neutrálním prvkem* vzhledem k operaci $u = x \circ y$ na L prvek $e \in L$, pro nějž platí: Pro všechna $x \in L$ je:

- $x \circ e = e \circ x = x$ [5]

Poznámka 4.3.2

Je-li operace $u = x \circ y$ na L komutativní, lze psát pouze jednu z výše uvedených podmínek. [5]

Věta 4.3.6

V množině $\widehat{M}$ existuje právě jeden neutrální prvek vzhledem k operaci sjednocení, a tím je prázdná množina.

Důkaz:

V množině $\widehat{M}$ je neutrálním prvkem k operaci sjednocení prázdná množina. Pro každé $A \in \widehat{M}$ platí: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$. Dále dokážeme, že žádný prvek $B \in \widehat{M}$, $B \neq \emptyset$, nemůže být neutrálním prvkem vzhledem k operaci sjednocení: Nechť je $B \in \widehat{M}$ neutrální prvek operace sjednocení na $\widehat{M}$. Pak pro každé $A \in \widehat{M}$ je $A \cup B = A$, tedy speciálně i $\emptyset \cup B = \emptyset$. Současně ale také platí $\emptyset \cup B = B$. Odtud plyne $B = \emptyset$. [5] □

Věta 4.3.7

V množině $\widehat{M}$ existuje právě jeden neutrální prvek vzhledem k operaci průnik, a tím je množina M.

Důkaz:

Pro každé $A \in M$ platí: $A \cap M = M \cap A = A$, $M \cap M = M$. [5] □

Poznámka 4.3.3

- Nyní ověříme existenci neutrálního prvku u jednotlivých operací na H.
- Uvědomíme-li si, že platí $1 + 0 = 0 + 1 = 1$, $0 + 0 = 0$, je zřejmé, že 0 je neutrální prvek vzhledem k sčítání na H.
- Uvažujeme-li situaci, kdy $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ vidíme, že 0 nemůže být neutrálním prvkem vzhledem k operaci násobení na H, jelikož rovnost $x \circ e = e \circ x = x$ zde neplatí. Tuto vlastnost však jednoznačně splňuje číslo 1, neboť rovnost $1 \cdot 1 = 1$, $2 \cdot 1 = 2$, apod. splňuje výše uvedenou podmínku pro existenci neutrálního prvku. Z toho tedy plyne, že 1 je neutrálním prvkem vzhledem k operaci násobení na H. [5]

4.4 Unární operace

Definice 4.4.1

Dalším speciálním případem zobrazení K do L je situace, kdy K = L. Tedy zobrazení L do L, které nazýváme *unární operace* na množině L. Zobrazení L do L je každá podmnožina V kartézského součinu $L \times L$, pro niž platí:

- ke každému $x \in L$ takové, že $[x, y] \in V$.

Zobrazení L do L nazýváme unární operace na L a symbolicky značíme například „$y = \bar{x}$ na L“.

Příklady unárních operací:

- Tvoření opačného čísla k danému číslu na množině všech reálných čísel: „y = -x na R“. [5]

Definice 4.4.2

Uvažujme neprázdnou množinu M. Ke každé podmnožině A množiny M existuje právě jedna podmnožina A' množiny M, která se nazývá *doplněk množiny* A. Na množině $\widehat{M}$ všech podmnožin množiny M je tedy definována unární operace, kterou nazýváme doplněk. [5]

Příklad 4.4.1

U následujících operací zjistěte, zda jsou komutativní: (pozn. pro zápis součinu $x \cdot y$ budeme používat symbol xy, pro zápis součtu/rozdílu (xy) $\pm$ (xy) zápis xy $\pm$ xy, přičemž budeme pamatovat na to, že násobení „má přednost“ před sčítáním/odčítáním)

a) a = x + y na množině všech reálných čísel

b) a = 2x + 3y na množině všech reálných čísel

c) a = $x^2 + y^2$ na množině všech reálných čísel

d) a = x – y na množině všech reálných čísel

V podkapitole 4. 3. jsou vlastnosti binárních operací uvedeny takto:

$x \circ y = y \circ x$	komutativnost
$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$	asociativita
$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$	distributivita
$(y * z) \circ x = (y \circ x) * (z \circ x)$	distributivita
$x \circ e = e \circ x = x$	existence neutrálního prvku

Řešení:

a) a = x + y na množině všech reálných čísel

- Komutativnost: x + y = y + x, pro x = 1, y = 2
- 1 + 2 = 2 + 1 ⇒ 3 = 3 ⇒ operace a = x + y na množině všech reálných čísel je komutativní

b) $a = 2x + 3y$ na množině všech reálných čísel

- Komutativnost: $2x + 3y = 2y + 3x$, pro $x = 1$, $y = 2$
- $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \neq 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \Rightarrow 2 + 6 \neq 4 + 3 \Rightarrow 8 \neq 7 \Rightarrow$ operace $a = 2x + 3y$ na množině všech reálných čísel není komutativní

c) $a = x^2 + y^2$ na množině všech reálných čísel

- Komutativnost: $x^2 + y^2 = y^2 + x^2$, pro $x = 1$, $y = 2$
- $1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2 \Rightarrow 1 + 4 = 4 + 1 \Rightarrow 5 = 5 \Rightarrow$ operace $a = x^2 + y^2$ na množině všech reálných čísel je komutativní

d) $a = x – y$ na množině všech reálných čísel

- Komutativnost: $x – y = y – x$, pro $x = 1$, $y = 2$
- $1 – 2 \neq 2 – 1 \Rightarrow -1 \neq 1 \Rightarrow$ operace $a = x - y$ na množině všech reálných čísel není komutativní

Příklad 4.4.2

U následujících operací zjistěte, zda jsou asociativní:

a) $a = x + 2y + 6z$ na množině všech reálných čísel
b) $a = 2x – 3y – z$ na množině všech reálných čísel
c) $a = x^2 – y^3 – z^2$ na množině všech reálných čísel
d) $a = x + y + z$ na množině všech reálných čísel

Řešení:

a) $a = x + 2y + 6z$ na množině všech reálných čísel

- Asociativita: $(x + 2y) + 6z = x + 2(y + 6z)$, pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$
- $(1 + 2 \cdot 2) + 6 \cdot 3 \neq 1 + 2 \cdot (2 + 6 \cdot 3) \Rightarrow (1 + 4) + 18 \neq 1 + 2 \cdot (2 + 18) \Rightarrow$ $\Rightarrow 5 + 18 \neq 1 + 2 \cdot 20 \Rightarrow 23 \neq 41 \Rightarrow$ operace $a = x + 2 \cdot y + 6 \cdot z$ na množině všech reálných čísel není asociativní

b) $a = 2x - 3y - z$ na množině všech reálných čísel

- Asociativita: $(2x - 3y) - z = 2x - 3 \cdot (y - z)$, pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$
- $(2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) - 3 \neq 2 \cdot 1 - 3 \cdot (2 - 3) \Rightarrow (2 - 6) - 3 \neq 2 - 3 \cdot (-1) \Rightarrow -4 - 3 \neq 2 + 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow -7 \neq 5 \Rightarrow$ operace $a = 2x - 3y - z$ na množině všech reálných čísel není asociativní

c) $a = x^2 - y^3 - z^2$ na množině všech reálných čísel

- Asociativita: $(x^2 - y^3) - z^2 = x^2 - (y^3 - z^2)$, pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$
- $(1^2 - 2^3) - 3^2 \neq 1^2 - (2^3 - 3^2) \Rightarrow (1 - 8) - 9 \neq 1 - (8 - 9) \Rightarrow -7 - 9 \neq 1 - (-1) \Rightarrow$ $\Rightarrow -6 \neq 2 \Rightarrow$ operace $a = x^2 - y^3 - z^2$ na množině všech reálných čísel není asociativní

d) $a = x + y + z$ na množině všech reálných čísel

- Asociativita: $(x + y) + z = x + (y + z)$, pro $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$
- $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3) \Rightarrow 3 + 3 = 1 + 5 \Rightarrow 6 = 6 \Rightarrow$ operace $a = x + y + z$ na množině všech reálných čísel je asociativní

Příklad 4.4.3

U následujících operací určete všechny neutrální prvky:

a) $a = x + y$ na množině všech reálných čísel
b) $a = 2x + 3y$ na množině všech reálných čísel
c) $a = x^2 - y^2$ na množině všech reálných čísel
d) $a = x \cdot y$ na množině všech reálných čísel

Řešení:

a) $a = x + y$ na množině všech reálných čísel

- Existence neutrálního prvku: $x + y = y + x = x$

Aby neutrální prvek existoval, musel by splňovat tři následující podmínky zároveň:

- $x + y = x \quad \Rightarrow \quad y = 0$
- $y + x = x \quad \Rightarrow \quad y = 0$
- $x + y = y + x \quad \Rightarrow \quad y \in \mathbb{R}$

Jelikož musí všechny tři podmínky nastat současně, pro operaci $a = x + y$ existuje neutrální prvek, který je roven $y = 0$.

Alternativně: $x + y = y + x = y$

Aby neutrální prvek existoval, musel by splňovat tři následující podmínky zároveň:

- $x + y = y \quad \Rightarrow \quad x = 0$
- $y + x = y \quad \Rightarrow \quad x = 0$
- $x + y = y + x \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$

Jelikož musí všechny tři podmínky nastat současně, pro operaci $a = x + y$ existuje neutrální prvek, který je roven $x = 0$.

b) $a = 2x + 3y$ na množině všech reálných čísel

- Existence neutrálního prvku: $2x + 3y = 2y + 3x = x$

Aby neutrální prvek existoval, musel by splňovat tři následující podmínky zároveň:

- $2x + 3y = x \quad \Rightarrow \quad x = -3y$
- $2y + 3x = x \quad \Rightarrow \quad x = -y$
- $2x + 3y = 2y + 3x \quad \Rightarrow \quad x = y$

Všechny tři podmínky nemohou zároveň nastat pro žádné číslo z množiny reálných čísel. Neutrální prvek pro operaci $a = 2x + 3y$ na množině všech reálných čísel tedy neexistuje.

c) $a = x^2 – y^2$ na množině všech reálných čísel

- Existence neutrálního prvku: $x^2 – y^2 = y^2 – x^2 = x^2$

Aby neutrální prvek existoval, musel by splňovat tři následující podmínky zároveň:

- $x^2 – y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = 0$
- $y^2 – x^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm \sqrt{2x^2}$
- $x^2 – y^2 = y^2 – x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$

Všechny tři podmínky nemohou zároveň nastat pro žádné číslo z množiny reálných čísel. Neutrální prvek pro operaci $a = x^2 – y^2$ na množině všech reálných čísel tedy neexistuje.

d) $a = x \cdot y$ na množině všech reálných čísel

- Existence neutrálního prvku: $x \cdot y = y \cdot x = x$

Aby neutrální prvek existoval, musel by splňovat tři následující podmínky zároveň:

- $x \cdot y = x \quad \Rightarrow \quad y = 1$
- $y \cdot x = x \quad \Rightarrow \quad y = 1$
- $x \cdot y = y \cdot x \quad \Rightarrow \quad y \in \mathbb{R}$

Jelikož musí všechny tři podmínky nastat současně, pro operaci $a = x \cdot y$ existuje neutrální prvek, který je roven $y = 1$.

Alternativně: $x \cdot y = y \cdot x = y$

Aby neutrální prvek existoval, musel by splňovat tři následující podmínky zároveň:

- $x \cdot y = y \quad \Rightarrow \quad x = 1$
- $y \cdot x = y \quad \Rightarrow \quad x = 1$
- $x \cdot y = y \cdot x \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R}$

Jelikož musí všechny tři podmínky nastat současně, pro operaci $a = x \cdot y$ existuje neutrální prvek, který je roven $x = 1$.

5 Booleova algebra a její modely

Při práci s Booleovou algebrou budeme za východisko považovat základní operace s množinami, tj. jejich sjednocení, průnik a vztahy inkluze. Nejdříve bude nutno uvést tyto operace do souvislosti s výrokovou logikou. [7]

5.1 Booleova algebra

Definice 5.1.1

Pokud budeme označovat prvky Booleovy algebry malými písmeny a, b, c, …, x, y, z, rovnost prvků rovnítkem „=“, binární operaci „sčítání“ plusem „+“ a „násobení“ symbolem krát „·“, unární operaci „doplněk“ budeme značit $y = x'$, dále když neutrální prvek při „sčítání“ onačíme 0 a neutrální prvek při „násobení“ označíme 1, pak můžeme *Booleovu algebru* nadefinovat jako neprázdnou množinu pro jejíž prvky platí skupina výroků (a)-(j):

(a) $x + y = y + x$
(b) $x \cdot y = y \cdot x$
(c) $(x + y) + z = x + (y + z)$
(d) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
(e) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
(f) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
(g) $x + 0 = x$
(h) $x \cdot 1 = x$
(i) $x + x' = 1$
(j) $x \cdot x' = 0$

Takto zavedenou Booleovu algebru budeme značit $(B, +, \cdot, ')$ [8]

Důkaz: $x + 0 = x$

- $x + 0 = (x + 0) \cdot 1 = (x + 0) \cdot (x + x') = x + (0 \cdot x') = x + (0 \cdot x' + 0) =$ $= x + ((0 \cdot x') + (x \cdot x')) = x + (x' \cdot (0 + x)) = x + (x' \cdot x) = x + 0 = x$ □

Důkaz krok za krokem:

- $x + 0 = (x + 0) \cdot 1$ při prvním kroku jsme použili axiom (h)
- $(x + 0) \cdot 1 = (x + 0) \cdot (x + x')$ při druhém kroku jsme použili axiom (i)

- $(x + 0) \cdot (x + x') = x + (0 \cdot x')$ při třetím kroku jsme použili axiom (f)
- $x + (0 \cdot x') = x + (0 \cdot x' + 0)$ při čtvrtém kroku jsme použili axiom (g)
- $x + (0 \cdot x' + 0) = x + ((0 \cdot x') + (x \cdot x'))$ při pátém kroku jsme použili axiom (j)
- $x + ((0 \cdot x') + (x \cdot x')) = x + (x' \cdot (0 + x))$ při šestém kroku jsme použili axiom (e)
- $x + (x' \cdot (0 + x)) = x + (x' \cdot x)$ při sedmém kroku jsme použili axiom (g)
- $x + (x' \cdot x) = x + 0$ při osmém kroku jsme použili axiom (j)
- $x + 0 = x$ při devátém koku jsme použili axiom (g) [5] □

Důkaz: $x \cdot 1 = x$

- $x \cdot 1 = x \cdot 1 + 0 = (x \cdot 1) + (x \cdot x') = x \cdot (1 + x') = x + x \cdot x' = x + 0 = x$ □

Důkaz krok za krokem:

- $x \cdot 1 = x \cdot 1 + 0$ při prvním kroku jsme použili axiom (g)
- $x \cdot 1 + 0 = (x \cdot 1) + (x \cdot x')$ při druhém kroku jsme použili axiom (j)
- $(x \cdot 1) + (x \cdot x') = x \cdot (1 + x')$ při třetím kroku jsme použili axiom (e)
- $x \cdot (1 + x') = x + x \cdot x'$ při čtvrtém kroku jsme „roznásobili“ závorku $(1 + x')$ prvkem x
- $x + x \cdot x' = x + 0$ při pátém kroku jsme použili axiom (j)
- $x + 0 = x$ při šestém kroku jsme použili axiom (g) [5] □

5.2 Princip duality v Booleově algebře

Definice 5.2.1

Princip duality: Vyberme libovolný axiom ze systému (a)-(y) a nahraďme v něm všude znak „+“ znakem „·“, znak „·“ znakem „+“, dále zaměňme znak „0“ znakem „1“ a znak „1“ znakem „0“ na všech místech, kde se příslušný znak ve vybraném axiomu vyskytuje. Ostatní znaky (kvantifikátory, rovnítka, závorky) ponechme beze změny. Popsanými záměnami získáme některý z axiomů (a)-(y), a to jeden z těch, které jsou zapsány o řádek níž, nebo výš než axiom původní. [5]

Věta 5.2.2

Nechť je na základě axiomů (a)-(y), resp. vět z nich plynoucích, dokázána jistá věta o prvcích Booleovy algebry. Proveďme v takové větě a jejím důkazu výše uvedené záměny. Dojdeme k tzv. větě duální k dané větě, je bude zřejmě opět větou dokázanou pro všechny prvky Booleovy algebry. Platnost tohoto principu duality je zřejmá. [5]

Poznámka 5.2.1

K teoretickému základu booleovského kalkulu patří řešení rovnic v Booleově algebře. Jelikož $x^n = x$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, redukují se v Booleově algebře polynomické rovnice na rovnice lineární. [6]

5.3 Vlastnosti Booleovských algeber

Věta 5.3.1

Pro každý prvek $x \in B$ Booleovy algebry platí:

(k) $x + x = x$

(l) $x \cdot x = x$

(m) $x \cdot 0 = 0$

(n) $x + 1 = 1$

(o) $(x')' = x$ [8]

Důkaz: $x + x = x$

- $x + x = (x + x) \cdot 1 = (x + x) \cdot (x + x') = x + x \cdot x' = x + 0 = x$ □

Důkaz krok za krokem:

- $x + x = (x + x) \cdot 1$ při prvním kroku jsme použili axiom (h)
- $(x + x) \cdot 1 = (x + x) \cdot (x + x')$ při druhém kroku jsme použili axiom (i)
- $(x + x) \cdot (x + x') = x + x \cdot x'$ při třetím kroku jsme použili axiom (f)
- $x + x \cdot x' = x + 0$ při čtvrtém kroku jsme použili axiom (j)
- $x + 0 = x$ při pátém kroku jsme použili axiom (g) [5] □

Důkaz $x \cdot x = x$

- $x \cdot x = x$ plyne z axiomu (k) a z principu duality [5] □

Důkaz: $x \cdot 0 = 0$

- $x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = (x \cdot 0) + (x \cdot x') = x \cdot (0 + x') = x \cdot x' = 0$ □

Důkaz krok za krokem:

- $x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0$ při prvním kroku jsme použili axiom (g)
- $x \cdot 0 + 0 = (x \cdot 0) + (x \cdot x')$ při druhém kroku jsme použili axiom (j)

- $(x \cdot 0) + (x \cdot x') = x \cdot (0 + x')$ při třetím kroku jsme použili axiom (e)
- $x \cdot (0 + x') = x \cdot x'$ při čtvrtém kroku jsme použili axiom (g)
- $x \cdot x' = 0$ při posledním kroku jsme použili axiom (j) [5] □

Důkaz: $x + 1 = 1$

- $x + 1 = 1$ plyne z axiomu (m) a z principu duality [5] □

Důkaz: $(x')' = x$

- podle definice operace doplněk a podle axiomů (i) a (j) lze psát $x + x' = 1$ a $x \cdot x' = 0$. Odtud ihned plyne, že x je doplňkem k x', tj. $x = (x')'$ [5] □

Věta 5.3.2

Pro všechny prvky $x, y \in B$ Booleovy algebry platí:

(p) $(x + y)' = x' \cdot y'$
(q) $(x \cdot y)' = x' + y'$
(r) $x + x \cdot y = x$
(s) $x \cdot (x + y) = x$
(t) $x + x' \cdot y = x + y$
(u) $x \cdot (x' + y) = x \cdot y$ [8]

Důkaz: $(x + y)' = x' \cdot y'$

- jelikož chceme dokázat, že $x' \cdot y'$ je doplňkem k prvku $x + y$, je třeba ověřit, že platí:
    a. $(x' \cdot y') \cdot (x + y) = 0$ a zároveň
    b. $x' \cdot y' + (x + y) = 1$

Nejprve dokažme a.:

- $(x' \cdot y') \cdot (x + y) = (x' \cdot y') \cdot x + (x' \cdot y') \cdot y = (x' \cdot x) \cdot y' + x' \cdot (y' \cdot y) =$ $= 0 \cdot y' + x' \cdot 0 = 0 + 0 = 0$

Důkaz a. krok za krokem:

- $(x' \cdot y') \cdot (x + y) = (x' \cdot y') \cdot x + (x' \cdot y') \cdot y$ při prvním kroku jsme roznásobili prvek x prvkem $(x' \cdot y')$ a prvek y prvkem $(x' \cdot y')$

- $(x' \cdot y') \cdot x + (x' \cdot y') \cdot y = (x' \cdot x) \cdot y' + x' \cdot (y' \cdot y)$ při druhém kroku jsme pouze vhodněji uzávorkovali dvojice prvků $x' \cdot x$ a $y' \cdot y$
- $(x' \cdot x) \cdot y' + x' \cdot (y' \cdot y) = 0 \cdot y' + x' \cdot 0$ při třetím kroku jsme použili axiom (j)
- $0 \cdot y' + x' \cdot 0 = 0 + 0$ při čtvrtém kroku jsme použili axiom (j)
- $0 + 0 = 0$ při pátém kroku jsme použili axiom (k)

Dokažme dále b.:

- $x' \cdot y' + (x + y) = (x' + (x + y)) \cdot (y' + (x + y)) = ((x' + x) + y) \cdot ((y' + y) + x) =$
  $= (1 + y) \cdot (1 + x) = 1 \cdot 1 = 1$

Důkaz b. krok za krokem:

- $x' \cdot y' + (x + y) = (x' + (x + y)) \cdot (y' + (x + y))$ při prvním kroku jsme roznásobili prvek x' prvkem $(x + y)$ a prvek y' prvkem $(x + y)$
- $(x' + (x + y)) \cdot (y' + (x + y)) = ((x' + x) + y) \cdot ((y' + y) + x)$ při druhém kroku jsme pouze vhodněji uzávorkovali dvojice prvků $x' + x$ a $y' + y$
- $((x' + x) + y) \cdot ((y' + y) + x) = (1 + y) \cdot (1 + x)$ při třetím kroku jsme použili axiom (i)
- $(1 + y) \cdot (1 + x) = 1 \cdot 1$ při čtvrtém kroku jsme použili axiom (n)
- $1 \cdot 1 = 1$ při pátém kroku jsme použili axiom (h)

Tím je důkaz proveden. [5] □

Důkaz: $x + xy = x$

- $x + xy = x \cdot 1 + xy = x \cdot (1 + y) = x \cdot 1 = x$ □

Důkaz krok za krokem:

- $x + xy = x \cdot 1 + xy$ při prvním kroku jsme použili axiom (h)
- $x \cdot 1 + xy = x \cdot (1 + y)$ při druhém kroku jsme vytknuli prvek x z prvků $(x \cdot 1)$ a (xy)
- $x \cdot (1 + y) = x \cdot 1$ při třetím kroku jsme použili axiom (n)
- $x \cdot 1 = x$ při čtvrtém kroku jsme použili axiom (h) [5] □

Důkaz: $x + x' \cdot y = x + y$

- $x + x' \cdot y = (x + x') \cdot (x + y) = 1 \cdot (x + y) = x + y$ □

Důkaz krok za krokem:

- $x + x' \cdot y = (x + x') \cdot (x + y)$ při prvním kroku jsme použili axiom (f)
- $(x + x') \cdot (x + y) = 1 \cdot (x + y)$ při druhém kroku jsme použili axiom (i)
- $1 \cdot (x + y) = x + y$ při třetím kroku jsme použili axiom (h) [5] □

Věta 5.3.3

Nechť x, y jsou libovolné prvky množiny B. Pak platí:

(v) $x + y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$

(w) $x \cdot y = 1 \Leftrightarrow x = 1 \wedge y = 1$

(x) $x = y \Leftrightarrow x \cdot y' + x' \cdot y = 0$

(y) $x = y \Leftrightarrow (x + y') \cdot (x' + y) = 1$ [8]

5.4 Booleovské výpočty

Abychom mohli zjednodušit výpočty týkající se určování pravdivostních hodnot výroků obdobně jako v číselné algebře, je potřeba definovat sčítání, násobení a doplněk na dvouprvkové množině H. Při určovaní pravdivostních hodnot v podstatě pracujeme jen s prvky 0 a 1, tj. s dvouprvkovou množinou pravdivostních hodnot výroků. [5]

Poznámka 5.4.1

- Pravdivostní hodnoty výroků budeme označovat symboly 0, 1.
- Dvouprvkovou Booleovu algebru $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ budeme nazývat algebra pravdivostních hodnot, stručně PH-algebra a přiznáme jí symbol $(H, +, \cdot)$.
- Pro rovnost dvou prvků a, b budeme symbolicky používat obyčejného rovnítka $a = b$, pro nerovnost prvků a, b použijeme nerovnítko $a \neq b$. [5]

Definice 5.4.2

Mějme množinu všech výroků V, ke každým dvěma prvkům a, b z množiny H existují jednoznačně určené prvky c, d z množiny H, pro něž platí:

- Jsou-li A, B výroky z množiny V, pro něž je $p(A) = a$, $p(B) = b$, pak je $c = p(A \vee B)$, $d = p(A \wedge B)$.

Tyto prvky budeme nazývat *součet* a, b a *součin* a, b a označovat „$a + b$“ a „$a \cdot b$“. [5]

Poznámka 5.4.2

Názvy součet, součin a symboly + a · jsme si vypůjčili z číselné algebry a název doplněk a symbol ′ z teorie množin. [5]

Definice 5.4.3

Mějme množinu všech výroků V, ke každému prvku a množiny H existuje jednoznačně určený prvek a′ ∈ H, který nazveme *doplněk* k prvku a a pro nějž platí:

- je-li A výrok z množiny V, pro který p (A) = a, pak je a′ = p (A′). [5]

Na základě uvedených definic víme, že pro součet (tab. 10), součin (tab. 11) a doplněk (tab. 12) platí: [5]

Tabulka 10 Součet

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabulka 11 Součin

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabulka 12 Doplněk

′	
0	1
1	0

Příklad 5.4.1

Rozhodněte, zda jsou si níže uvedené prvky rovny:

- $(1 + 0') \cdot 1 + (1' + 1) \cdot (0' + 1) \cdot 0' + 1'$
- $1' + (1 + 0')' \cdot (0' \cdot 1) + 1' + (1' + 0)$

Jelikož již máme na množině H definováno sčítání, násobení a doplněk, můžeme provádět výpočty obdobně jako v číselné algebře.

Řešení:

$(1 + 0') \cdot 1 + (1' + 1) \cdot (0' + 1) \cdot 0' + 1' = (1 + 1) \cdot 1 + (0 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot 1 + 0 =$
$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 1 = \underline{1}$

$1' + (1 + 0')' \cdot (0' \cdot 1) + 1' + (1' + 0) = 0 + (1 + 1)' \cdot (1 \cdot 1) + 0 + (0 + 0) =$
$= 0 + 0 \cdot 1 + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = \underline{0}$

Prvek $(1 + 0') \cdot 1 + (1' + 1) \cdot (0' + 1) \cdot 0' + 1'$ je roven 1, zatímco prvek $1' + (1 + 0')' \cdot (0' \cdot 1) + 1' + (1' + 0)$ je roven 0. Výsledkem tedy je, že uvažované prvky se nerovnají, jsou tedy různé.

Příklad 5.4.2

Zjednodušte zápisy následujících prvků tak, aby obsahovaly co nejméně symbolů:

a) $(a + b' + c)' + ab' + (a'c)'$
b) $ab + ((a'b'c')' + b)'$
c) $(b' + c')' \cdot ac \cdot (b'b)' \cdot (a + b + c')'$
d) $(ac + be)' \cdot (b + e) \cdot ae \cdot (a' + e')$

Ve všech příkladech značí a, b, c, d, e prvky Booleovy algebry $(B, +, \cdot, ')$. Při řešení příkladů musíme dbát vět (a)-(y):

Řešení:

a) $(a + b' + c)' + (a'b)' + (a'c)' = (a' \cdot (b')' \cdot c') + ((a')' + b') + ((a')' + c') =$
$= a'bc' + a + b' + a + c' = a + b' + c'$

Řešení krok za krokem:

- $(a + b' + c)' + (a'b)' + (a'c)' = (a' \cdot (b')' \cdot c') + ((a')' + b') + ((a')' + c')$ při prvním kroku jsme použili axiomy (p), (q)
- $(a' \cdot (b')' \cdot c') + ((a')' + b') + ((a')' + c') = a'bc' + a + b' + a + c'$ při druhém kroku jsme použili axiom (o)
- $a'bc' + a + b' + a + c' = a + b' + c'$ při třetím kroku jsme použili axiomy (k) a (r)

Řešení:

b) $ab + ((a'b'c')' + b)' = ab + (((a')' + (b')' + (c')') + b)' = ab + (a + b + c + b)' =$
$= ab + (a'b'c'b') = ab + a'b'c'$

Řešení krok za krokem:

- $ab + ((a'b'c')' + b)' = ab + (((a')' + (b')' + (c')') + b)'$ při prvním kroku jsme použili axiomy (p), (q)
- $ab + (((a')' + (b')' + (c')') + b)' = ab + (a + b + c + b)'$ při druhém kroku jsme použili axiom (o)
- $ab + (a + b + c + b)' = ab + (a'b'c'b')$ při třetím kroku jsme použili axiom (p)
- $ab + (a'b'c'b') = ab + a'b'c'$ při čtvrtém kroku jsme použili axiom (l)

Řešení:

c) $(b' + c')' \cdot ac \cdot (b' + b)' \cdot (a + b + c')' = ((b')' \cdot (c')') \cdot ac \cdot ((b')' \cdot b') \cdot (a'b'(c')') =$
$= bc \cdot ac \cdot bb' \cdot a'b'c = abc \cdot a'b'$

Řešení krok za krokem:

- $(b' + c')' \cdot ac \cdot (b' + b)' \cdot (a + b + c')' = ((b')' \cdot (c')') \cdot ac \cdot ((b')' \cdot b') \cdot (a'b'(c')')$ při prvním kroku jsme použili axiom (p)
- $((b')' \cdot (c')') \cdot ac \cdot ((b')' \cdot b') \cdot (a'b'(c')') = bc \cdot ac \cdot bb' \cdot a'b'c$ při druhém kroku jsme použili axiom (o)
- $bc \cdot ac \cdot bb' \cdot a'b'c = abc \cdot a'b'$ při třetí kroku jsme použili axiom (l)

Řešení:

d) $(ac + be)' \cdot (b + e) \cdot ae \cdot (a' + e') = ((ac)' \cdot (be)') \cdot (b + e) \cdot ae \cdot (a' + e') =$
$= a \cdot (a' + c') \cdot (b' + e') \cdot (b + e) \cdot e \cdot (a' + e') = (aa' + ac') \cdot (b'b + b'e + e'b + e'e) \cdot$
$\cdot (ea' + ee') = ac' \cdot (b'e + e'b) \cdot ea' = c'e \cdot (b'e + be') = c'e \cdot 1 = c'e$

Řešení krok za krokem:

- $(ac + be)' \cdot (b + e) \cdot ae \cdot (a' + e') = ((ac)' \cdot (be)') \cdot (b + e) \cdot ae \cdot (a' + e')$ při prvním kroku jsme použili axiom (p)
- $((ac)' \cdot (be)') \cdot (b + e) \cdot ae \cdot (a' + e') = a \cdot (a' + c') \cdot (b' + e') \cdot (b + e) \cdot e \cdot (a' + e')$ při druhém kroku jsme použili axiom (q)
- $a \cdot (a' + c') \cdot (b' + e') \cdot (b + e) \cdot e \cdot (a' + e') = (aa' + ac') \cdot (b'b + b'e + e'b + e'e) \cdot \cdot (ea' + ee')$ při třetím kroku jsme pouze roznásobili závorku $(a' + c')$ prvkem a, závorku $(a' + e')$ prvkem e a závorky $(b' + e')$ a $(b + e)$ mezi sebou
- $(aa' + ac') \cdot (b'b + b'e + e'b + e'e) \cdot (ea' + ee') = ac' \cdot (b'e + e'b) \cdot ea'$ při čtvrtém kroku jsme použili axiom (j)
- $ac' \cdot (b'e + e'b) \cdot ea' = c'e \cdot (b'e + be')$ při pátém kroku jsme použili axiom (j)
- $c'e \cdot (b'e + be') = c'e \cdot 1 = c'e$ při šestém kroku jsme použili axiom (i)

5.5 Množinová algebra

Definice 5.5.1

S každou množinou M máme k dispozici také množinu $K = 2^M$ všech jejích *podmnožin* a na ní operace $\cup: K \times K \to K$ sjednocení množin a $\cap: K \times K \to K$ průnik množin.

Ke každé množině $M \in K$ máme také její *doplňkovou* množinu $M' = K \setminus M$, což je další unární operace.

Největší objekt, tj. celá množina M, který je *neutrální* vůči operaci $\cap$ proto budeme v této souvislosti označovat jako 1. Obdobně se chová prázdná množina $\emptyset \in K$ vůči operaci $\cup$, kterou budeme v této souvislosti značit jako 0. [7]

Věta 5.5.2

Na množině K všech podmnožin v M shrneme již výše uvedené vlastnosti pro všechny prvky A, B, C (význačné prvky $0 = \emptyset$ a $1 = M$ a unární operace vzetí doplňku M' k podmnožině M už byly definovány):

(1) A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C, operace ∩ je asociativní
(2) A ∪ (B ∪ C) = (A ∪ B) ∪ C, operace ∪ je asociativní
(3) A ∩ B = B ∩ A, A ∪ B = B ∪ A, operace ∩ a ∪ jsou komutativní
(4) A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C), distributivita operace ∪ vůči průniku ∩
(5) A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C), distributivita operace ∩ vůči sjednocení ∪
(6) existuje 0 ∈ K tak, že A ∨ 0 = A, existence neutrálního prvku vůči operaci ∪
(7) existuje 1 ∈ K tak, že A ∩ 1 = A, existence neutrálního prvku vůči operaci ∩
(8) A ∩ A′ = 0, A ∪ A′ = 1. existence neutrálního prvku vůči ∩ a ∪ [7]

Poznámka 5.5.1

- Vlastnosti (1), (2) a (3) platí stejně jako u číselných oborů a operací sčítání a násobení.
- Vlastnosti (4) a (5) vyžadují jak distributivitu operace sjednocení ∪ vůči průniku ∩, tak naopak. To už pochopitelně u sčítání a násobení čísel platit nemůže – platí tam pouze distributivita sčítání vůči násobení, ale ne naopak.
- Vlastnosti (6), (7) a (8) konstatují existenci neutrálních prvků vůči oběma operacím a také existenci obdoby k „inverzím“ ke všem prvkům. [7]

Definice 5.5.2

Množině K spolu s dvěma binárními operacemi ∩ a ∪ a jednou unární operací ′ splňující vlastnosti (1)-(8) říkáme *Booleovská algebra*. Operaci ∩ budeme říkat infimum (případně průnik, anglicky často také meet), operaci ∪ budeme říkat supremum (případně sjednocení, anglicky také join.) Prvku A′ se říká doplněk k prvku A. [7]

Příklad 5.5.1

Zjednodušte zápis množiny tak, aby obsahoval co nejméně symbolů. A, B, C, D, E jsou podmnožiny dané neprázdné množiny M.

- $(A \cap D \cap B) \cup (B \cup (A \cap D)')' \cup (A' \cap C \cap D') \cup (A \cap (D' \cup A'))$

V předchozích příkladech jsme podobné příklady řešili pomocí Vennových diagramů. V podkapitole 2.2 však byly uvedeny Vennovy diagramy nejvýše pro čtyři množiny, tuto metodu tedy použít nemůžeme. Čeho ovšem můžeme využít je fakt, že množinová algebra (M, $\cup$, $\cap$, $'$) je modelem Booleovy algebry. Díky tomuto faktu můžeme zápis zadané množiny přepsat za použití symboliky užívané v Booleově algebře (B, +, ·, $'$).

Změny budou následující:

- A → a
- B → b
- C → c
- D → d
- E → e
- $\cap$ → ·
- $\cup$ → +

Použitím těchto změn se nám zápis zadané množiny změní následovně:

- $(a \cdot d \cdot b) + (b + (a \cdot d)')' + (a' \cdot c \cdot d') + (a \cdot (d' + a'))$

V novém zápisu množiny jsou již některé závorky a znaménka zbytečná, finální podoba tedy bude následující:

- $adb + (b + (ad)')' + a'cd' + a \cdot (d' + a')$

Nyní už zápis upravujeme pomocí axiomů (a)-(y):

- $adb + (b + (ad)')' + a'cd' + a \cdot (d' + a') = abd + (b + a' + d')' + a'cd' + ad' + aa' =$ $= abd + b'ad + a'cd' + ad' + 0 = ad \cdot (b + b') + a'cd' + ad' = ad + ad' + a'cd' =$ $= a \cdot (d + d') + a'cd' = a + a'cd'$

Řešení krok za krokem:

- $adb + (b + (ad)')' + a'cd' + a \cdot (d' + a') = abd + (b + a' + d')' + a'cd' + ad' + aa'$ při prvním kroku jsme použili axiomy (q) a (e)
- $abd + (b + a' + d')' + a'cd' + ad' + aa' = abd + b'ad + a'cd' + ad' + 0$ při druhém kroku jsme použili axiomy (p) a (j)

- $abd + b'ad + a'cd' + ad' + 0 = ad \cdot (b + b') + a'cd' + ad'$ při třetím kroku jsme vytknuli prvek ad z prvků abd a $b'ad$
- $ad \cdot (b + b') + a'cd' + ad' = ad + ad' + a'cd'$ při čtvrtém kroku jsme použili axiom (i)
- $ad + ad' + a'cd' = a \cdot (d + d') + a'cd'$ při pátém kroku jsme vytknuli prvek a z prvků ad a ad'
- $a \cdot (d + d') + a'cd' = a + a'cd'$ při šestém kroku jsme použili axiom (i)

Nyní máme zápis, který už dále upravit nemůžeme, můžeme jej pouze převést do původní podoby:

- $a + a'cd' \rightarrow A \cup (A' \cap C \cap D')$

tento zápis množiny už by bylo možné zakreslit do Vennova diagramu.

Příklad 5.5.2

Zjednodušte zápis množiny tak, aby obsahoval co nejméně symbolů. A, B, C, D, E jsou podmnožiny dané neprázdné množiny M.

- $(D \cap A \cap B) \cup (C \cap (A \cup E)') \cup (D' \cap (A' \cup B')') \cup ((A' \cap E')' \cap C)$

V tomto příkladě máme opět pět podmnožin A, B, C, D, E množiny M. Zápis proto opět přepíšeme za použití symboliky užívané v Booleově algebře (B, +, ·, ′).

- $(d \cdot a \cdot b) + (c \cdot (a + e)') + (d' \cdot (a' + b')') + ((a' \cdot e')' \cdot c)$

V novém zápisu množiny jsou již některé závorky a znaménka zbytečná, finální podoba tedy bude následující:

- $dab + c \cdot (a + e)' + d' \cdot (a' + b')' + ((ae)')' \cdot c$

Nyní už zápis upravujeme stejně jako v předchozích příkladech pomocí axiomů (a)-(y):

- $dab + c \cdot (a + e)' + d' \cdot (a' + b')' + ((ae)')' \cdot c = dab + c \cdot (a' \cdot e') + d' \cdot ((a')' \cdot \cdot (b')') + (ae) \cdot c = dab + d'ab + ca'e' + aec = ab \cdot (d + d') + c \cdot (a'e' + ae) = ab + c$

Řešení krok za krokem:

- $dab + c \cdot (a + e)' + d' \cdot (a' + b')' + ((ae)')' \cdot c = dab + c \cdot (a' \cdot e') + d' \cdot ((a')' \cdot \cdot (b')') + (ae) \cdot c$ při prvním kroku jsme použili axiom (p) a (o)

- $dab + c \cdot (a' \cdot e') + d' \cdot ((a')' \cdot (b')') + (ae) \cdot c = dab + d'ab + ca'e' + aec$ při druhé kroku jsme použili axiom (o)
- $dab + d'ab + ca'e' + aec = ab \cdot (d + d') + c \cdot (a'e' + ae)$ při třetím kroku jsme vytknuli prvek ab z prvků dab a d′ab a prvek c z prvků ca′e′ a aec
- $ab \cdot (d + d') + c \cdot (a'e' + ae) = ab + c$ při čtvrtém kroku jsme využili axiom (i)

Nyní máme zápis, který už dále upravit nemůžeme, můžeme jej pouze převést do původní podoby:

- $ab + c \rightarrow (A \cap B) \cup C$

tento zápis množiny už by bylo možné zakreslit do Vennova diagramu.

Příklad 5.5.3

Zjednodušte zápis množiny tak, aby obsahoval co nejméně symbolů. A, B, C, D, E jsou podmnožiny dané neprázdné množiny M.

- $((A \cup C) \cap D) \cup ((D \cup G)' \cap F)' \cup (A \cap B \cap E)' \cup ((D \cap C) \cup E)' \cup$ $\cup ((F \cap G) \cup B)' \cup C'$

V tomto příkladě máme sedm podmnožin A, B, C, D, E, F, G množiny M. Zápis proto opět přepíšeme za použití symboliky užívané v Booleově algebře (B, +, ·, ′).

- $((a + c) \cdot d) + ((d + g)' \cdot f)' + (a \cdot b \cdot e)' + (d + c)' + (f' + g')' + c'$

V novém zápisu množiny jsou již některé závorky a znaménka zbytečná, finální podoba tedy bude následující:

- $(a + c) \cdot d + ((d + g)' \cdot f)' + (abe)' + (d + c)' + (f' + g')' + c'$

Nyní už zápis upravujeme stejně jako v předchozích příkladech pomocí axiomů (a)-(y):

- $(a + c) \cdot d + ((d + g)' \cdot f)' + (abe)' + (d + c)' + (f' + g')' + c' = ad + cd + (d'g'f)' +$ $+ a' + b' + e' + d'c' + fg + c' = ad + cd + d + g + f' + a' + b' + e' + d'c' + fg + c' =$ $= a' + b' + d + ad + c' + d'c' + cd + f' + g + fg = a' + b' + d + c' + cd + f' + g =$ $= a' + b' + c' + d + f' + g$

Řešení krok za krokem:

- $(a + c) \cdot d + ((d + g)' \cdot f)' + (abe)' + (d + c)' + (f' + g')' + c' = ad + cd + (d'g'f)' + a' + b' + e' + d'c' + fg + c'$ při prvním kroku jsme použili axiomy (e), (p) a (q)
- $ad + cd + (d'g'f)' + a' + b' + e' + d'c' + fg + c' = ad + cd + d + g + f' + a' + b' + e' + d'c' + fg + c'$ při druhém kroku jsme použili axiom (q)
- $ad + cd + d + g + f' + a' + b' + e' + d'c' + fg + c' = a' + b' + d + ad + c' + d'c' + cd + f' + g + fg$ při třetím kroku došlo pouze k taktickému uspořádání prvků
- $a' + b' + d + ad + c' + d'c' + cd + f' + g + fg = a' + b' + d + c' + cd + f' + g$ při čtvrtém kroku jsme použili axiom (r)
- $a' + b' + d + c' + cd + f' + g = a' + b' + c' + d + f' + g$ při pátém kroku jsme použili axiom (r)

Nyní máme zápis, který už dále upravit nemůžeme, můžeme jej pouze převést do původní podoby:

- $a' + b' + c' + d + f' + g \rightarrow A' \cup B' \cup C' \cup D \cup F' \cup G$

5.6 Algebra pravdivostních hodnot výroků

Definice 5.6.1

V klasické matematice se používá klasická dvouhodnotová logika, tj. každému výroku V je přirazena jeho pravdivostní hodnota p (V), kterou je buď nepravda, nebo pravda. Označíme-li nepravdu písmenem n a pravdu písmenem p, zapíšeme p (V) = n, resp. p (V) = p. Na množině {n, p} definujeme operace *logické sčítání* a *logické násobení* tak, abychom jimi vystihli operace s výroky – *disjunkci* (tab. 13) a *konjunkci* (tab. 14). Záznamy těchto operací tabulkami se čtyřmi řádky připomínají zápisy funkci dvou proměnných: [6]

Tabulka 13 Disjunkce

$p\ (A)$	$p\ (B)$	$p\ (A \vee B)$
p	p	p
p	n	p
n	p	p
n	n	n

Tabulka 14 Konjunkce

$p\ (A)$	$p\ (B)$	$p\ (A \wedge B)$
p	p	p
p	n	n
n	p	n
n	n	n

Poznámka 5.6.1

V podobě tabulek 2 x 2 pro tytéž operace lépe vynikne jejich algebraický charakter. Jde o binární operace na množině {n, p}, symboly „$\oplus$, $\odot$“ označíme „logický součet, logický součin“ pravdivostních hodnot. [6]

Tabulka 15 Klasický součet

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabulka 16 Klasický součin

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabulka 17 Logický součet

$\oplus$	n	p
n	n	p
p	p	p

Tabulka 18 Logický součin

$\odot$	n	p
n	n	n
p	n	p

Poznámka 5.6.2

Je zřejmé, že tabulky 15, 17 operací „+, $\oplus$“ a tabulky 16, 18 operací „·, $\odot$“ vykazují nápadnou analogii, existuje vzájemně jednoznačné zobrazení jedněch na druhé:

- $n \leftrightarrow 0$, $p \leftrightarrow 1$, $\oplus \leftrightarrow +$, $\odot \leftrightarrow \cdot$

Tento izomorfismus struktur $(\{n, p\}, \oplus, \odot)$, $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ prokazuje, že algebra pravdivostních hodnot je modelem dvouprvkové Booleovy algebry. Je tedy zbytečné učit se kalkulu pravdivostních hodnot, ovládáme-li booleovský kalkul. [6]

Věta 5.6.2

Transformaci pojmů výrokové logiky do PH-algebry umožňují různé tautologie výrokové logiky, jimiž redukujeme počet logických spojek na tři – negaci, konjunkci a disjunkci:

- $p\ (X \Rightarrow Y) = p\ (X' \vee Y)$
- $p\ (X \Leftrightarrow Y) = p\ [(X \wedge Y) \vee (X' \wedge Y')]$ [6]

Poznámka 5.6.3

Překlad z výrokové logiky do PH-algebry a zpět:

$p\ (X) \ldots x$	$p\ (X \wedge Y) \ldots x \cdot y$
$p\ (Y) \ldots y$	$p\ (X \vee Y) \ldots x + y$
$n \ldots 0$	$p\ (X \Rightarrow Y) \ldots x' + y$
$p \ldots 1$	$p\ (X \Leftrightarrow Y) \ldots x \cdot y + x' \cdot y'$ [6]

Příklad 5.6.1

Určete pravdivostní hodnotu níže uvedeného výroku, platí-li $p\ (A) = 1$ a $p\ (B) = 0$.

- $(A \vee B') \wedge (B \Rightarrow A)' \vee (A \wedge B) \wedge (A' \Rightarrow B')$

Řešení:

$p\ ((A \vee B') \wedge (B \Rightarrow A)' \vee (A \wedge B) \wedge (A' \Rightarrow B')) =$

$= p\ ((A \vee B') \wedge (B' \vee A)' \vee (A \wedge B) \wedge ((A')' \vee B')) =$

$= (p\ (A) + p\ (B)') \cdot (p\ (B)' + p\ (A))' + (p\ (A) \cdot p\ (B)) \cdot ((p\ (A)')' + p\ (B)') =$

$= (1 + 0') \cdot (0' + 1)' + (1 \cdot 0) \cdot ((1')' + 0') =$

$= (1 + 1) \cdot (1 + 1)' + (1 \cdot 0) \cdot (0' + 1) =$

$= (1 + 1) \cdot (1 + 1)' + (1 \cdot 0) \cdot (1 + 1) =$

$= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 =$

$= 0 + 0 =$

$= \underline{0}$

Pravdivostní hodnota výroku $(A \vee B') \wedge (B \Rightarrow A)' \vee (A \wedge B) \wedge (A' \Rightarrow B')$ za předpokladu, že $p\ (A) = 1$ a $p\ (B) = 0$ je rovna 0.

Příklad 5.6.2

Určete pravdivostní hodnotu následující výrokové formule, je-li:

$p\,(A) = 0 \qquad p\,(B) = 1$

- $(A \vee B') \wedge (B \Rightarrow A)' \vee (A \wedge B) \wedge (A' \Rightarrow B')$

Řešení:

Nejdříve si pomocí De Morganových zákonů zjednodušíme zadaný zápis výrokové formule tak, abychom vyloučili všechny implikace:

$$(A \vee B') \wedge (B' \vee A)' \vee (A \wedge B) \wedge (A \vee B') =$$
$$= (A \vee B') \wedge (B \wedge A') \vee (A \wedge B) \wedge (A \vee B')$$

Nyní si zápis přepíšeme za použití symbolů z Booleovy algebry:

$$(a + b') \cdot (ba') + (ab) \cdot (a + b') =$$

$$= (a + b') \cdot (a'b + ab) =$$

$$= (a + b') \cdot (b \cdot (a'a)) =$$

$$= a + b'$$

Nyní do výsledku dosadíme zadané pravdivostní hodnoty:

- $a + b' = 0 + 1' = 0 + 0 = 0$

Pravdivostní hodnota zadané výrokové formule je rovna 0.

Příklad 5.6.3

Určete pravdivostní hodnotu následující výrokové formule, je-li:

$p\,(A) = 1 \qquad p\,(B) = 1$

$p\,(C) = 0 \qquad p\,(D) = 0$

- $((A \Rightarrow B)' \wedge (B' \vee C)) \Rightarrow (C \wedge D')' \wedge (D \Rightarrow A')$

Řešení:

Nejdříve si pomocí De Morganových zákonů zjednodušíme zadaný zápis výrokové formule tak, abychom vyloučili všechny implikace:

$$((A \Rightarrow B)' \wedge (B' \vee C)) \Rightarrow (C \wedge D')' \wedge (D \Rightarrow A') =$$

$$= ((A' \vee B)' \wedge (B' \vee C)) \Rightarrow (C' \vee D) \wedge (D' \vee A') =$$

$$= ((A \wedge B') \wedge (B' \vee C)) \Rightarrow (C' \vee D) \wedge (D' \vee A') =$$

$$= ((A \wedge B') \wedge (B' \vee C))' \vee (C' \vee D) \wedge (D' \vee A')$$

Nyní si zápis přepíšeme za použití symbolů z Booleovy algebry:

$$((ab' \cdot (b' + c))' + ((c' + d) \cdot (d' + a')) =$$

$$= (ab')' + (b' + c')' + c'd' + c'a' + dd' + da' =$$

$$= a' + b + bc + c'd' + c'a' + 0 + da' =$$

$$= a' + b + c'd' + c'a' + da' =$$

$$= b + c'd' + c'a' + a' =$$

$$= b + c'd' + a'$$

Nyní do výsledku dosadíme zadané pravdivostní hodnoty:

- $a' + b + c'd' = 1' + 1 + (0' \cdot 0') = 0 + 1 + 1 \cdot 1 = 1$

Pravdivostní hodnota zadané výrokové formule je rovna 1.

6 Praktická část

Praktická část zahrnuje menší výzkum, který proběhl prostřednictvím online dotazníku pro učitele matematiky na několika vybraných gymnáziích v České republice.

6.1 Cíl výzkumu

Cílem mého výzkumu bylo zjistit, jaké je povědomí učitelů v praxi o Booleově algebře a zda by dané učivo vrátili zpět do osnov výuky matematiky na středních školách.

6.2 Metodologie výzkumu

Prostřednictvím vedení škol jsem oslovila 32 gymnázií po celé České republice rozesláním online dotazníku, který byl určen pro učitele matematiky na gymnáziích. Dotazník byl vytvořen prostřednictvím webové stránky www.my.survio.com. Respondenti v krátkém dotazníku odpovídali na 8 otázek. Většina z nich byla tvořena formou uzavřených otázek s možností výběru odpovědi nebo vysvětlení, proč se respondenti pro danou odpověď rozhodni. Některé otázky pak byly otevřené. Respondenti byli obeznámeni s tím, že účast ve výzkumu je anonymní a dobrovolná a dotazník bude použit pouze k výzkumným účelům v rámci mé bakalářské práce.

Co se týče výběru škol, na které byly dotazníky odeslány, záměrně byla vybírána spíše gymnázia, která mají buď všeobecné nebo přímo matematické zaměření.

Platných odpovědí dotazníku bylo 36. Z důvodu, že je vzorek poměrně malý, nelze výsledek dotazníku považovat za stoprocentně objektivní. Z výsledku je však patrné, jak by mohl výzkum na větším vzorku vypadat.

Otázky v dotazníku byly následující:

1. Jaká je délka Vaší praxe ve školství?
2. Jaká je Vaše další aprobace kromě předmětu matematika?
3. Jaké je zaměření gymnázia, na kterém vyučujete?
4. Slyšel/a jste někdy o Booleově algebře?
5. Pokud jste na předešlou otázku odpověděl/a ANO, kde jste se o problematice Booleovy algebry dozvěděl/a nejvíce? Pokud jste odpověděl/a NE, další otázky už jsou pro Vás bezpředmětné, a prosím Vás tedy o odeslání dotazníku v této podobě.
6. Pokuste se stručně definovat pojem Booleovského počítání.

7. Učivo Booleovy algebry bylo kdysi vyučováno v rámci některých středních a vysokých škol. Souhlasil/a byste s opětovným navrácením tohoto učiva do výuky?
8. V případě, že jste na minulou otázku odpověděl/a NE, nezařadil/a byste toto učivo alespoň do výuky seminářů z matematiky připravujících studenty na studium na vysokých školách nebo pro zájemce o matematické olympiády či ostatní vědomostní soutěže?

6.3 Zpracování a vyhodnocení výsledků

Otázka 1. Jaká je délka Vaší praxe ve školství?

- Na první otázku odpovědělo celkem 34 respondentů s výsledkem (tab. 19, obr. 29):

Tabulka 19 Délka praxe ve školství

Možnosti odpovědí	Počet responzí	Podíl
0–5 let	3	8,8 %
6–10 let	3	8,8 %
11–20 let	12	35,3 %
21 let a více	16	47,1 %

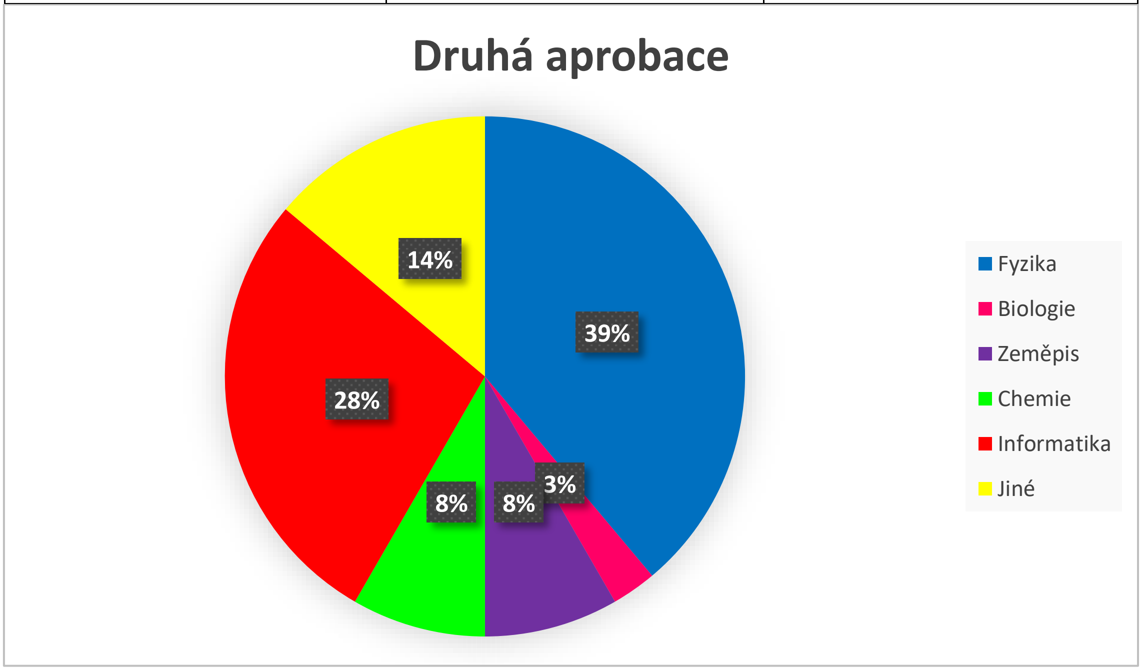
Obrázek 29 Délka praxe ve školství

Otázka 2. Jaká je Vaše další aprobace kromě předmětu matematika?

- Na druhou otázku odpovědělo celkem 36 respondentů s výsledkem (tab. 20, obr. 30):

Tabulka 20 Druhá aprobace

Možnosti odpovědí	Počet responzí	Podíl
Fyzika	14	38,89 %
Biologie	1	2,78 %
Zeměpis	3	8,33 %
Chemie	3	8,33 %
Informatika	10	27,78 %
Jiné	5	13,89 %



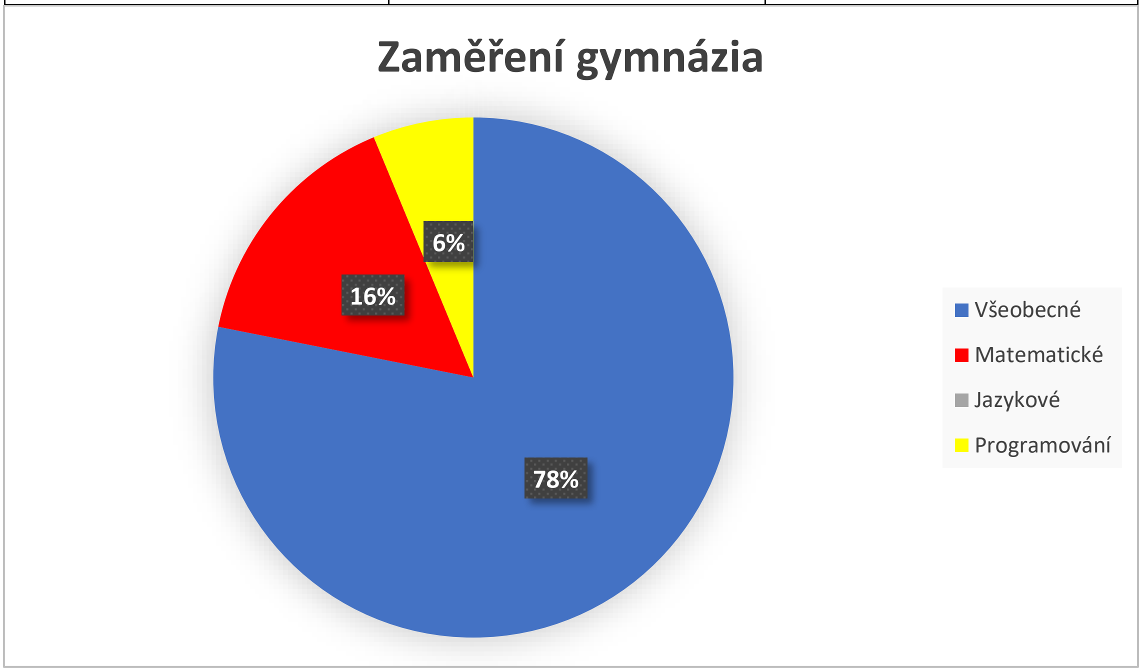
Obrázek 30 Druhá aprobace

Otázka 3. Jaké je zaměření gymnázia, na kterém vyučujete?

- Na třetí otázku odpovědělo celkem 32 respondentů s výsledkem (tab. 21, obr. 31):

Tabulka 21 Zaměření gymnázia

Možnosti odpovědí	Počet responzí	Podíl
Všeobecné	25	78,1 %
Matematické	5	15,6 %
Jazykové	0	0 %
Programování	2	6,3 %



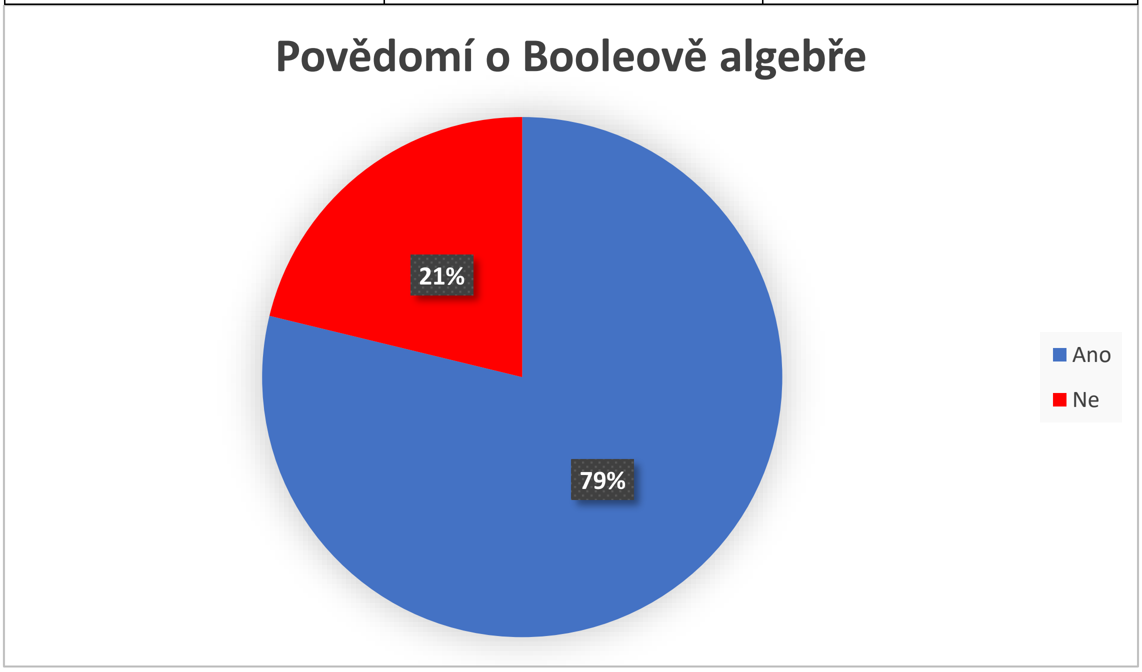
Obrázek 31 Zaměření gymnázia

Otázka 4. Slyšel/a jste někdy o Booleově algebře?

- Na čtvrtou otázku odpovědělo celkem 33 respondentů s výsledkem (tab. 22, obr. 32):

Tabulka 22 Povědomí o Booleově algebře

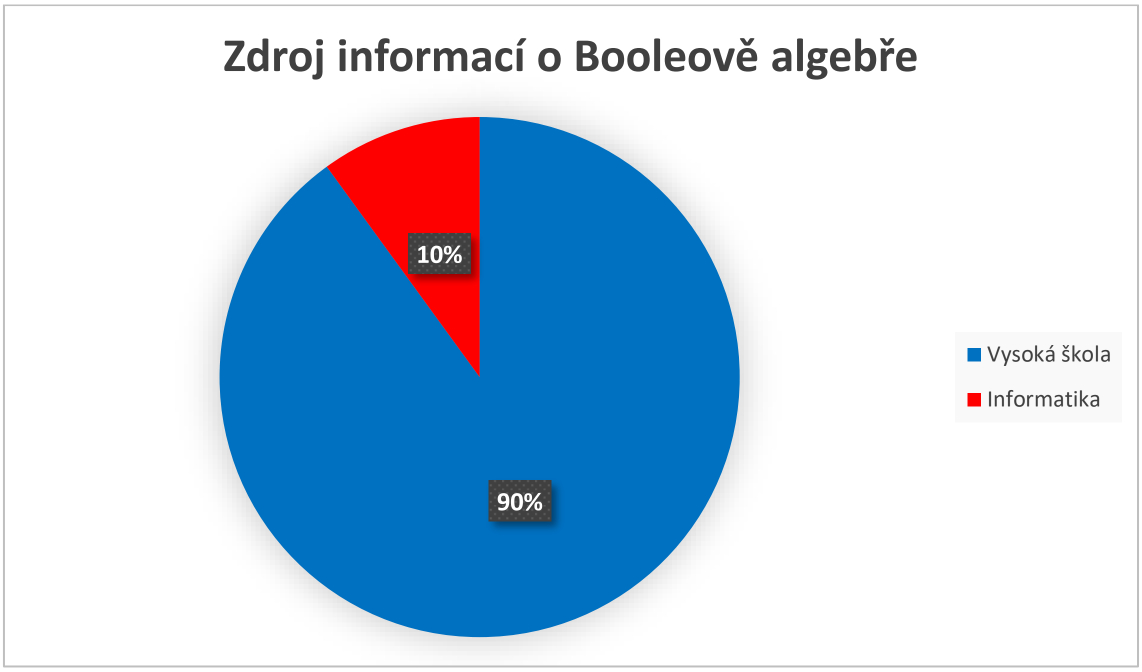
Možnosti odpovědí	Počet responzí	Podíl
Ano	26	78,79 %
Ne	7	21,21 %



Obrázek 32 Povědomí o Booleově algebře

Otázka 5. Pokud jste na předešlou otázku odpověděl/a ANO, kde jste se o problematice Booleovy algebry dozvěděl/a nejvíce?

- Na pátou otázku odpovědělo celkem 10 respondentů s výsledkem (obr. 33):
  - 9 respondentů odpovědělo, že se o Booleově algebře dozvěděli na vysoké škole
  - 1 respondent odpověděl, že se s Booleovou algebrou setkal díky tomu, že učí informatiku



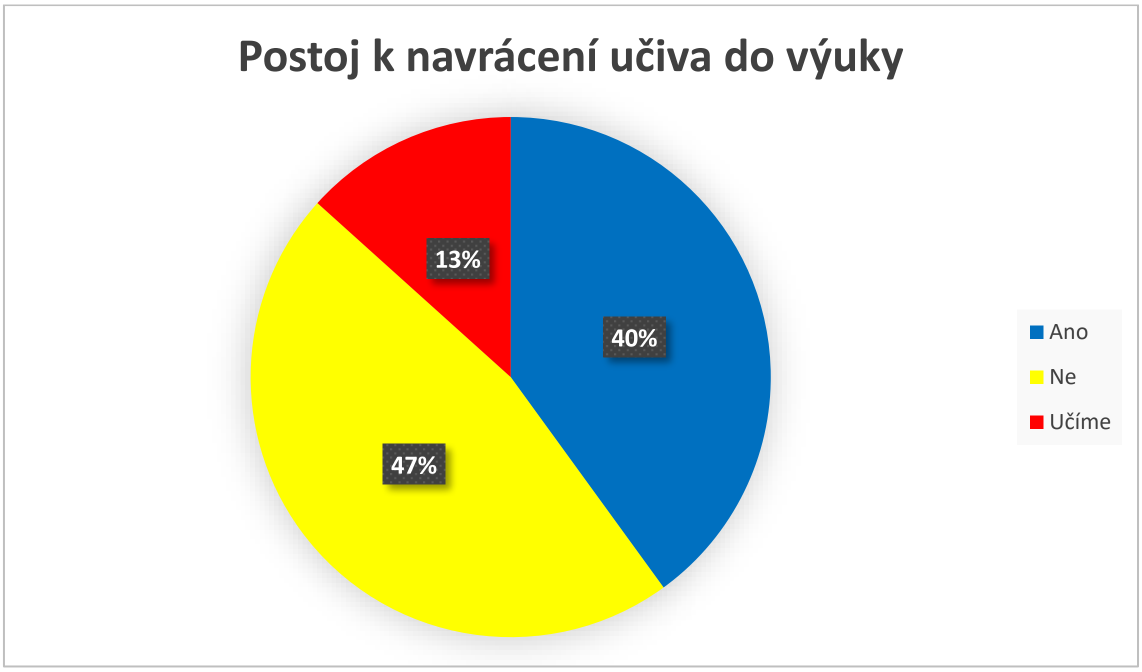
Obrázek 33 Zdroj informací o Booleově algebře

Otázka 6. Pokuste se stručně definovat pojem Booleovského počítání.

- Na šestou otázku odpověděli celkem 4 respondenti s výsledkem:
  - 3 respondenti odpověděli správně
  - 1 respondent přiznal, že už si na Booleovu algebru vůbec nevzpomíná

Otázka 7. Učivo Booleovy algebry bylo kdysi vyučováno v rámci některých středních a vysokých škol. Souhlasil/a byste s opětovným navrácením tohoto učiva do výuky?

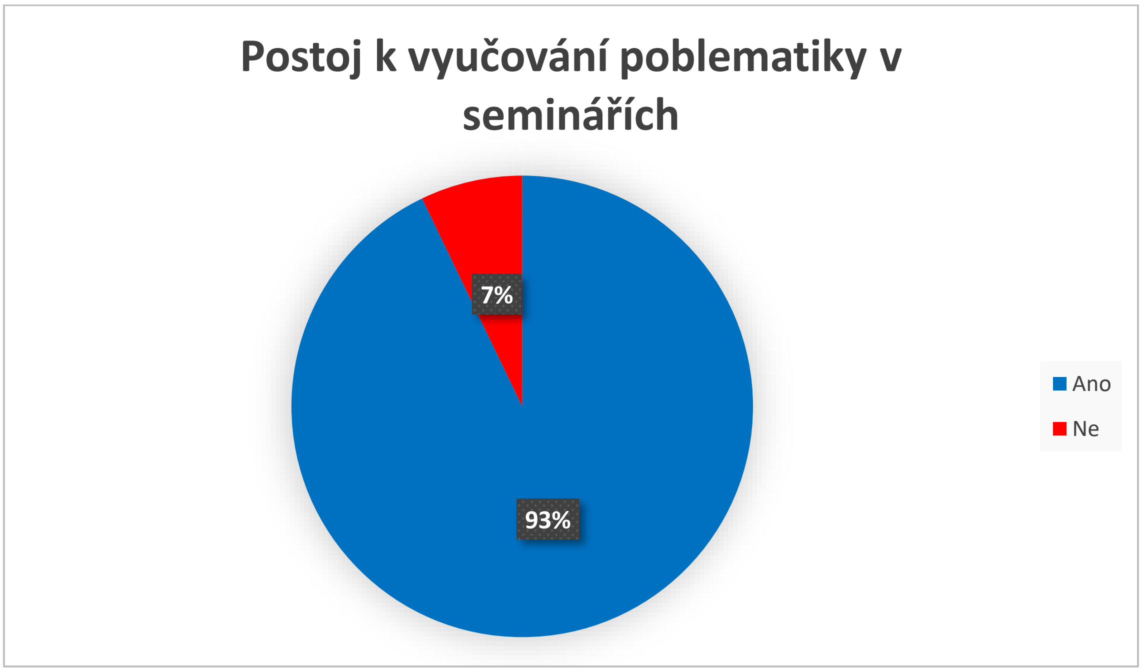
- Na sedmou otázku odpovědělo celkem 15 respondentů s výsledkem (obr. 34):
  - 6 respondentů by bylo pro navrácení učiva do výuky
  - 7 respondentů by učivo do výuky nevrátilo
  - 2 respondenti uvedli, že je na jejich gymnáziu Booleova algebra vyučována



Obrázek 34 Postoj k navrácení učiva do výuky

Otázka 8. V případě, že jste na minulou otázku odpověděl/a NE, nezařadil/a byste toto učivo alespoň do výuky seminářů z matematiky připravujících studenty na studium na vysokých školách nebo pro zájemce o matematické olympiády či ostatní vědomostní soutěže?

- Na osmou otázku odpovědělo celkem 14 respondentů s výsledkem (obr. 35):
    - 13 respondentů by souhlasilo se zařazením učiva Booleovy algebry do výuky seminářů z matematiky
    - 1 respondent by se zařazením tohoto učiva do výuky seminářů z matematiky nesouhlasil



Obrázek 35 Postoj k vyučování problematiky v seminářích

6.4 Závěrečná diskuze

Na dotazník odpovědělo celkem 36 učitelů matematiky z různých gymnázií v České republice. Délka praxe 82 % dotazovaných učitelů je v rozmezí 11 let a více. Většina respondentů jsou tedy zkušení učitelé s poměrně dlouhou praxí. Jako druhou aprobaci má největší procento respondentů fyziku nebo informatiku, což si myslím, že výrazně zvýšilo procento respondentů, pro které Booleova algebra nebyla cizím termínem. Jak už z první kapitoly o Georgu Booleovi víme, jeho studie přispěly k rozvoji počítačového programování a elektrických obvodů. Právě učitelé těchto dvou předmětů tedy hodnotili problematiku Booleovy algebry jako zajímavou a užitečnou.

Ačkoli jsem svým dotazníkem oslovila nejen všeobecné, ale i matematicky a na programování zaměřené gymnázia, až 78 % respondentů, kteří na dotazník odpověděli, vyučují právě na gymnáziu, které je zaměřeno na všeobecné vzdělání. Zajímavým zjištěním bylo, že 79 % respondentů už o Booleově algebře v minulosti slyšelo. Znalost problematiky Booleovy algebry, totiž bylo podmínkou k tomu, aby respondenti v dotazníku mohli pokračovat, jelikož zbylé otázky už se týkaly pouze této oblasti. V další otázce, která se ptá na stručnou definici Booleovského počítání odpověděli pouze 4 respondenti, z nichž pouze 3 opravdu dokázali v krátkosti popsat, o co v rámci Booleovského počítání jde.

Se zařazením Booleovy algebry do osnov běžných hodin matematiky by souhlasilo 40 % učitelů, kteří uváděli, že v rámci všeobecného přehledu a v souvislosti s učivem informatiky by zařazení výuky do osnov jistě mělo význam. Podle těchto argumentů je patrné, že se zde projevil fakt, že až 67 % respondentů vyučuje kromě matematiky také fyziku nebo informatiku. Na druhou stranu proti zavedení Booleovy algebry do běžné výuky by bylo 47 % učitelů, kteří tvrdí, že na toto učivo není dost času, že žáci nezvládají ani to, co je v osnovách nyní nebo že je učivo Booleovy algebry příliš abstraktní pro výuku na středních školách. 13 % respondentů se nechalo slyšet, že Booleovu algebru v osnovách na jejich gymnáziích mají. Bavíme-li se o poslední otázce z dotazníku, která se týkala vyučování Booleovy algebry alespoň v matematických seminářích, můžeme si všimnout, že výsledek je razantnější. 93 % respondentů by souhlasilo, zatímco pouze 7 % učitelů by bylo proti. Respondenti, kteří souhlasili nejčastěji argumentovali tím, že je toto téma zajímavé a v běžných hodinách na něj bohužel není čas. Podle některých by se učivo dalo interpretovat jako další varianta při řešení některých úloh a pomohlo by při studiu informatiky nebo v dalším studiu na vysokých školách. Podmínkou pro některé respondenty by však muselo být to, aby seminář navštěvovali jen studenti, kteří jsou nadaní a mají o matematiku opravdu zájem, a ne ti, na které by seminář „zbyl“. Respondenti, kteří byli proti vyučování této problematiky v seminářích matematiky argumentovali tím, že jsou i zajímavější témata, na která v běžných hodinách není čas.

Závěr

Cílem mé bakalářské práce bylo shrnutí základních pojmů, které se týkají Booleovy algebry, množin, výroků a operací tak, aby byla práce příznivá pro studenty jak středních, tak i vysokých škol – a to například v rámci přípravy na státní závěrečné zkoušky. Řešené příklady měly posloužit jako možnost samostatného procvičení daného učiva díky detailním postupům. Výzkum v praktické části bakalářské práce měl zmapovat, jaké je povědomí učitelů na gymnáziích v České republice o Booleově algebře a zda by souhlasili se zařazením tohoto učiva do osnov běžných vyučovacích hodin či alespoň na matematiku specializovaných seminářů.

V úvodu mé bakalářské práce jsem uvedla pár informací o tom, kdo to George Boole byl, čím se v životě zabýval, o některých dílech, která ovlivnila jeho život a v neposlední řadě také o tom, za co mu vděčíme.

V dalších kapitolách jsem se přesunula k definování pojmů nezbytných pro definování a využití Booleovy algebry. Kapitoly, které této problematice předcházely se zabývaly množinami a Vennovými diagramy, výrokovou logikou a operacemi na množinách a jejich vlastnostmi. Teprve po získání vědomostí z tohoto teoretickém podkladu bylo možné definovat Booleovu algebru, její vlastnosti a pravidla pro Booleovské počítání. V závěru každé kapitoly jsem uvedla řešené příklady, díky kterým si čtenáři mohou ihned ověřit pochopení dané látky.

V praktické části mé bakalářské práce jsem uvedla výzkum formou dotazníku pro učitele matematiky na několika vybraných gymnáziích v České republice. Mezi platné odpovědi bylo zařazeno 36 dotazníků. Povědomí o Booleově algebře je podle odpovědí vysoké – až 79 % respondentů už se s Booleovou algebrou setkalo, avšak definici Booleovského počítání byli schopni vytvořit pouze 3 respondenti. 40 % respondentů by souhlasilo se zařazením učiva Booleovy algebry do výuky běžných hodin matematiky z důvodu všeobecného přehledu, 13 % respondentů Booleovu algebru na jejich gymnáziích vyučuje a 47 % by se zařazením této problematiky do osnov nesouhlasilo, a to většinou proto, že mají pocit, že na toto učivo není v běžných hodinách čas. Ohlasy na vyučování Booleovy algebry v seminářích specializovaných na matematiku byly znatelně lepší, až 93 % respondentů by s vyučováním této problematiky v seminářích souhlasilo. Pouze 7 % respondentů si myslí, že existují i zajímavější témata, na která v běžných hodinách není čas.

Seznam literatury

[1] COLLINS, Sara. *George Boole*. Wichita State University [online]. [cit. 2019-03-13]. Dostupné z: http://www.math.wichita.edu/history/men/boole.html

[2] *George Boole: BRITISH MATHEMATICIAN*. Encyclopadeia Britannica [online]. [cit. 2019-03-13]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/George-Boole

[3] HORÁK, Pavel, *Základy matematiky*. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1441/podzim2012/MA2BP_PAL1/Algebra-skripta.pdf

[4] MORAVEC, Luboš. *Webová aplikace pro výuku matematické logiky na střední škole* [online]. Praha, 2008 [cit. 2019-03-28]. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~portal/logika/. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce RNDr. Jarmila Robová, CSc.

[5] ODVÁRKO, Oldřich. *Booleova algebra: pro účastníky matematické olympiády.* 1. vyd. Praha: Mladá fronta, Škola mladých matematiků, 1973, 120 s.

[6] ODVÁRKO, Oldřich, Jaroslav ŠEDIVÝ a Emil CALDA. *Metody řešení matematických úloh*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990, 264 s.

[7] SLOVÁK, Jan, Martin PANÁK a Michal BULANT. *Matematika drsně a svižně*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2013, 773 s.

[8] ŠTĚPÁNEK, Luboš. *Booleova algebra*. Matematický korespondenční seminář [online]. Oldřichov, 2009 [cit. 2019-03-28]. Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/library/BooleovaAlgebraLS/BooleovaAlgebraLS.pdf

[9] VIKTORA, Václav. *Matematika I: Pro studium učitelství v 1. až 4. ročníku ZŠ.* 4. dotisk. Brno: Rektorát UJEP Brno, 1983, 223 s.

[10] *Základní pojmy výrokové logiky: Jazyk výrokového kalkulu*. Mendelova univerzita v Brně [online]. Brno [cit. 2019-03-28]. Dostupné z: https://is.mendelu.cz/eknihovna/opory/zobraz_cast.pl?cast=680

Přílohy

Dotazník „Povědomí učitelů o Booleově algebře“

Vážené respondentky, vážení respondenti,

Obracím se na Vás s prosbou o vyplnění krátkého dotazníku, který bude sloužit jako podklad pro moji bakalářskou práci na téma „Booleova algebra a její modely“. Mým cílem je zmapovat, jaké je povědomí učitelů v praxi o Booleově algebře. Účast ve výzkumu je anonymní a dobrovolná. Dotazník bude použit pouze k výzkumným účelům v rámci mé bakalářské práce.

V dotazníku prosím o označení odpovědi, která nejlépe vystihuje Váš názor. U otevřených otázek Vás prosím o vlastní zformulování Vašeho názoru.

Děkuji Vám za Vaši ochotu a čas.

Patricie Plesníková, studentka 3. ročníku Pedagogické fakulty MU v Brně.

1) Jaká je délka Vaší učitelské praxe?
    a. 0–5 let
    b. 6–10 let
    c. 11–20 let
    d. 21 let a více
2) Jaká je Vaše další aprobace kromě předmětu matematika?
    a. Fyzika
    b. Biologie
    c. Zeměpis
    d. Chemie
    e. Jiná …………………….
3) Jaké je zaměření gymnázia, na kterém vyučujete?
    a. Všeobecné
    b. Matematické
    c. Jazyková
    d. Jiná …………………….

4) Slyšel/a jste někdy o Booleově algebře?
    a. Ano
    b. Ne
5) Pokud jste na předešlou otázku odpověděl/a ANO, kde jste se o problematice Booleovy algebry dozvěděl/a nejvíce? Pokud jste odpověděl/a NE, další otázky už jsou pro Vás bezpředmětné, a prosím Vás tedy o odeslání dotazníku v této podobě.

6) Pokuste se stručně definovat pojem Booleovské počítání.

7) Učivo Booleovy algebry bylo kdysi vyučováno v rámci některých středních a vysokých škol. Souhlasil/a byste s opětovným navrácením tohoto učiva do výuky?
    a. Ano
    b. Ne

    Proč ano/ne?

8) V případě, že jste na minulou otázku odpověděl/a NE, nezařadil/a byte toto učivo alespoň do výuky seminářů z matematiky připravujících studenty na studium na vysokých školách, nebo pro zájemce o matematické olympiády či ostatní vědomostní soutěže?
    a. Ano
    b. Ne

    Proč ano/ne?

Seznam obrázků

Seznam tabulek