

На правах рукописи

*Денис Вячеславович*

Князев Денис Вячеславович

**ВРАЩАТЕЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ  
ЖИДКОСТИ С ПРОСТРАНСТВЕННЫМ УСКОРЕНИЕМ**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук



003 158785

Пермь – 2007

Работа выполнена в Институте механики сплошных сред Уральского отделения Российской Академии наук

Научный руководитель доктор физико-математических наук,  
Аристов Сергей Николаевич

Официальные оппоненты доктор технических наук,  
старший научный сотрудник  
Скульский Олег Иванович

доктор физико-математических наук,  
профессор  
Шварц Константин Григорьевич

Ведущая организация Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования «Пермский государственный  
педагогический университет»

Защита состоится «18» сентября 2007 г в 11 часов на заседании  
Диссертационного совета Д 004 012 01 при Институте механики сплошных  
сред УрО РАН по адресу 614013, г Пермь, ул Академика Королева 1, тел  
(342) 2378388, факс (342) 2378487, сайт www.icmtn.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики  
сплошных сред УрО РАН

Автореферат разослан «18» сентября 2007 г

Ученый секретарь Диссертационного совета  
доктор технических наук



Березин И К

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы диссертации** Нет сомнения, что всякое реальное течение жидкости является вихревым. В связи с этим вопросы исследования структуры вихрей, их генерации, эволюции и взаимодействия между собой представляются актуальными для гидродинамики в целом. В настоящее время известно лишь небольшое количество точных решений гидродинамических уравнений, адекватно описывающих структуру вихрей. К их числу можно отнести, например, вихри Бюргерса и Салливана. Между тем внутреннее устройство вихря, его интенсивность и масштаб в значительной степени определяют устойчивость вихревого образования и характер его взаимодействия с другими вихрями и потоком в целом. Так известно, что крупные атмосферные вихри обладают значительно большим временем жизни по сравнению с мелкими, что указывает на высокую степень их устойчивости и позволяет рассматривать такие вихри как автономные образования. В то же время, наличие в потоке четко выраженных вихревых структур является одним из основных факторов, определяющих всю картину течения, складывающуюся в результате взаимодействия вихрей различной топологии и масштаба. Характер вихревых взаимодействий играет определяющую роль в протекании каскадных процессов в турбулентности, которые могут приводить либо к диссипации энергии (прямой каскад), либо к возникновению различных когерентных структур (обратный каскад). Теоретическое изучение этих и многих других процессов, связанных с исследованием дестабилизирующей или, напротив, организующей роли вихревых взаимодействий, в настоящее время, по-видимому, далеко от завершения. В связи с этим отыскание новых точных решений уравнений гидродинамики, описывающих вихревые течения жидкости, является актуальной задачей. Представляется, что ее решение открывает наиболее простой и корректный путь к получению ряда теоретически и практически важных результатов.

**Цель работы.** Целью данной работы является описание структуры вращательно-симметричных вихрей и их воздействия на поток несжимаемой жидкости в ограниченных и бесконечных цилиндрических областях на основе класса точных решений уравнений гидродинамики с пространственным ускорением (линейностью) по продольной координате.

**Научная новизна результатов исследования и положения, выносимые на защиту.** Найдено счетное семейство точных стационарных решений уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости, описывающих радиально локализованные вихри различной пространственной структуры, определяемой отношением радиального и осевого масштабов течения.

Обнаружен класс периодических и локализованных в пространстве точных решений уравнений Эйлера. В рамках данного класса в конечном виде

описано счетное семейство цепочек локализованных вихрей, обладающих конечной энергией. Показано, что при дискретном наборе энергий вихрей пространственно периодического движения на их фоне могут возникать радиально локализованные вращательно-симметричные течения большего масштаба (по сравнению с фоновым течением) с энергией, целиком определяемой периодом цепочки.

В рамках исследуемого класса точных решений уравнений Навье-Стокса исследована модельная задача о стационарном истечении вязкой жидкости из цилиндрического сосуда. Обнаружено ответвление решений с ненулевой азимутальной составляющей поля скорости от незакрученного режима истечения (бифуркация вращения).

Найдено новое точное решение задачи о стационарном течении вязкой несжимаемой жидкости между вращающимися коаксиальными цилиндрами в присутствии заданного неоднородного продольного градиента давления. Полученное решение обладает рядом существенных отличий от классического решения, описывающего течение Куэтта-Пуазейля.

В точной постановке показана неустойчивость двухячейного режима стационарного течения вязкой жидкости в цилиндрическом стакане относительно возмущений специального вида.

**Практическая значимость работы.** Проведенные теоретические исследования могут быть использованы при анализе результатов натуральных и лабораторных наблюдений закрученных потоков жидкости, а также при проектировании и изучении работы узлов некоторых технологических конструкций.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на Всероссийских съездах по теоретической и прикладной механике (Пермь, 23-29 августа 2001 г., Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г.), III международной конференции «Симметрия и дифференциальные уравнения» (Красноярск, 25-29 августа 2002 г.), Всероссийских конференциях «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение» (Новосибирск, 10-14 мая 2004 г.) и «Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа (САМГОП-2004)» (Абрау-Дюрсо, 4-7 сентября 2004 г.)

**Структура и объем работы. Публикации.** Диссертация состоит из трех глав, введения, заключения и списка цитируемой литературы (200 наименований). В работе приводится 25 рисунков, одна схема и таблица. Общий объем диссертации составляет 140 страниц. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах.

## Содержание работы

### Введение

Во введении формулируется предмет исследования, его цели, обосновывается актуальность работы, показывается ее научное значение

### Глава 1. Точные решения уравнений Навье-Стокса

В разделе 1.1 с целью выяснения места и значимости предлагаемых исследований выполнен обзор литературы по точным решениям уравнений Навье-Стокса. Основное внимание уделено результатам анализа нелинейных задач, имеющих отношение к теме данной диссертации. Проведена классификация известных точных решений уравнений гидродинамики, позволившая выделить два основных типа таковых решения: линейные по части пространственных переменных, и конические течения с полем скорости, обратно пропорциональным расстоянию от начала координат.

В разделе 1.2 приведен класс точных решений уравнений гидродинамики с линейной зависимостью части компонент скорости от осевой координаты и проанализированы некоторые его общие свойства.

В настоящей работе исследуется класс точных вращательно-симметричных решений системы уравнений Навье-Стокса

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} = -\nabla P + \nu \Delta \bar{v}, \quad \nabla \bar{v} = 0, \quad (1)$$

предполагающий линейную зависимость осевой и азимутальной составляющих поля скорости от продольной координаты  $z$  (течения с пространственным ускорением по  $z$ )

$$v_r = \frac{\nu}{R} \frac{u}{\sqrt{x}}, \quad v_\varphi = \frac{\nu}{R} \sqrt{\frac{2}{x}} (V + Zv), \quad v_z = -2 \frac{\nu}{R} \left( W + Z \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2)$$

$$P = P_0 + 2 \frac{\nu^2}{R^2} (B - 4ZF - 2Z^2G)$$

Здесь  $(r, \varphi, z)$  - цилиндрическая система координат;  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости жидкости,  $R$  - характерный линейный масштаб течения. Безразмерные неизвестные  $u, v, G, W, V, F$  и  $B$ , являющиеся функциями безразмерного времени  $\tau = (2\nu/R^2)t$  и квадрата радиуса  $x = (r/R)^2$  ( $Z = z/R$ ), удовлетворяют системе уравнений

$$u_{\tau x} + uu_{xx} - u_x u_x + 2G = 2(xu_x)_x, \quad v_\tau + uv_x - \nu u_x = 2xv_{xx}, \quad (3)$$
$$4x^2 G_x + v^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 W_r + uW_x - u_x W + 2F &= 2(xW_x)_x, & V_r + uV_x - vW &= 2xV_{xx}, \\
 4x^2 F_x + vV &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Система (3), (4) обладает следующими основными свойствами

**I.** Уравнения (3) образуют изолированную подсистему для определения функций  $u, v, G$ . Неизвестные  $W, V, F$  удовлетворяют линейной системе (4), решения которой находятся после того, как решены уравнения (3). Таким образом, течения с полем скорости вида (2) представляют собой суперпозицию основного (фонового) потока ( $u, v, G$ ) и генерируемого им вторичного течения ( $W, V, F$ ). Существенным является то обстоятельство, что вторичное течение не оказывает влияния на индуцирующий его фоновый поток.

**II.**  $W = Cu_x, V = Cv, F = CG$  – решение системы (4) при условии, что  $u, v, G$  удовлетворяют уравнениям (3). Здесь  $C$  – произвольная константа.

**III.** Система (3), (4) допускает преобразование, не изменяющее ее вида

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow L^2 x_*, \quad \tau \rightarrow L^2 \tau_*, \quad u \rightarrow u_*, \quad v \rightarrow v_* l, \quad G \rightarrow G_* L^4, \\
 W \rightarrow lW_*, \quad V \rightarrow lLV_*, \quad F \rightarrow F_* l L^2,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

где  $L$  и  $l$  – любые числа. Такое преобразование оказывается полезным при численном решении конкретных краевых задач, поскольку позволяет избавиться от части граничных условий за счет того, что область интегрирования перестает быть фиксированной.

**IV.** В случае неустановившегося течения система (3), (4) допускает введение автономной переменной  $\xi = x/\tau$

**V.** Заменой переменных

$$\xi = -\ln(x), \quad u = U(\xi), \quad v = e^{\frac{\xi}{2}} V(\xi), \quad G = e^{2\xi} g(\xi)
 \tag{6}$$

стационарная система (3) приводится к автономному виду, не содержащему явно независимую переменную  $\xi$ .

## Глава 2. Вращательно-симметричные стационарные течения идеальной жидкости.

В разделе 2.1 исследованы стационарные радиально локализованные закрученные течения идеальной жидкости в полубесконечном слое  $z \geq 0$ . Такие решения уравнений Эйлера могут служить моделями атмосферных вихревых образований.

При помощи представления гидродинамических полей (2) ( $W = V = F = 0$ ,  $x = r^2$ ,  $Z = z$ ,  $v/R \rightarrow 1$ ) уравнения Эйлера, дополненные условиями регулярности потока на оси симметрии и покоя на бесконечности

$$r=0 \quad v_r = v_\varphi = 0, \quad \partial v_z / \partial r = 0, \quad r \rightarrow \infty \quad \vec{v} = 0, \quad (7)$$

редуцируются к линейной краевой задаче

$$u_{xx} = \left( \frac{1}{L_r^2} - \frac{1}{2L_z^2 x} \right) u, \quad x=0 \quad u=0, \quad |u_x| < \infty, \quad x \rightarrow \infty \quad u = u_x = 0,$$

$$v = u/L_z, \quad G = G(0) - \frac{1}{4L_z^2} \int_0^x \left( \frac{u(s)}{s} \right)^2 ds,$$

обладающей счетным набором решений

$$u_N = \frac{C_N}{\sqrt{N}} \xi L_{N-1}^{(1)}(\xi) e^{-\xi/2}, \quad (8)$$

$$L_{N-1}^{(1)}(\xi) = \frac{e^\xi}{(N-1)! \xi} \frac{d^{N-1}}{d\xi^{N-1}} (\xi^N e^{-\xi}), \quad \xi = 2(r/L_r)^2, \quad N=1, 2, 3,$$

Постоянные  $L_r$  и  $L_z$  имеют размерность длины и, в силу безразмерных соотношений  $\xi = 2(r/L_r)^2$ ,  $v_\varphi/v_r = \bar{z}/L_z$ , могут быть интерпретированы как характерные масштабы вихря в радиальном и осевом направлениях соответственно. Отношение квадратов этих масштабов

$$\left( \frac{L_r}{L_z} \right)^2 = 4N$$

определяет конкретную структуру вихря. В силу свойств полиномов Лагерра  $L_{N-1}^{(1)}$ , решение  $u_N$  из набора (8) имеет  $N$  нулей (рис 1),

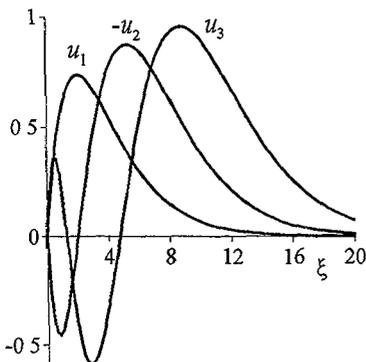


Рис 1 Графики функций  $u_N$ ,  $N=1, 2, 3$ ,  $C_N=1$

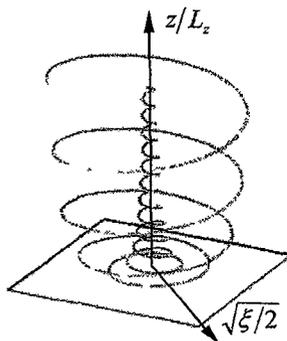


Рис. 2 Траектория жидкой частицы в одноячейном вихре

включая  $\xi = 0$  Следовательно, вихрь, задаваемый этим решением, обладает  $N$  – ячеистой структурой В соседних ячейках окружная и радиальная компоненты скорости жидкости имеют обратные направления С увеличением номера  $N$  при фиксированном осевом масштабе  $L_z$  вместе с количеством ячеек растет радиальный масштаб вихря На рис 2 изображена траектория жидкой частицы в одноячейстом вихре, соответствующем решению  $u_1$

В разделе 2.2 описан класс точных решений уравнений движения идеальной жидкости, периодических в осевом направлении  $z$

$$v_r^p = \frac{u}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right), v_\varphi^p = \frac{v}{\sqrt{x}} \frac{\lambda}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right), \quad (9)$$

$$v_z^p = -\frac{du}{dx} \frac{\lambda}{\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right), P^p = P_0 + 2\left(B - 2G\left(\frac{\lambda}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)\right)^2\right)$$

В пределе бесконечно большого периода  $\lambda$  (9) переходит в (2) ( $V = W = F = 0$ )

Подчинив поле скорости (9) краевым условиям (7) найдем, что

$$u_N(\xi) = A_N \xi L_{N-1}^{(1)}(\xi) e^{-\frac{\xi}{2}}, \quad (\alpha^2 - 2k^2)L_r^2 = 4N, \quad v = \alpha u \quad (10)$$

Решение (9), (10) описывает  $\lambda$ –периодические цепочки радиально локализованных тороидальных вихрей (рис 3) прбизвольной амплитуды  $A_N$  Радиальная структура цепочки определяется номером решения  $N$  (натуральное число), связанным вторым соотношением (10) с радиальным масштабом  $L_r$ , периодом  $\lambda = 2\pi/k$  и интенсивностью закрутки  $\alpha$  Эти же величины определяют кинетическую энергию, рассчитанную на период, пространственно периодического движения (9), (10)

$$E_p = A_N^2 \frac{\pi \lambda}{4} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{N}{\pi^2} \frac{\lambda^2}{L_r^2}\right) \quad (11)$$

В том случае, когда отношение радиального и осевого масштабов, а вместе с ним и энергия  $E_p$ , принимают дискретный набор значений

$$\left(\frac{L_r}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\pi^2} (M - N) > 0, \quad E_p = A_N^2 \frac{\pi \lambda}{4} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{N}{M - N}\right),$$

на фоне периодической структуры (9), (10) с номером  $N$  может возникать бесконечное (счетное) множество локализованных закрученных течений с однородным по координате  $z$  полем скорости

$$v_r^H = 0, \quad v_\varphi^H = \sqrt{\frac{2}{x}} V_M, \quad v_z^H = -2W_M, \quad (12)$$

$$V_M(\xi) = B_M \xi L_{M-1}^{(1)}(\xi) e^{-\frac{\xi}{2}}, \quad \alpha^2 L_r^2 = 4M, \quad V_x = \alpha W,$$

удовлетворяющим граничным условиям (7). Здесь  $M$  - натуральное число, а  $B_M$  - произвольная амплитуда.

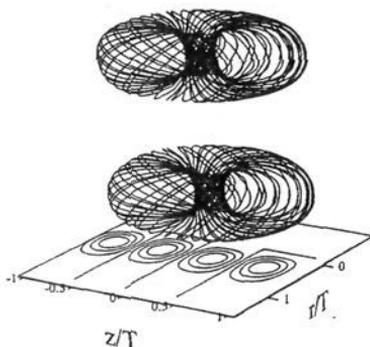


Рис. 3 Траектории двух жидких частиц в вихревой цепочке с номером  $N=1$  ( $A_N=1$ ) и изолинии функции тока  $v_r = \partial\psi/r\partial z$ ,  $v_z = -\partial\psi/r\partial r$ .

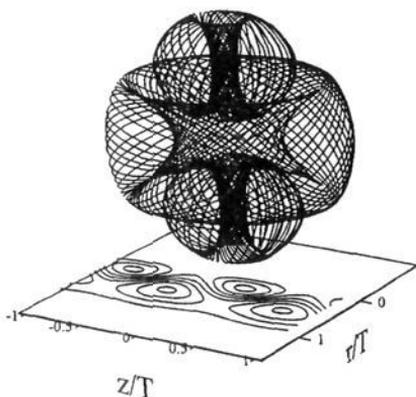


Рис. 4 Траектории трёх жидких частиц для суперпозиции цепочки, изображённой на рис. 3, с индуцированным ей потоком,  $M=2$  ( $B_M=1$ ), и изолинии функции тока полоидальной циркуляции.

Поскольку  $M > N$ , то, в силу результатов раздела 2.1, однородное по  $z$  течение обладает большим радиальным масштабом по сравнению с масштабом цепочки, на фоне которой оно возникает (рис. 4). Замечательно, что энергия (рассчитанная на период  $\lambda$ ) индуцированного течения (12) не зависит от радиальной структуры самого этого течения, а также от структуры цепочки вихрей (9), (10), задаваемых числами  $M$  и  $N$ , а целиком определяется периодам  $\lambda$   $E_H = (3/2)B_M^2 \pi \lambda$

### Глава 3 Вращательно-симметричные течения вязкой жидкости в цилиндрических областях

В разделе 3.1 рассматривается стационарное течение вязкой жидкости между бесконечными коаксиальными цилиндрами радиусов  $R_0 < R_1$ , внутренний из которых растягивается или сжимается вдоль своей оси со скоростью  $v_z = Sz$ . Сечение  $z=0$  закрыто непроницаемой перегородкой. Интерес к данной задаче, в частности, связан с тем, что она может служить грубой моделью движения, возникающего в большом сосуде при квазистационарном истечении жидкости через центральное отверстие малого радиуса. При этом растягивающийся внутренний цилиндр моделирует поверхность формирующейся над отверстием струи, а непроницаемая перегородка играет роль свободной поверхности жидкости. В случае сжатия цилиндра ( $S < 0$ ) задача может быть интерпретирована как течение, возникающее в результате проникновения струи в заполненный жидкостью сосуд с непроницаемым дном.

Исследование задачи вновь проведено с использованием класса точных решений (2) ( $V=W=F=0$ ,  $R=R_1$ ,  $\partial(\bullet)'\partial\tau=0$ ). Требование прилипания жидкости к поверхностям цилиндров приводит к граничным условиям

$$x = x_0 = (R_0/R_1)^2 \quad u = v = 0, \quad u' = -Re/x_0, \quad x = 1 \quad u = u' = v = 0, \quad (13)$$

для системы уравнений (3). Положительным значениям числа Рейнольдса  $Re = S R_0^2 / (2\nu)$  соответствует растяжение внутреннего цилиндра, отрицательным – сжатие.

Анализ задачи (3), (13) показывает, что имеют место два существенно различных режима течения осесимметричное течение с нулевой азимутальной составляющей поля скорости ( $v=0$ ) и вращательно-симметричный режим с ненулевой закруткой потока ( $v \neq 0$ ).

Краевая задача (3), (13) на собственные значения  $Re$  исследовалась численно. С этой целью в переменных (6) сформулирована задача Коши с дополнительными начальными параметрами  $U_0''$ ,  $g_0$ ,  $V_0'$ , заданными при  $\xi = 0$  и определяемыми первыми двумя условиями (13)

Анализ зависимостей этих параметров от числа Рейнольдса (рис 5) показал наличие в спектре участков кратных значений  $Re$ . На каждом из этих участков решение неоднозначно в том смысле, что каждому фиксированному значению числа Рейнольдса отвечает более одного решения осесимметричной либо вращательно-симметричной задачи

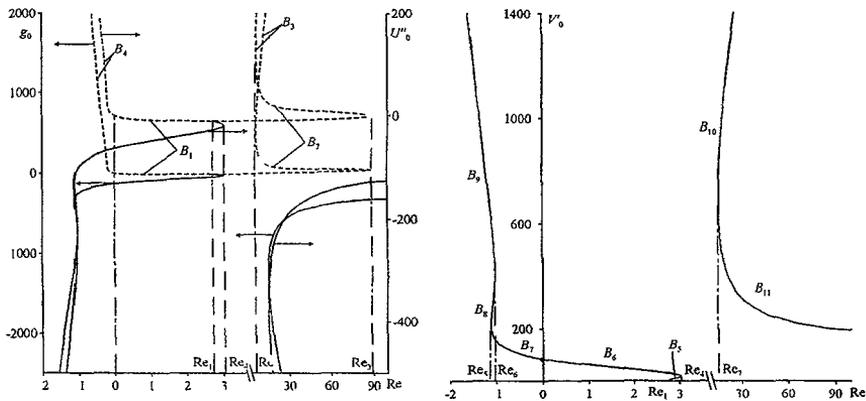


Рис 5 Зависимости параметров  $U''_0$ ,  $g_0$ ,  $V'_0$  для осесимметричного (пунктирные кривые) и вращательно-симметричного (сплошные кривые) решений  $x_0 = 0.01$ ,  $Re_1 = 2.722$ ,  $Re_2 = 6.429$ ,  $Re_3 = 88.072$ ,  $Re_4 = 3.020$ ,  $Re_5 = -1.114$ ,  $Re_6 = -1.029$ ,  $Re_7 = 14.931$

На интервале  $Re_4 < Re < Re_7$  решений вращательно-симметричной задачи найти не удалось, что позволяет говорить об изолированности ветвей  $B_{10}$ ,  $B_{11}$  и исчезновении решений данного типа в конечном диапазоне значений числа Рейнольдса (рис 5). При этом осесимметричное течение продолжает существовать.

При  $Re = Re_1$ , соответствующему растяжению внутреннего цилиндра или вытекающей струе, вращательно-симметричное решение отщепляется от течения без закрутки. В результате бифуркации рождаются два вращательно-симметричных решения, отличающихся друг от друга только знаком азимутальной составляющей скорости  $v_\varphi$ . В рассматриваемом случае наличие осесимметричной бифуркации вращения не противоречит закону сохранения момента импульса, поскольку речь идет лишь о сколь угодно близости двух стационарных состояний потока жидкости (с закруткой и без таковой) с частью компонент поля скорости (2), неограниченных по осевой координате  $z$ .

В отличие от осесимметричной вращательно-симметричная задача имеет нетривиальное решение при нулевом числе Рейнольдса, описывающее закрученное течение вязкой жидкости с нулевым расходом между двумя

бесконечными цилиндрами Этот результат важен для исследований, изложенных в следующем разделе

С целью продемонстрировать возможность рассмотрения осесимметричных течений в бесконечной области ( $R_1 = \infty$ ) выполнено обобщение известного частного решения [Бурда Г И // ПИММ, 1989, т 53, в 4, с 343-345 ], принадлежащего классу (2) ( $v = F = W = 0, V \neq 0$ )

$$\begin{aligned} v_r &= 8 \frac{\nu}{R_0} \frac{1-x}{\sqrt{x(1+2x)}}, \quad v_z = \frac{\nu}{R_0} Z \frac{48}{(1+2x)^2}, \quad G = 0, \\ v_\varphi &= \frac{\nu \Gamma}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{2}{x} \left( 1 - \frac{243 \cdot 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1}{211(1+2x)^5} \right)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $x = (r/R_0), Z = z/R_0$

Решение (14) описывает течение вязкой жидкости в полубесконечном слое при  $Re = 8/3$ , вызываемое растяжением цилиндра радиуса  $R_0$  Окружная и радиальная компоненты скорости (14) убывают как  $1/r$ , а вертикальная компонента как  $1/r^4$  Следовательно, на большом удалении от деформирующегося цилиндра течение близко к потенциальному вихрестoku с мощностью, определяемой числом Рейнольдса и произвольной безразмерной циркуляцией  $\Gamma$  Следует отметить, что хотя на бесконечности жидкость покоится, тем не менее, ее осевой момент импульса (циркуляция) при  $r = \infty$  отличен от нуля, что и служит источником закрутки потока

**В разделе 3.2** рассмотрено вращательно-симметричное стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между бесконечными коаксиальными цилиндрами Внутренний цилиндр радиуса  $R_0$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  относительно собственной оси, а внешний цилиндр радиуса  $R_1$  покоится Также считается известной разность средних давлений в двух поперечных сечениях зазора  $S_1$  и  $S_2$ , отстоящих друг от друга на расстояние  $h$  Сформулированная задача обладает широко известным точным решением, представляющим собой суперпозицию течений Куэтта и Пуазейля В настоящей работе в рамках класса точных решений уравнений гидродинамики (2) ( $R = R_1, \partial(\bullet)/\partial t = 0, F$  переобозначено как  $F'$ ) получено новое решение этой задачи

Условия прилипания на поверхностях цилиндров приводят к граничным условиям

$$x = x_0 = (R_0/R_1)^2. \quad u = v = u' = 0, \quad x = 1 \quad u = u' = v = 0, \quad (15)$$

$$x = x_0 \quad W_1 = F_1 = 0, \quad V_1 = 1, \quad x = 1 \quad W_1 = V_1 = F_1 = 0, \quad (16)$$

где новые неизвестные функции  $F_1, V_1, W_1$  связаны с  $F, V, W$  из (2) преобразованием

$$W = \Omega W_1 - \frac{F_0}{g} u', \quad V = \Omega V_1 - \frac{F_0}{g} v, \quad F = \Omega F_1 + \frac{F_0}{g} \int_x^1 G(s) ds, \quad (17)$$

не изменяющим вида системы (4). Здесь  $u, v, G$  – нетривиальное решение системы (3), (15), существование которого показано в разделе 3.1,  $\Omega = \omega R_0^{2-l} \sqrt{2\nu}$  – величина безразмерного осевого момента импульса вращающегося цилиндра  $\vec{M}_1 = \Omega \vec{z}$  ( $\vec{z}$  – единичный вектор в положительном направлении оси  $z$ ). Постоянная  $F_0 = F(x_0)$  связана с заданной разностью средних давлений  $\Delta P$  соотношениями

$$\Delta P = \frac{4\nu^2 H}{R_1^2 - R_0^2} (H g - 2F_0), \quad H = h/R_1, \quad g = \int_{x_0}^1 G(x) dx$$

Наличие в (2) радиальной компоненты поля скорости  $v_r$  обеспечивает взаимодействие полой и азимутальной циркуляций. Вследствие этого, окружная  $v_\varphi$  и осевая  $v_z$  составляющие скорости линейно зависят от угловой скорости внутреннего цилиндра  $\omega$  и разности средних давлений  $\Delta P$  между сечениями  $S_1, S_2$  (см (17)).

Немонотонный (квадратичный) характер изменения давления вдоль канала в течении (2) обуславливает независимость расхода жидкости от заданного среднего перепада давления между сечениями  $S_1, S_2$ . При этом, в силу пропорциональности продольной скорости  $v_z$  величине безразмерного осевого момента вращающегося цилиндра  $\Omega$ , расход оказывается линейной функцией этого параметра

$$Q = \int_{R_0}^{R_1} \int_0^{2\pi} v_z r d\varphi dr = 2\pi R_1 \Omega q, \quad q = - \int_{x_0}^1 W_1(x) dx$$

Таким образом, можно утверждать, что движение жидкости в течении (2) происходит в самосогласованном поле сил инерции, создаваемом вращением внутренней стенки зазора и фоновым течением  $(u, v, G)$ . В силу допускаемого системой (3), (4), (15), (16) преобразования (5) с  $l = L = -1$  ( $v \rightarrow -v, W_1 \rightarrow -W_1$ ), средний перенос массы жидкости, характеризуемый вектором  $\vec{j} = Q \vec{z}$ , происходит в направлении той части канала, где безразмерный вектор осевого момента импульса фонового течения  $\vec{M}_2 = \nu Z \vec{z}$  сонаправлен с вектором  $\vec{M}_1 = \Omega \vec{z}$ . Иными словами средний перенос массы осуществляется в ту часть бесконечно протяженного зазора,

где направление закрутки фонового течения совпадает с направлением вращения внутреннего цилиндра

Качественное представление о течении дают рис 6 и 7, на которых изображены изолинии безразмерной функции тока  $\Psi$  и осевого момента  $M$ , определяемые соотношениями

$$\Psi = \frac{\psi}{\nu R_1} = \Omega \int_{x_0}^x W_1(t) dt + \left( Z - \frac{F_0}{g} \right) u, \quad M = \frac{rv_\varphi}{\sqrt{2\nu}} = \Omega V_1 + \left( Z - \frac{F_0}{g} \right) v$$

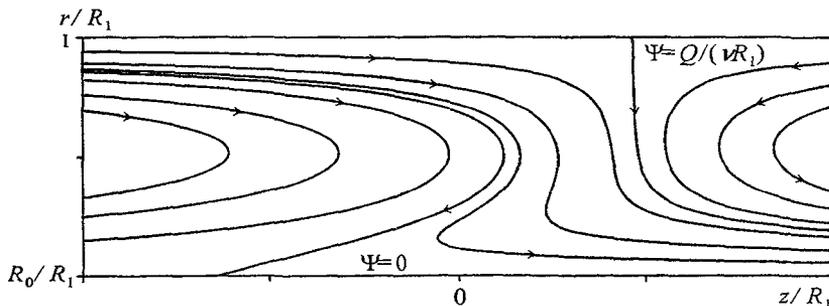


Рис 6 Изолинии безразмерной функции тока

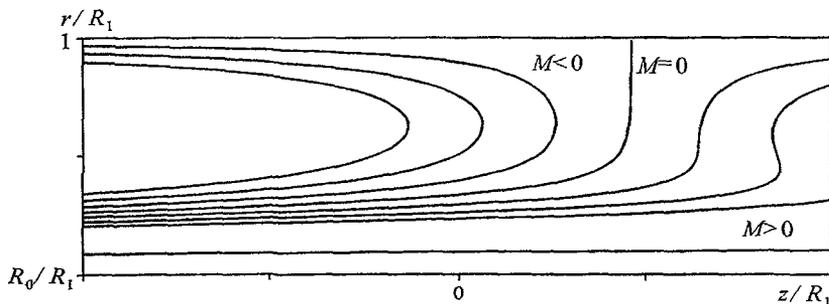


Рис 7 Изолинии безразмерного осевого момента импульса

Область движения жидкости разделяется на три зоны проточную,  $0 < \Psi < Q/(\nu R_1)$ , где осуществляется средний перенос массы по каналу, и два рециркуляционных течения  $\Psi < 0$  и  $\Psi > Q/(\nu R_1)$  с нулевым расходом. Изолинии  $\Psi = 0$  и  $\Psi = Q/(\nu R_1)$  являются линиями (точнее, поверхностями) отрыва потока от твердых стенок. При  $|Z| \gg 1$  вблизи неподвижной внешней стенки зазора давление слабо изменяется в радиальном направлении, что является характерной чертой течений в пограничном слое.

В разделе 3.3 изучена задача о генерации нестационарных вторичных режимов установившемся течением вязкой жидкости в полубесконечном цилиндрическом стакане. Такая задача формально аналогична исследованию устойчивости стационарного фонового течения  $(u, v, G)$  относительно конечных возмущений специального вида, с той лишь особенностью, что возмущения не способны разрушить основное течение.

В качестве основных течений выступают два точных стационарных решения уравнений Навье-Стокса, принадлежащих классу (2)  $(W = V = F = 0)$  и описывающих движение вязкой жидкости в полубесконечном цилиндре радиуса  $R$  с непроницаемым дном  $z = 0$  [СН Аристов // ДАН, 2001, т. 377, № 4, с. 477-480]. Эти решения являются особыми в том смысле, что они подчиняются однородной системе уравнений (3)  $(\partial(\bullet)/\partial\tau = 0)$  с граничными условиями прилипания к стенке цилиндра и аналитичности на оси симметрии

$$x = 0 \quad u = v = 0, \quad u'' = G - \frac{u'u'}{2}, \quad x = 1 \quad u = u' = v = 0,$$

допускающими существование тривиального решения задачи. Вследствие этого, каждое из названных решений существует при строго определенном наборе значений параметров задачи или, что то же самое, при строго определенном числе Рейнольдса.

На основное течение накладываются возмущения, допускаемые классом точных решений (2), и удовлетворяющие линейной системе (4), дополненной условиями аналитичности потока на оси симметрии, прилипания на боковой поверхности цилиндра, нулевого расхода и нормировки. Это позволяет выбирать возмущения в виде нормальных мод

$$\begin{aligned} v_{r*} &= 0, \quad v_{\varphi*} = \frac{v}{R} \sqrt{\frac{2}{x}} V(\tau, x) = \frac{v}{R} \sqrt{\frac{2}{x}} V_*(x) e^{-\lambda\tau}, \\ v_{z*} &= -2 \frac{v}{R} W(\tau, x) = -2 \frac{v}{R} \frac{dW_*(x)}{dx} e^{-\lambda\tau}, \\ P_* &= 2 \frac{v^2}{R^2} (B_*(\tau, x) - 4ZF(\tau, x)) = 2 \frac{v^2}{R^2} (B_*(\tau, x) - 4ZF_*(x) e^{-\lambda\tau}), \end{aligned}$$

не привлекая при этом требование малости их амплитуд.

Ограничившись рассмотрением эволюции только монотонных возмущений, удалось показать, что линейная спектральная задача для амплитуд (форм) возмущений  $W_*$ ,  $V_*$ ,  $F_*$  в силу условий прилипания и нулевого расхода, обладает дискретным спектром действительных собственных значений  $\lambda$  и допускает вариационную постановку. Нижней границей неотрицательной области спектра является  $\lambda = 0$ , что соответствует решению амплитудной задачи  $W_* = u$ ,  $V_* = v$ ,  $F_* = G$ .

Исследование устойчивости одноячейного режима течения (рис. 8) в цилиндрическом стакане не выявило наличия в спектре отрицательных собственных значений  $\lambda$ , что позволяет говорить об устойчивости данного течения по отношению к выбранным возмущениям

Для основного течения с двухячейной структурой полойциальной циркуляции (рис 9) удалось обнаружить единственное нарастающее во времени возмущение, соответствующее инкременту  $\lambda = -60,5504$  Таким образом, двухячейный режим оказывается неустойчивым

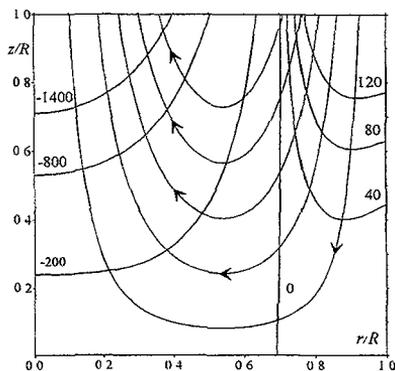


Рис 8 Изобары и изолинии функции тока (со стрелками) для одноячейного основного течения

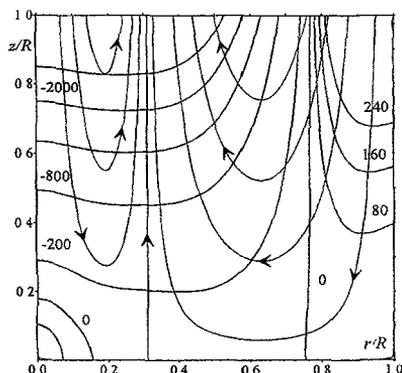


Рис 9 Изобары и изолинии функции тока (со стрелками) для двухячейного основного

### Основные результаты исследования

1. Найдено счетное семейство точных стационарных решений уравнений Эйлера, описывающих радиально локализованные вихри в полубесконечном слое идеальной несжимаемой жидкости Показано, что структура вихря с номером  $N$  определяется отношением его характерных поперечных и радиальных масштабов

2. Получен новый класс точных стационарных пространственно периодических решений уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости В рамках данного класса найден счетный набор решений, описывающих цепочки радиально локализованных вихрей различной конфигурации Показано, что на фоне цепочки с номером  $N$  может генерироваться счетный набор различных локализованных движений среды большего пространственного масштаба Установлено, что все эти движения обладают одинаковой энергией, целиком определяемой периодом цепочки

3. В задаче о течении вязкой жидкости между деформирующимся и твердым цилиндром обнаружена бифуркация закрученных режимов течения

от движений без закрутки Найдены области неоднозначной зависимости вращательно-симметричных и осесимметричных решений от числа Рейнольдса

4. Найдено новое точное решение задачи о стационарном течении вязкой жидкости в зазоре между коаксиальными цилиндрами, внутренний из которых вращается с постоянной угловой скоростью, в присутствии неоднородного продольного градиента давления Полученное решение характеризуется ненулевым радиальным потоком массы жидкости, обеспечивающим взаимодействие пологоидальной и азимутальной циркуляций Показана пропорциональность расхода жидкости угловой скорости вращения внутреннего цилиндра

5. В точной конечноамплитудной постановке исследована устойчивость одно – и двухъячейного режимов вращательно-симметричного течения вязкой жидкости в цилиндрическом стакане Установлено, что духъячейный режим течения является неустойчивым относительно монотонных возмущений выбранного вида Найдена нижняя граница устойчивой части дискретного спектра возмущений

#### **Список основных публикаций по теме диссертации**

1. Князев Д В Исследование устойчивости цилиндрического вихря в вязкой жидкости // Аннот Докладов «VIII Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике» Пермь 23-25 августа 2001, с 329

2. Аристов С Н Князев Д В Вязкий вихрь между коаксиальными цилиндрами // Труды XXXIII Региональной молодежной конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики» Екатеринбург 28 января – 1 февраля 2002, с 84-88

3. Аристов С Н Князев Д В Вращательно-симметричное течение вязкой жидкости между коаксиальными растягивающимися цилиндрами // Труды III Международной конференции «Симметрия и дифференциальные уравнения» Красноярск 25-29 августа 2002, с 21-25

4. Князев Д В Трехмерное решение задачи о течении Куэтта-Пуазейля // Пермь «Гидродинамика» вып 14, 2004, с 109-119

5. Аристов С Н, Князев Д В Обобщенное точное решение задачи о течении Куэтта-Пуазейля // Аннот Докладов «IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике» Нижний Новгород 22-28 августа 2006, т 2, с 14-15

6. Аристов С Н, Князев Д В Новое точное решение задачи о вращательно-симметричном течении Куэтта-Пуазейля // Прикладная механика и техническая физика 2007, т 48, № 5, с 71-77 3

Подписано в печать 17 09 07 Формат 60х84/16  
Усл печ л 1 0 Тираж 100 экз Заказ № 471  
614990, г Пермь, ул Букирева, 15 Типография Пермского госуниверситета