A cura
del Laboratorio di didattica della matematica

# Bollettino dei docenti di matematica

65

Dicembre
2012

Ufficio
dell'insegnamento medio
Centro
didattico cantonale

Bollettino
dei docenti di matematica
65

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport



ISBN 978-88-86486-87-3

# Bollettino dei docenti di matematica 65

Dicembre
2012

Ufficio dell’insegnamento medio
Centro didattico cantonale

Indice

# Prefazione

Nella prima sezione, come d'abitudine, si affrontano temi di varia natura. Vi troviamo due contributi. Il primo, di Denis Baggi, è un sentito omaggio al matematico Alan Turing – troppo spesso dimenticato –, che l'autore definisce «padre dell'informatica», in occasione del centenario della sua nascita. Di seguito presentiamo l'articolo offertoci da Stefano Beccastrini e Paola Nannicini, due autori impegnati a ricercare sempre nuove relazioni tra la matematica e le altre aree culturali. Appoggiandosi sul loro grande lavoro di analisi e di documentazione sfociato nel loro ultimo libro, del quale pubblichiamo una recensione, ci mostrano come i rapporti tra matematica e letteratura siano molto più stretti di quello che si pensi.

Lo spazio della Didattica è interamente occupato dall'articolo di Silvia Sbaragli e George Santi che è una sintesi in versione italiana di un lavoro da loro pubblicato sulla rivista *International Journal for Studies in Mathematics Education*. Con questi contributi di didattica teorica, il Bollettino vuole dare agli insegnanti la possibilità di mantenere un collegamento con la ricerca internazionale.

La ricreazione, quella seria però, è come sempre affidata all'estroso Aldo Frapolli, che ci propone il quiz numero 48.

I Giochi di questo numero si completano con nuove proposte di Bernardo Mutti su simmetrie assiali e centrali: un bell'esempio di matematica ed estetica figurale.

Si continua con una nuova sezione, definita Storia del calcolo. I due articoli fanno da contorno all'estesa sperimentazione didattica concernente le nuove tendenze dell'insegnamento del calcolo nella scuola dell'obbligo, tematica che sta timidamente entrando anche nel nostro cantone. Il primo articolo è di Giorgio Mainini e si definisce una «ministoria degli strumenti di calcolo» finalizzata a una chiara riflessione sul problema dell'integrazione nelle nostre scuole del calcolo strumentale. Il secondo ci è offerto da Francesco Locatello, uno studente di ingegneria della comunicazione. A modo suo, l'autore ci accompagna in una minuziosa analisi dei metodi di calcolo della matematica vedica. L'interesse è posto sulle peculiarità del sistema di numerazione posizionale decimale e i metodi presentati fanno da contrappunto a quelli arabici (detti nella scuola «del calcolo in colonna»). Siamo convinti assertori di un'apertura della didattica del calcolo che privilegi il ragionamento e la varietà delle procedure. In questo ampio contesto ci sta benissimo anche una ragionevole conoscenza storica dell'evoluzione dei metodi di calcolo.

Si conclude con le abituali segnalazioni e recensioni. Può interessare particolarmente la presentazione della «Seconda grande festa della matematica» che si terrà nel prossimo mese di marzo al Parco Oltremare di Riccione: matematica e spettacolo si uniranno in un grande carosello offerto al vasto pubblico, con particolari facilitazioni per le visite di scolaresche.

Come più volte affermato, le recensioni non hanno la pretesa di far conoscere le maggiori opere della saggistica internazionale: i pochi testi che riusciamo a proporre all'attenzione soprattutto dei docenti sono per noi piccole perle che offrono nuovi spunti per un continuo rinnovamento delle pratiche di classe.

# 1. Alan Turing
# Matematico e padre dell'informatica

Denis Baggi[1]

This article is dedicated to the achievements of Alan M. Turing, who in his short life has tackled and successfully solved a variety of problems, at the practical and theoretical levels, and who can be rightly considered the father of Computer Science, thanks among others to his abstract model of a general-purpose computer, referred to as Turing Machine, and his undisputed test for Artificial Intelligence.

## Premessa introduttiva

Assomiglia ad uno dei famosi paradossi della logica noti da secoli, e riapparsi sotto forma di «circoli strani» (Hofstadter, 1979), che la cosiddetta *informatica,* considerata da molti come la disciplina esatta per antonomasia («il computer non sbaglia mai») sia nata fra considerazioni della matematica del ventesimo secolo che hanno dimostrato che la stessa è *incompleta,* ossia che esistono proposizioni corrette che non possono essere dimostrate; e questa proprietà è dimostrabile! Alan Turing, matematico inglese della prima metà del novecento, ha contribuito non poco a questo dibattito costruttivo e deve essere considerato con il *padre assoluto* dell'informatica, al posto dei popolari Bill Gates – con i suoi programmi malfunzionanti – e Steve Jobs – con i suoi mondi chiusi e monopolistici.

Per fortuna, in occasione del centenario della sua nascita, l'interesse per Turing è cresciuto, e questo scritto si ispira a una recente conferenza pubblica di Piergiorgio Odifreddi organizzata dalla SUPSI il 23 gennaio 2012 (Baggi, 2012) e trae numerosi argomenti da pagine di Wikipedia citate facilmente reperibili.

## Breve biografia di Turing

Alan Mathison Turing nacque a Londra nel 1912, fu un matematico, logico, cripto-analista e informatico, e contribuì notevolmente alla *scienza computazionale* e all'*intelligenza artificiale.* Fin da bambino diede prova di attitudini per la matematica, meno per le materie classiche.

1. L'autore, Denis Baggi, dopo aver completato un deludente e sterile programma di studi in elettrotecnica al Politecnico Federale di Zurigo, ha avuto la fortuna di conseguire il dottorato all'Università della California a Berkeley dove ha potuto studiare scienza del computer, matematica, musica e filosofia, e contribuire alle manifestazioni studentesche che sono la causa della superiorità tecnologica americana in informatica degli anni settanta.

Alan M. Turing.

Nonostante i suoi numerosi ed eccellenti contribuiti, egli viene ricordato nei corsi di informatica specialmente per la *macchina di Turing* e il problema collegato detto della *fermata (halting problem),* il *test di Turing* per l'intelligenza artificiale, il progetto per un programma che gioca agli scacchi, e parallelamente il suo lavoro per decifrare il sistema di crittografia della macchina tedesca *Enigma* usata per le comunicazioni cifrate dell'esercito del terzo Reich.

Egli morì precocemente nel 1954, in circostanze non del tutto chiarite legate alla sua omosessualità, che costituiva un crimine di natura penale nell'Inghilterra di allora – un'altra prova, se ce ne fosse bisogno, dell'assurdità di molte leggi.

Ma vediamo dapprima come stava avanzando la matematica nella prima metà del novecento.

## Un nuovo tipo di matematica

Vale forse la pena di iniziare dall'*Entscheidungsproblem* (problema della decisione) posto da David Hilbert nel 1928, ossia la ricerca di un algoritmo che, data la descrizione di un linguaggio formale e una proposizione matematica nel linguaggio stesso, fosse in grado di dare la risposta «vero» o «falso» a seconda se la proposizione fosse vera o falsa. Erano secoli che si conoscevano congetture non dimostrate, come quella di Goldbach secondo la quale tutti i numeri pari sono la somma di due primi, e già Leibnitz, che nel '600 aveva costruito un calcolatore, pensava a una macchina e a un linguaggio formale in grado di determinare la verità di una proposizione.

Ancora prima che Turing e Alonzo Church (ricordato per il calcolo nel linguaggio di programmazione LISP (Baggi, 2010)) dimostrassero che un tale algoritmo non esiste, vi erano stati precedenti, quali i due teoremi di incompletezza di Kurt Gödel del 1931, secondo i quali esistono delle *proposizioni vere* che *non sono dimostrabili*. Vale pure la pena di citare il *paradosso di Bertrand Russell* del 1901, che mostra una contraddizione intrinseca della teoria degli insiemi di George Cantor. La questione parte col definire come *anormale* un insieme che si autocontiene, e *normale* nel caso opposto: ad esempio, l'insieme dei numeri quadrati non è un quadrato e dunque è normale, mentre l'insieme complementare che contiene i non quadrati è lui stesso non quadrato e pertanto si autocontiene ed è anormale. Ora, si consideri l'insieme di tutti gli insiemi normali, quelli che non sono elementi di se stessi. Questo insieme è un proprio elemento o no? Se lo è, è uno di quegli insiemi che non sono elementi di se stessi, cioè non è un proprio elemento. Se non lo è, non è uno di quegli insiemi che non sono elementi di se stessi, cioè è un proprio elemento. Le due risposte implicano entrambe la propria negazione, e dunque ecco la contraddizione[2].

Sembra di riscoprire la famosa frase *«Epimenide cretese dice che tutti i cretesi mentono»*: se vera, allora mente ed è falsa, ma se è falsa non mente e dunque è vera. Di paradossi simili ne sono stati trasmessi in gran numero nel corso dei secoli e sono basati sull'«autoreferenza», come dimostrato da Russell ed esaminato in dettaglio da Hofstadter (1979).

## Cenni sui linguaggio formali

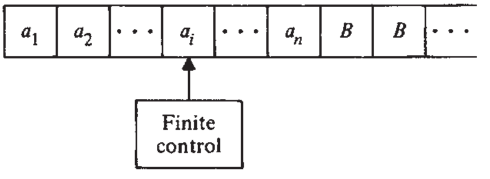
Nell'informatica contemporanea, un *linguaggio formale* è una procedura che genera una *stringa* o *frase,* come le frasi di questo scritto. Esso comprende un insieme di *simboli terminali*, ad esempio le lettere dell'alfabeto o i numeri, un *simbolo iniziale* da cui partire e generare i valori di *variabili,* e un insieme di *produzioni* o *grammatica* che specificano i passaggi da variabili a stringa terminale. Ve ne sono di quattro tipi (Chomsky, 2002) e praticamente tutti i linguaggi di programmazione contemporanea (C, Algol, Ada) possono essere definiti con una grammatica che, essendo di Tipo II o *context-free*, permette con un algoritmo di ricostruire i passaggi per la generazione della stringa, o programma, per determinarne la validità o meno secondo il *compilatore.* È dimostrabile che questi linguaggi sono equivalenti ad una *macchina di Turing* (vedi sotto), e dunque con essi è calcolabile tutto quello che è calcolabile.

Esistono linguaggi che a differenza dei context-free non sempre permettono l'ottenimento della stringa finale, pertanto chiamati *enumerabili ricorsivamente,* perché ben specificati da una procedura, e quelli che invece generano sempre una stringa finale, chiamati *ricorsivi,* che dunque non sono solo una procedura ma un *algoritmo* che termina. In informatica vengono considerati solo questi, anzi un sottoinsieme chiamato LR2, che significa che da sinistra a destra (L R) bastano due simboli per disambiguare la produzione, permettendo la costruzione automatica di compilatori con un *compilatore di compilatori,* per poi scrivere il compilatore definitivo nel linguaggio stesso che esso compila.

2. Esiste una «versione popolare» del paradosso di Russell: in un paese, la popolazione maschile si suddivide fra chi si rade da solo e chi si fa radere dal barbiere; a quale gruppo appartiene il barbiere?

### La macchina di Turing

Avendo ben compreso i risultati di Gödel sui limiti della dimostrabilità, Turing pensò di sostituire il linguaggio matematico universale con un semplice dispositivo ipotetico che divenne noto come *macchina di Turing.* La figura qui sotto è un esempio di macchina di Turing, in grado di eseguire tre operazioni di base in funzione del simbolo che viene letto dal nastro scorrevole (infinito) sotto alla testina (Hopcroft, Hullman, 1979):




– cambia lo stato interno
– scrivi un simbolo sul nastro sostituendolo a quello esistente
– muovi il nastro di una cella a destra o a sinistra

Dato che una tale macchina è in grado di calcolare tutto ciò che è calcolabile come algoritmo, essa può calcolare anche se stessa ed è pertanto un *calcolatore universale.* Turing poté così provare che non c'è soluzione all'*Entscheidungsproblem,* dimostrando dapprima che il *problema della fermata* non può essere anticipato, ossia non è prevedibile se la macchina si ferma o no: non è possibile decidere algoritmicamente se una macchina di Turing si ferma (vedi sopra per i linguaggi formali). Si definisce come *procedura* un insieme finito di istruzioni che possono essere eseguite meccanicamente – ad esempio, un programma per una macchina di Turing – e inoltre si definisce come *algoritmo* una procedura che termina sempre e dà un risultato.

Ad esempio, è facile scrivere una procedura che determina se un dato intero è un numero primo o no, ed essa termina sempre. Mentre invece la procedura per trovare un *numero perfetto*, ossia tale che sia uguale alla somma di propri fattori (come, ad esempio, 6 = 1 + 2 + 3 = 1 x 2 x 3) non termina se il numero di numeri perfetti è infinito (non è stato risolto il problema se ciò sia vero o no).

Dall'universalità della macchina di Turing segue che, dato che tutti i linguaggi macchina dei primi computer sono macchine di Turing – il nastro viene sostituito da una memoria sufficientemente grande da apparire infinita – ogni *linguaggio* o *macchina* può essere simulato, o *emulato*, su di un'altra. Inoltre, dato che tutti i linguaggi di programmazione, dal FORTRAN all'ADA, non sono che più o meno sofisticate implementazioni di operazioni di linguaggio macchina quali *load, store, add, jump*, in esse tradotte dal compilatore, sono tutte macchine di Turing, dunque possono «girare» su ogni hardware. Poco più tardi si mostrò in pratica che anche un completo *sistema operativo* come UNIX, scritto nel linguaggio C, poteva essere «portato» su qualsiasi hardware (Ritchie, Thompson, 1978).

L'importanza della macchina di Turing è dunque fondamentale per la scienza computazionale, perché essa è la referenza di base per ogni paradigma di calcolo, indipendentemente dai progressi della tecnologia.

**Crittoanalisi**

La figura seguente mostra la macchina tedesca Enigma in dotazione all'esercito del terzo Reich per le comunicazioni che si volevano mantenere segrete. Essa appare all'utente con una convenzionale tastiera, con in più un insieme di rotori, a seconda delle posizione dei quali la lettera premuta veniva tramutata in un'altra, che veniva illuminata nel campo dalle lampadine, e faceva a sua volta ruotare i rotori in modo che la stessa lettera ripetuta non generasse mai la stessa lettera crittata. Con 3 rotori a 26 posizioni, e altre possibilità di modifica, il numero di codici possibili era molto alto, rendendo la decifrazione di un messaggio praticamente impossibile. In più, vi era sul fronte un campo di prese per altri collegamenti fra lettere scelti dall'operatore. La posizione iniziale dei rotori e la corrispondenza degli alfabeti sull'anello dei rotori veniva trasmessa all'inizio del messaggio, permettendo all'operatore destinatario l'inizializzazione della macchina.

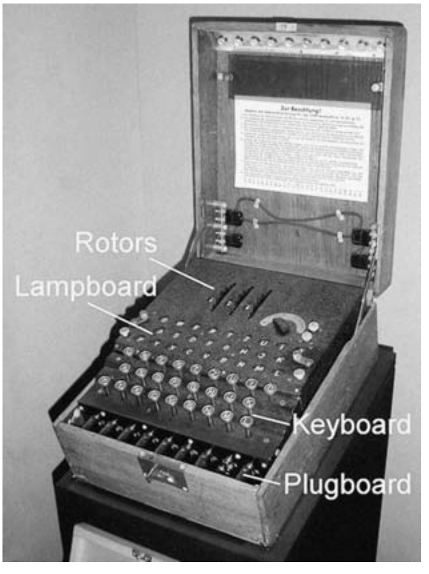



Figura 1. La macchina tedesca Enigma.

Turing lavorò al problema presso il centro segreto di controspionaggio inglese di Bletchley Park, fuori Londra, dove fra l'altro investigò e trovò le procedure di identificazione della marina tedesca, sviluppò procedure statistiche per anticiparne i bombardamenti, elaborò un modello per capire la posizione delle camme della macchina Lorenz SZ 40/42, e in seguito, verso la fine della guerra, si occupò della realizzazione di un sistema sicuro per rendere incomprensibile la voce.

Tutto questo lavoro restò segreto per molti anni e Turing venne insignito di numerose onorificenze per il lavoro svolto. Il lavoro sulla Enigma venne reso noto solo nel 1970, e il semplice programma «crypt» nel sistema operativo UNIX, che legge un testo e ne genera una versione criptata, è una versione in software della macchina Enigma, quasi un omaggio a Turing.

## Il Test di Turing

Già nella seconda metà degli anni quaranta, con l'avvento dei primi computer digitali in grado di calcolare qualsiasi cosa calcolabile, Turing e altri si erano posti il problema di che cosa fosse l'*intelligenza*, ossia se fosse possibile costruire una *macchina pensante,* uno dei miti ancestrali – alcuni dei quali, come volare, trasmettere messaggi a qualsiasi distanza, registrare suoni e immagini, sono stati risolti nel ventesimo secolo. Turing affronta la questione partendo da «macchina» e «pensiero», proponendo di oltrepassare il significato corrente di queste parole e di porre il problema in termini oggettivi e non ambigui (Turing, 1950).

Nella versione originale del test, vi sono tre attori, un utente di fronte a due telescriventi (oggi scomparse) una delle quali è collegata a un computer e l'altra a una telescrivente operata da un essere umano. Se l'utente, dopo aver posto qualsiasi domanda, non è in grado di determinare qual è la macchina e quale l'umano, la prima «passa il test». Esempi di domande e risposte secondo Turing sono (traduzione nostra, nostri commenti in parentesi quadre):

*Domanda* Scrivi un sonetto che ha come tema il Forth Bridge [famoso ponte in Scozia]
*Riposta* Non chiedermelo, sono negato per la poesia.
*D.* Aggiungi 34957 a 70764.
*R.* (pausa di 30 secondi) 105621.
*D.* Giochi agli scacchi?
*R.* Sì.
*D.* [descrizione di una scacchiera] Qual è la tua mossa?
*R.* (pausa di 15 secondi) [Mossa] e scacco.

Sembrerebbe blasfemo voler ridurre l'intelligenza a un quasi-imbroglio con risposta esatta, ma ciò chiarifica i termini dell'esame, imitando la procedura utilizzata da tutti gli essere umani quando incontrano una persona. Se questa risponde e discute in modo «intelligente», le si associa intelligenza, e umanità, e nessuno si chiede come essa arrivi a comportarsi così, quali siano i processi e le emozioni interne, o se addirittura non sia mossa da levette e ingranaggi, cosa apparentemente senza nessuna importanza. Ma vediamo un esempio di un discorso di quel test già pubblicato da Turing fra umano e computer (la difficile e imperfetta traduzione è sempre nostra, come i testi nelle quadre).

*Domanda* Nella prima riga del sonetto [Shakespeare, numero 18] *«Shall I compare thee to a summer's day»*, non è che *«spring's day»* andrebbe altrettanto bene o meglio?
*Riposta* Non scorre.
*D.* Perché non *«a winter's day»*? Scorrerebbe benissimo
*R.* Sì, ma nessuno vuole essere paragonato a un giorno d'inverno.
*D.* Diresti che Mr. Pickwick [Dickens] ti ricorda il Natale?
*R.* In un certo modo.
*D.* Eppure Natale è un giorno d'inverno, e non credo che Mr. Pickwick se ne avrebbe a male per l'accostamento.
*R.* Non penso che ciò sia serio. Come «giorno d'inverno» si intende un tipico giorno d'inverno, non uno speciale come il Natale.

Si comprende dall'esempio che Turing intende come domande quelle che toccano la sfera della sensibilità ed emozione con tutte le sfumature del caso, non la semplice logica.

Ma vediamo le 9 obiezioni che Turing stesso pone al suo testo, e brevemente come vi risponde, con qualche nostro commento dal ventunesimo secolo.

1. **Obiezione teologica.** Dato che l'essere umano ha un'anima immortale data da Dio, animali o macchine non possono pensare. Su questa base si sono commessi molti errori, da chi riteneva che le donne non avessero anima alla condanna di Galileo. [Notiamo che Turing era ateo, anche se credeva nella sopravvivenza dello spirito dopo la morte].
2. **L'obiezione dello struzzo «testa nella sabbia».** «Le conseguenze di una macchina pensante sono spaventose, speriamo e crediamo che essa non sia possibile». È legato alla credenza che l'Uomo sia necessariamente superiore a tutto il resto del creato. [Argomento che non vale la pena di controbattere, a parte la consolazione ottenibile dalla metempsicosi].
3. **L'obiezione matematica.** La logica matematica mostra che vi sono forti limitazioni nelle macchine: vedi Gödel (1931), Church (1936), Kleene (1935), Rosser e Turing (1937). [Ma limitazioni di diverso tipo si applicano anche agli esseri umani, che non sempre rispondono correttamente].
4. **La coscienza di se stessi.** «Senza emozioni una macchina non è in grado di comporre un sonetto o un concerto». [Se l'esempio di sopra sul sonetto fosse autentico, il computer passerebbe il test di Turing e non sarebbe possibile concludere che la macchina non abbia coscienza di sé, qualsiasi cosa ciò significhi].
5. **Diverse forme di invalidità.** «Non sarà mai possibile costruire una macchina in grado di fare…»: ad esempio, essere gentile, innamorarsi, apprendere dall'esperienza, amare le fragole. [Turing afferma che è un altro esempio dell'obiezione sulla coscienza, oggi sappiamo che non sta in piedi].
6. **L'obiezione di Lady Lovelace** (prima programmatrice della macchina di Babbage, 1842). «La macchina non crea niente, fa solo quello che già sappiamo per risolvere un problema». [Deriva solo dal fatto che *l'Analytical Engine* del 1842, mai terminata, non sembrava disporre di questa proprietà, però con sufficiente memoria e velocità avrebbe potuto emulare qualsiasi calcolatore, come i programmi moderni che evolvono. In realtà, anche se è un fatto ignorato da matematici e filosofi, le macchine sanno sorprendere, con conseguenze inaspettate, come oggi sappiamo].
7. **La continuità del sistema nervoso.** Il cervello non è una macchina a stati discreti e pertanto non può essere imitato da una tale macchina. [Ma il test di Turing è basato solo sul risultato e dunque il fatto che la «macchina dall'altra parte» sia continua o discreta non ha importanza. Oggi ascoltiamo musica memorizzata digitalmente e non notiamo differenza con quella «analogica», grazie al convertitore digitale-analogico].
8. **Assenza di formalità e carattere intimo.** Non vi sono regole indotte su come un essere umano debba comportarsi in qualsiasi situazione, e dunque non siamo macchine. [Ma già ai tempi di Turing era possibile far gi-

rare semplici programmi che da un dato elaboravano una riposta imprevedibile, proprio come nel caso del comportamento umano].

9. **Le percezioni extra-sensoriali.** Si tratta di telepatia, chiaroveggenza, precognizione e psicocinesi. Turing non nega la prima e immagina un test con un telepatico in grado di «vedere» la carta dell'utente, e aggiunge che, se la macchina possedesse un generatore di numeri casuali soggetto alla potenza psicocinetica dell'utente, l'identificazione resterebbe impossibile. [Un'obiezione che oggi ci lascia perplessi, dato che nessuna di queste «percezioni» non è mai stata dimostrata in un modo scientificamente soddisfacente].

Ma ora vediamo le conseguenze di questo test negli ultimi sessant'anni. Non c'è programma in Intelligenza Artificiale che non affermi di superare in qualche modo il Test di Turing. E si è notato che il superamento è tanto meno difficile quanto più il problema è complesso e specialistico: gioco degli scacchi, sistemi esperti, sonetti e Haiku, e in particolare certa musica, sia composta che eseguita, sono indistinguibili da una produzione umana (anche se espressa in un dato stile già noto, Bach, Chopin, …). Mentre il comportamento giornaliero, spesso dettato dal «buon senso», quali riconoscere immediatamente una situazione, un volto, un atteggiamento, eseguire le normali operazioni quali recarsi in un luogo e scegliere il vino e il cibo preferito, sfuggono alla macchina, a meno di operazioni a «forza bruta» con gran dispendio di risorse del calcolatore.

In ogni modo, il test di Turing, che all'essenziale significa che sempre meno si è in grado di distinguere se un dato risultato è stato ottenuto da un umano o da una macchina, e che pone il problema della definizione dell'Artificiale (Negrotti, 2010), resta ancora oggi l'argomento centrale di una discussione oggettiva sulla qualità del software.

## Gli scacchi e il computer

Nel 1948 Turing concepì un programma che giocava agli scacchi, considerato il gioco intellettuale per eccellenza, per un computer che non esisteva. Così nel 1952 decise di simulare le operazioni del computer, o del programma, «a mano», il che gli prese circa mezz'ora per mossa. La partita venne pubblicata, il computer perse, ma sembra che avrebbe vinto contro dilettanti.

Vediamo molto brevemente come si programma un computer per gli scacchi secondo l'idea di Shannon del 1949. Data una situazione sulla scacchiera, il giocatore ha la possibilità di varie mosse, che generano corrispondenti nuove situazioni sulla scacchiera. Quindi l'avversario ha a sua volta varie mosse, le cui situazioni permettono di nuovo al giocatore varie mosse. Si crea così un *albero* di mosse possibili, che in teoria raggiunge profondità e complessità molto grandi. Ma, a un dato livello, l'analisi dell'albero viene interrotta, e ogni situazione viene valutata da una funzione lineare, a coefficienti ottimizzati, la quale tiene conto fra l'altro di:

– possibilità di scacco;
– posizione del re;
– posizione della regina;

– posizione di ogni pezzo;
– vantaggio sulla tastiera.

Per cui a ogni situazione della scacchiera corrisponde un valore. Ora, secondo la procedura *minimax*, ogni nodo nell'albero delle situazioni esaminate assume il valore massimo se il turno è del giocatore – che naturalmente cerca di giocare al meglio – e minimo se è dell'avversario – che gioca al meglio per sé e dunque al peggio per il giocatore – così vengono retrocessi fino al nodo iniziale valori scelti fra i massimi e minimi, il che suggerisce finalmente al giocatore la mossa da giocare. Esiste inoltre una scorciatoia chiamata «potatura $\alpha - \beta$», basata sulla semplice osservazione che se la valutazione di una situazione in un sottoalbero sotto a un nodo di minima ritorna un valore maggiore di quelli già visti, non è necessario valutare tutti gli altri nodi del corrispondente sottoalbero, il quale va scartato (Negrotti, 2012).

È evidente che i moderni programmi in grado di battere i campioni utilizzano procedure ben più sofisticate di quella descritta, oltre che ad avere sufficiente memoria e potenza di calcolo per analizzare alberi molto complessi. Ma pur trattandosi di regole fisse e abbastanza meccaniche, l'essere umano riconosce «al volo» situazioni che meritano di essere approfondite rispetto a quelle che non vale la pena di considerare, un po' come l'esperto che necessita solo di pochi fatti, ben scelti, per analizzare una situazione e prendere una decisione – un'abilità che supera di gran lunga l'analisi e che viene considerata ben poco nelle scuole di ingegneria. È un'abilità umana che c'entra con l'intuito e la sensibilità sia per la scienza sia per l'arte. Il fatto che i moderni programmi superano ampiamente il test di Turing dimostra che in fondo gli scacchi non sono un gioco «intelligente» – come lo è invece l'arte – perché in teoria, fatta la prima mossa, il gioco è pienamente determinato.

### Altri contributi di Turing

Dal 1952 fino alla morte nel 1954 Turing si dedicò alla *biologia matematica*, in particolare a ipotesi sulla formazione di modelli e forme e alla ricerca dei *numeri di Fibonacci* nelle strutture vegetali. I risultati di queste ricerche vennero resi noti solo nel 1992, quando fu pubblicata la collezione completa delle sue opere, e oggi sono considerati di importanza fondamentale nella disciplina.

### Conclusione

È difficile trovare un'attività di cui Turing si sia occupato e in cui non abbia lasciato un contributo fondamentale, alla base dell'informatica contemporanea. La sua macchina viene insegnata nei corsi avanzati di teoria degli automi e di linguistica formale per le conseguenze sia teoriche che pratiche sulla programmazione e sulla realizzazione di sistemi. Egli ha costruito basi indiscutibili per la scienza computazionale e non resta che sperare che la sua opera venga studiata in modo profondo non solo nelle facoltà dedicate, ma anche nelle scuole pratiche di quella che viene chiamata disciplina informatica.

## Bibliografia

Hofstadter D. (1979) *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. New York: Basic Books. Premio Pulitzer 1979, tradotto anche in italiano, ed in molte altre lingue.
Baggi D. (2012). Alan Turing, vero padre dell'informatica. *Corriere del Ticino, 3 febbraio 2012.* Lugano: CdT.
Baggi D. (2010). Un modello (quasi) matematico della teoria musicale. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, *Nr. 60 e 61*. Bellinzona: UIM-CDC.
Chomsky N. (2002). *Syntactic Structures*. Second Edition. New York: Walter de Gruyter.
Hopcroft J.E., Ullman J.D. (1979). *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation.* New York: Addison-Wesley Publishing Company.
Ritchie D.M., Thompson K. (1978). The UNIX Time-Sharing System. *The Bell System Technical Journal, Vol.57, No.6, July-August 1978*, pp. 1905-1929.
Turing A.M. (1950). Computing Machinery and Intelligence. *Mind*, *Ottobre* 1950, 59, pp. 433-460. Ristampato in *Computer and Thought.* New York: McGraw-Hill, 1963.
Baggi D. (a cura di) (1991). Recombinant Music. *IEEE COMPUTER, luglio 1991.*
Oppure http://artsites.ucsc.edu/faculty/cope/
Negrotti M. (2010). Naturoids: from a dream to a paradox. *FUTURES, 42, 7, settembre 2010*. New York: Elsevier.
Negrotti M. (2012). *From Nature to Naturoids, and back.* Heidelberg: Springer Verlag.
Winston P. (1977 e 1979). *Artificial Intelligence.* New York: Addison-Wesley.

Siti Web consultati:
http://en.wikipedia.org/wiki/Alan_Turing
http://en.wikipedia.org/wiki/Entscheidungsproblem
http://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach%27s_conjecture
http://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_hypothesis
http://en.wikipedia.org/wiki/Russell's_paradox
http://en.wikipedia.org/wiki/Church%E2%80%93Turing_thesis
http://en.wikipedia.org/wiki/Ordinal_logic
http://en.wikipedia.org/wiki/Turing_reduction
http://en.wikipedia.org/wiki/Perfect_number
http://en.wikipedia.org/wiki/Foundations_of_mathematics
http://en.wikipedia.org/wiki/Circular_reasoning
http://en.wikipedia.org/wiki/Banburismus
http://en.wikipedia.org/wiki/Enigma_machine
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Bombe-rebuild.jpg
http://en.wikipedia.org/wiki/Turingery
http://en.wikipedia.org/wiki/Cryptanalysis_of_the_Lorenz_cipher
http://en.wikipedia.org/wiki/SIGSALY
http://en.wikipedia.org/wiki/ACE_(computer)
http://en.wikipedia.org/wiki/Computing_machinery_and_intelligence
http://en.wikipedia.org/wiki/Turing_test
http://www.alanturing.net/turing_archive/pages/reference%20articles/theturingtest.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Artificial_intelligence#Sub-symbolic_AI
http://en.wikipedia.org/wiki/CAPTCHA
http://en.wikipedia.org/wiki/Turing_test
http://www.turing.org.uk/turing/
http://mathworld.wolfram.com/TuringMachine.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus

# 2. Fibonacci e la letteratura[1]

Stefano Beccastrini, Maria Paola Nannicini[2]

The Argument of this Writing is the Medieval Mathematician Leonardo Fibonacci from Pisa and the Influence of his Geometry and of the Sequence of his Numbers on the Ancient and Modern Literature.

## 1. Premessa

Leonardo Pisano detto Fibonacci – ossia figlio di Bonaccio – è stato, come si sa, uno dei maggiori matematici europei del Medioevo. La sua riscoperta, dopo alcuni secoli di silenzio, avvenne nel periodo illuminista, grazie all'opera di vari studiosi tra i quali il bolognese Giambattista Guglielmini. Egli, nel 1812, tenne all'Università di Bologna un *Elogio di Leonardo Pisano* nel quale per la prima volta l'opera di Fibonacci fu inquadrata nel contesto storico e culturale del suo tempo. Il principale merito di Leonardo fu di aver fatto conoscere per primo il sistema numerico decimale posizionale comprendente lo Zero – insomma, la numerazione indoaraba – in Italia prima e in tutta l'Europa dopo, grazie al proprio *Liber Abaci*, pubblicato nel 1202, quando Leonardo aveva all'incirca trent'anni. Oltre al suo capolavoro, egli scrisse anche un trattato di geometria – intitolato *Pratica geometriae* e pubblicato nel 1223 – ed è anche famoso per la cosiddetta Successione – o Sequenza – di Fibonacci. Si tratta di una sequenza di numeri interi naturali che viene definita assegnando i valori dei due primi termini, $F_0 := 0$ e $F_1 := 1$, e stabilendo che per ogni numero successivo sia $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ con $n>1$. Ne risulta così una successione di numeri (i «numeri di Fibonacci») ciascuno dei quali è il risultato della somma dei due precedenti. I vari termini di questa successione sono detti Numeri di Fibonacci. L'intento del matematico pisano – pare originato da una sfida giocosamente lanciatagli dal suo amico e protettore Federico II di Svevia e poi da lui narrata, sotto forma di problema, nel dodicesimo capi-

1. Il presente articolo è un rimaneggiamento del capitolo ottavo, avente per titolo «Leonardo Fibonacci e la poesia», del libro di Stefano Beccastrini e Maria Paola Nannicini. (2012). *Matematica e letteratura. Oltre le due culture*. Trento: Erickson. Libro uscito nella collana, diretta da Bruno D'Amore, *Strumenti per la didattica della matematica*, con Prefazioni di Emilio Pasquini e Giorgio Bolondi. Su questo numero appare una recensione di Gianfranco Arrigo.
2. Stefano Beccastrini è un pedagogista, Maria Paola Nannicini è laureata in matematica e fa parte del RSDDM di Bologna.

tolo del *Liber Abaci* – era quello di trovare una legge che descrivesse la crescita di una popolazione di conigli. La storiella è notissima ma ci torneremo sopra tra poco. I numeri di Fibonacci, includendo lo 0, sono: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377, 610,987,1597,2584,4181,6765, eccetera eccetera. La successione di tali numeri viene chiamata, anch'essa, «di Fibonacci» in quanto cominciò a chiamarla così, in onore del pisano, il matematico francese dell'800 Edouard Lucas, studioso della teoria dei numeri. La successione di Fibonacci ha poi rivelato proprietà insolite e affascinanti: originata quale spiegazione del modo di figliare dei conigli, si è mostrata matematicamente esplicativa di molti altri fenomeni, dall'ottica dei raggi di luce all'albero genealogico del fuco, dall'organizzazione strutturale dei semi di girasole a quella di mille altri aspetti del mondo biologico, della cristallografia, della musica, dell'economia e persino dell'arte e dell'informatica. Inoltre, procedendo lungo la successione di Fibonacci, ci accorgiamo che il rapporto tra un termine e il suo precedente oscilla intorno a un numero al quale si avvicina sempre di più e quel numero è il rapporto aureo ossia il rapporto fra due lunghezze disuguali, delle quali la maggiore è medio proporzionale tra la minore e la somma delle due. Il valore di tale rapporto è un numero irrazionale connotato con $\varphi$, ventunesima lettera dell'alfabeto greco e iniziale di Fidia, lo scultore che sembra abbia utilizzato il rapporto aureo per dare armonia eterna alle proprie opere. Tale numero è stato storicamente, e numerologicamente, assai celebre, finendo talora con l'apparire una sorta di magica chiave dei segreti dell'Universo. Poteva la letteratura restare insensibile a tanta ricchezza di mistero e razionalità a un tempo? È stato per questo che Fibonacci, e la sua Successione, sono diventati – in connubio con la sezione aurea – un tema ricorrente della creazione e dell'analisi letteraria.

## 2. L'origine del sonetto alla corte di Federico II

Narreremo, adesso, una vicenda che ha per protagonisti un grande monarca, Federico II di Svevia, un valente matematico, Leonardo Fibonacci, un dotto notaio che fu anche poeta forse non eccelso ma importante per la storia della letteratura italiana, Jacopo da Lentini. L'epoca in cui la vicenda ebbe luogo fu il XIII secolo e l'ambiente quello della Magna Curia, la corte principalmente operante in Sicilia ma in realtà ambulante per tutto quanto il Meridione d'Italia e oltre, dello stesso Federico. Ha scritto Carlo Dionisotti, illustre storico della letteratura italiana:

*«Si sa che nella prima metà del Duecento corre dalla Sicilia lungo la fascia tirrenica un flusso di nuova poesia che invade e dilaga in Toscana, supera d'impeto l'Appennino pistoiese e si ingrossa ma si arresta anche a Bologna. Estranea resta in gran parte tutta la fascia adriatica, e qui, tra Abruzzi e Marche, facendo centro nell'Umbria francescana, fiorisce tutt'altra poesia e letteratura. Finalmente una terza zona, a sua volta indipendente dalle prime due, si disegna a nord della dorsale appenninica e del Po. Questa tripartizione è sufficientemente documentata perché si possa qui prescindere dai dubbi particolari e dalle ulteriori distinzioni che essa ancora suggerisce. Tanto più che, se pur altri documenti mancassero, basterebbe per sempre, a definire la situazione di frazionamento della cultura e letteratura italiana del Duecento, un solo incomparabile testo: il 'De vulgari eloquentia' di Dante. L'intelligenza di questo libro è*

*venuta crescendo e illuminandosi sempre più, e non si esagera dicendo che esso è la porta stretta che comanda per noi l'ingresso, non soltanto alla 'Divina Commedia', ma conseguentemente a una interpretazione storica di tutta quanta la letteratura italiana»* (Dionisotti, 1967, pag. 31).

La prima di queste linee direttrici condusse alla poesia toscana ossia al «dolce stil novo» e da lì alla *Commedia* e poi a Petrarca e al successivo, e plurisecolare, petrarchesimo della poesia europea . La seconda condusse invece a quel capolavoro della prima poesia italiana che è il francescano *Cantico delle creature*. La sua influenza sulla letteratura italiana successiva appare meno rilevante ma, sotterraneamente, tutt'altro che assente, andando da Jacopone da Todi a, nel Novecento, Clemente Rebora e a un certo, il più tardo, Mario Luzi. La terza linea, quella orientata verso l'Oltrepo non ha dato precoci capolavori poetici, pur producendo il suo libro più bello, nel Duecento, con il *Novellino*, raccolta di novelle rimpiangenti una mitica, e del tutto storicamente inesistente, Marca Trevigiana. A valorizzare la scuola poetica siciliana, nonché la continuità della filiera poesia provenzale/poesia dei «siciliani»/dolce stil novo quale asse originario della letteratura italiana, fu proprio Dante Alighieri nel *De vulgari eloquentia*. La scuola poetica siciliana fu una sorta di cenacolo letterario nato sotto gli auspici dell'imperatore Federico II, uomo assai erudito e di grandi vedute sia in campo politico che culturale. Il patrimonio poetico internazionale cui la scuola siciliana attinse fu quello, originariamente francese ma poi diffuso in tutta l'Europa, della lirica trobadorica. Da essa, i «siciliani» – i quali non erano necessariamente tali: il termine è usato nel senso di «federiciani», poeti della Magna Curia imperiale – trassero scelte lessicali, temi, metafore, non facendolo tuttavia in maniera passivamente imitativa bensì apportando più di un'innovazione originale, tra cui proprio l'invenzione del sonetto, una forma poetica destinata a un successo secolare e non soltanto italiano. Ed eccoci giunti, così, al vero argomento di queste pagine: l'origine del sonetto alla corte federiciana e il rapporto tra tale evento e la matematica, e più precisamente la geometria, di un matematico che alla corte di Federico II era di casa ossia Leonardo Fibonacci. Jacopo da Lentini («Jacobus de Lentino, domini imperatoris notarus» come egli stesso si autodefiniva) era nato verso il 1210 nella città del siracusano che già era stata patria del filosofo sofista Gorgia. Egli era appunto, oltre che un poeta, un notaio (il «Notaro» per antonomasia secondo Dante, che ne parla con ammirazione sia nel *De vulgari eloquentia* che, poi, in quel trattatello di storia della letteratura italiana e di poetica che è il canto XXIV del *Purgatorio*) e svolgeva tale funzione proprio al servizio di Federico II. Per quanto riguarda invece la sua attività poetica, ci restano di lui 16 canzoni e 27 sonetti. Il sonetto fu la nuova forma poetica che egli stesso inventò. Esso, nella sua versione canonica, è composto di 14 endecasillabi suddivisi in due quartine, a rime alterne (ABAB, ABAB), e in due terzine, a rime ripetute (CDE, CDE) o, in seguito, anche incrociate (CDC, DCD). Un esempio, di mano dello stesso Jacopo da Lentini è il seguente:

Amore è uno desi[o] che ven da' core
per abondanza di gran piacimento;
e li occhi in prima genera[n] l'amore
e lo core li dà nutricamento.

Ben è alcuna fiata om amatore
senza vedere so ’namoramento,
ma quell’amor che stringe con furore
da la vista de li occhi ha nasci mento:

ché li occhi rapresenta[n] a lo core
d’onni cosa che veden bono e rio
com’è formata natural[e]mente;

e lo cor, che di zo è concepitore
imagina, e [li] piace quel desio
e questo amore regna fra la gente.

L’invenzione del sonetto, essendo Jacopo nato intorno al 1210, è pensabile sia avvenuta tra il 1230 e il 1240 ossia uno o due decenni dopo che, nel 1220, Leopardo Fibonacci aveva pubblicato la propria *Practica geometriae*, la cui genesi era senz’altro collegata all’ambiente politico-cultirale della Magna Curia federiciana. Lo dimostra il fatto che quel trattato fu dal suo autore dedicato a Domenico Ispano, uno degli intellettuali – con Michele Scoto, filosofo neoaverrorista e astrologo di corte, e Giovanni da Palermo, matematico anch’egli – che Federico II aveva raccolto nella sua cerchia in qualità di «consiglieri culturali» (pare sia stato proprio Domenico Ispano a consigliare a Federico di incontrare per la prima volta Fibonacci, quando l’imperatore riunì la propria Magna Curia a Pisa, nel 1225). Le idee geometriche di Leonardo – dall’imperatore tenuto in alta considerazione, anche perché entrambi erano grandi estimatori della cultura islamica – avevano dunque ampia circolazione a corte ed erano certamente ben note anche a Jacopo da Lentini. È dunque storicamente attendibile la tesi del filologo tedesco Wilhelm Pötters, che insegna linguistica romanza all’università di Wurzburg, riguardante il fatto che la metrica del sonetto sia basata proprio sulle «precise condizioni culturali che possono aver reso possibile, nella Sicilia duecentesca, la fusione tra poesia e geometria» (Pötters, 1998, pag. 17). Ai presupposti non letterari e anzi esplicitamente matematici delle origini del sonetto aveva comunque, come lo stesso Poetters riconosce, già fatto riferimento Aurelio Roncaglia, che fu direttore dell’istituto di filologia romanza dell’università di Roma. Nell’Introduzione al suo *Nascita del sonetto. Metrica e matematica al tempo di Federico II*, Potters, che già aveva cominciato ad abbozzare la sua teoria nel 1983 (Potters, 1983), avverte:

*«Partendo da una serie di elementi formali accertabili nei più antichi sonetti, sarà possibile fornire una versione più precisa del nostro modello geometrico dell’invenzione, quello che abbiamo definito il ‘cerchio del sonetto’. In tal modo la teoria non si esaurirà più in ricostruzioni teoriche, come nel primo abbozzo del 1983, ma si presenterà ora trasformata in un sistema di figure i cui modelli verranno individuati in alcune basilari operazioni impiegate dalla matematica medievale. Come fonti storicamente più vicine al primo sonetto si possono citare gli scritti del più famoso matematico dell’epoca, cioè il ‘Liber abaci’ (1202/1208) e la ‘Pratica geometriae’ (1220) di Leonardo Fibonacci (Leonardo Pisano), di cui sono ben noti gli stretti rapporti personali con i dotti componenti della corte di Federico II»* (Ibidem, pag. 18).

Sintetizzando molto il ragionamento del filologo tedesco, occorre far notare come siano numeri fondamentali della forma-sonetto l'11 e il 14 ossia la quantità metrica di sillabe presenti in ognuno dei suoi versi (11 appunto, essendo inderogabilmente endecasillabi) e la quantità numerica dei versi medesimi (14, appunto essendo ogni sonetto composto di 2 strofe di 4 e due strofe di 3 versi ciascuna). Ebbene, tali numeri sono anche quelli più utilizzati nella matematica medievale, ma soprattutto nel trattato geometrico di Fibonacci, per eseguire calcoli relativi alla figura del cerchio (per questo Pötters, per indicare la propria teoria, parla di Sonettkreis, «cerchio del sonetto»). Queste, comunque, le sue conclusioni:

*«1 – Come risulta con chiarezza…(dalla lettura della 'Pratica geometriae')…il matematico più autorevole del medioevo utilizza nella sua grande summa geometrica del 1220 i valori di 11 e 14 quali strumenti di calcolo nella misurazione del cerchio. Fibonacci giustifica esplicitamente la sua scelta dei valori 11 e 14: essi esprimono il rapporto tra le aree del cerchio e del quadrato circoscritto 'in minimis numeris';*[3]

*2 – Parimenti, nella forma poetica inventata, per quel che ne sappiamo, fra il 1230 e il 1240 nel circolo dei dotti riuniti alla corte di Palermo, i valori numerici adottati quali misure basilari sono l'11 e il 14;*

*3 – È noto inoltre che Fibonacci era in rapporti personali con vari personaggi eminenti della Magna Curia, con l'imperatore, sempre interessato a nuovi problemi e metodi scientifico-matematici, con Michele Scoto, astrologo di Federico, e con altri. Da questo insieme di fatti storici e di circostanze oggettive non è quindi da escludere che a Palermo, a Pisa o in altro luogo vi siano stati contatti personali e scientifici tra Fibonacci e Giacomo da Lentini, anzi tali rapporti risultano essere del tutto probabili. È in effetti poco sensato presumere che l'inventore del sonetto non abbia notato la concordanza che esiste fra le misure utilizzate in una delle più importanti opere matematiche del tempo e le leggi metriche della nuova composizione poetica da lui ideata. Visto il legame cronologico fra le due grandi produzioni della cultura medievale – 1220 e 1230/40 – riteniamo dunque attendibile l'ipotesi che la misurazione del cerchio nella matematica di Fibonacci… sia servita da modello nell'invenzione del sonetto»* (Ibidem, pag. 69/70).

Effettivamente il ragionamento del filologo tedesco appare storicamente credibile. Di sicuro più di quello, applicato all'opera del Petrarca, che egli conduce nell'altro suo libro, *Chi era Laura? Strutture linguistiche e matematiche nel «Canzoniere» di Francesco Petrarca* (Pötters, 1987), che vede nel Pi greco il fondamento sia della persona di Laura che della struttura del *Canzoniere*. Là il ragionamento di Pötters ci appariva più discutibile mentre qui, nel suo giungere alla definitiva conclusione che *«Il sonetto è geometria in forma metrica o, più precisamente, trasposizione poetica di due valori numerici fondamentali nelle scienze del Medioevo: 14 e 11»* (Ibidem, pag. 168) esso ci sembra, oltre che culturalmente suggestivo, più storicamente attendibile. Del resto, fermo restando che quando si parla di metrica poetica si parla necessariamente di matematica (essa rappresentando, appunto, «i numeri della poesia»), non c'è dubbio

3. Usando l'archimediano 22/7, si ottiene 22/14, ossia (11x2)/14, dunque ritroviamo i numeri 11 e 14.

che, in maniera particolare, la forma-sonetto presenta una struttura così compattamente strutturata da richiamare subito alla mente la matematica. Ben lo sapeva quel maestro di poesia che fu Charles Baudelaire quando affermò, in una sua lettera citata dallo stesso Pötters, che il sonetto possiede una *«bellezza pitagorica»* (Ibidem, pag. 168).

## 3. La Successione di Fibonacci e la poesia contemporanea

Della successione di Fibonacci già si è detto qualcosa nella Premessa dell'articolo. Adesso vediamo come la raccontò a Dante, recatosi nella casa pisana dei Fibonacci molti anni dopo la morte del grande matematico, l'ancor vivente seppure molto anziana sorella minore di Leonardo. L'episodio – del tutto inventato, naturalmente, essendo l'autore non soltanto un eminente matematico ma anche uno scrittore pieno di immaginazione – si trova nel capitolo *Conigli* del romanzo di Bruno D'Amore *Dante e la matematica*. Dante, che ne ha sentito vagamente parlare, chiede alla donna lumi sulla storia dei conigli e lei, senza farsi troppo pregare perché gli piace narrare dell'amato fratello ma non gli capita spesso l'occasione di farlo, racconta:

*«Fate con me questa ipotesi: che s'abbia una coppia di conigli, maschio e femmina, giovani, appena nati. Il primo mese i conigli non figliano, ma dal secondo mese in poi, sempre, ogni mese, figliano una coppia, ancora sempre maschio e femmina. La domanda è: dopo un anno quante coppie di conigli vi sono?»* (D'Amore, 2011, pag. 99).

*«Dante prova a fare il calcolo a mente ma presto si confonde. La donna gli consiglia, allora, di farlo per iscritto, come avrebbe fatto lo stesso Leonardo. Il poeta si mise seduto a un tavolo, prese una penna, la intinse nel calamaio e scrisse:*

*– Dunque,*

| | |
|---|---|
| *mese I* | *coppie I* |
| *mese II* | *coppie I* |
| *mese III* | *coppie II* |
| *mese IV* | *coppie III* |
| *mese V* | *coppie V* |
| *mese VI* | *coppie VIII* |
| *mese VII* | *coppie XIII* |

*Ecco, fin qui ci siamo; ora proseguo al mese otto; ci sono le tredici coppie, più quelle che figliano che sono, dio, mi sono perso davvero…*

*– E qui l'arismetica aiuta, avrebbe detto Leonardo. Guardate, signore, questi numeri, questi – e indicò i numeri delle coppie – Che vedete?*

*– Oh, nulla, e che vedo mai? Vedo come numeri disordinati, non so, aumentano, ma come?*

*– Guardate bene i numeri, tutti. Il XIII, per esempio, che relazione ha con chi lo precede?*

*– Oh dio santo – scoprì d'improvviso Dante – Il XIII è la somma dei due precedenti. Aspetta, aspetta, sì, sì, è così: ogni numero nuovo è sempre la somma dei due vecchi precedenti. Che magia.*

*– È così, Dante; proseguite con l'arismetica e senza perdervi.*
*E Dante aggiunse:*
*mese VIII coppie XXI*
*mese IX coppie XXXIV*
*mese X coppie LV*
*– Cinquantacinque, così tanti? Non è possibile, davvero, che magia è questa?*
*mese XI coppie LXXXIX*
*mese XII coppie CXLIV*
*– Un immenso numero, non lo posso credere.*
*– È così, Dante, la cosa è straordinaria; crescono dapprincipio poco alla volta, poi sempre più in fretta. Leonardo diceva che questa successione è magica perché è presente nella natura, in ogni dove, ma io questo non l'ho mai capito»* (Ibidem, pag. 100-101).

C'è stato anche chi ha fatto in modo che la successione di Fibonacci – che quanto ai conigli si ferma a 144, poiché la scommessa riguardava soltanto dodici mesi, ma che può andare avanti all'infinito – si trovasse anche, strutturalmente, nei versi dei poeti. Per esempio, in quelli dell'opera più celebre della grande poetessa danese, ma anche narratrice (per esempio, ha scritto un romanzo sul pittore italiano, rinascimentale, Andrea Mantegna) nonché saggista e autrice di libri per i ragazzi, Inger Christensen. Spesso candidata al Nobel purtroppo senza mai vincerlo – ma, durante la sua vita, non le sono mancati altri prestigiosi riconoscimenti, in patria e all'estero – ella era nata a Vajla, sulla costa orientale della penisola dello Jutland, nel 1935 ed è morta nel 2009. È a ragione considerata la maggiore poetessa sperimentale della letteratura danese del 900, capace di esplorare nei suoi versi, dedicati così ai fenomeni naturali come ai problemi sociali e filosofici, inedite e coraggiose soluzioni linguistiche. Fu un'appassionata studiosa di Leonardo Fibonacci, in particolare della sequenza numerica che porta il suo nome, e di Noam Chomsky, le cui idee sulle strutture del linguaggio hanno molto influenzato la sua poesia. Nel suo capolavoro, *Alfabet* del 1981, la Christensen sperimenta l'utilizzo di due vincoli linguistici, nel proprio cantare le molteplici manifestazioni della natura e del mondo: da una parte le lettere dell'alfabeto (ciascuna delle quattordici strofe che compongono il poemetto inizia infatti con una diversa lettera dell'alfabeto – in successione, da A a N, ossia da 'albicocche' fino a 'notti' – essa poi restando dominante nel testo dell'intera strofa) e dall'altra, appunto, la successione di Fibonacci, che regola il numero dei versi di ciascuna strofa. Così, la prima strofa, segnata dal dominio della A e composta da un solo verso (il primo numero della sequenza di Fibonacci è infatti proprio 1) suona così:

1-A (1 v.)
*«apricot trees exist, apricot trees existalbicocchi esistono, esistono alberi di albicocche e felci e more di rovo»*
e dopo di essa, di lettera in lettera e di strofa in strofa, si giunge fino alla XIV, che è contrassegnata appunto dalla N (che non è la quattordicesima lettera dell'alfabeto italiano ma lo è di quello danese) ed è composta da 610 versi essendo proprio il 610 il quattordicesimo numero della sequenza di Fibonacci. A puro titolo di esempio, citiamo integralmente la quinta strofa, quella della lettera E e che conta 8 versi (la

lasciamo in lingua originale perché, tradotta in italiano, l'inizio in E non sarebbe più valido):

5-E (8 v.)
*«efteråret findes; eftersmagen og eftertanken*
*findes; og enrummet findes; englene,*
*enkerne og elsdyret findes; enkelthederne*
*findes, erindringen, erindringens lys;*
*og efterlyset findes, egetræet og elmetræet*
*findes, og enebærbusken, ensheden, ensomheden*
*findes, og edderfuglen og edderkoppen findes,*
*og eddiken findes, og eftertiden, eftertiden»*

Un'assai approssimativa traduzione in prosa sarebbe: *«Il romanzo esiste, esistono l'autunno, le foglie, il pentimento, non c'è isolamento, angeli, vedove e alci, lì, ricordi, ricordi di luce, la luce lì, e querce e olmi, qui il ginepro, l'affinità, la solitudine esistono e anche anatre e ragni, aceto, e il futuro, il futuro»*.

La poetica della Christensen si basa sull'idea che (el albaricoquero existe, el albaricoquero existe) la poesia sia alla fin fine un «gioco», magari persino tragico, nel quale tutti noi esseri umani giochiamo col mondo e il mondo con noi. Ella era convinta che i rapporti numerici fossero presenti, in maniera decisiva, nella natura stessa del mondo e dell'universo e dovessero esserlo anche nel mondo della poesia e nella sua stessa architettura strutturale. Ciò, a differenza di quanto comunemente si crede, non limitava affatto la poeticità, e il fascino suggestivo ed evocativo, dei suoi versi e la loro capacità di esprimere un sentimento globale dell'esistenza terrena che era a un tempo storicamente connotato e metafisicamente generalizzato. Lo accentuava, invece, lo sottolineava, lo esaltava. Anche la sua ultima raccolta poetica, *La vallata della farfalla*, pubblicata nel 1991, ha una struttura formale assai precisamente, ossia matematicamente, definita. Essa è basata sul cosiddetto *sonnet redoublé* ossia su una sequenza di 15 sonetti in cui l'ultimo verso di ciascuno diviene il primo del seguente. I primi 14 sonetti formano dunque un ciclo. Il quindicesimo, riassuntivo dell'intera opera, è composto invece dai primi versi degli altri 14, posti in ordine consecutivo. particolare tipo di componimento poetico, un vero e proprio genere letterario, al quale è stato attribuito il nome di Fib, che vuole appunto rappresentare un omaggio al matematico pisano.

In questi anni Christensen ha inoltre pubblicato due romanzi, *Evighedsmaskinen* (1964) e *Azorno* (1967), così come un breve racconto sul pittore del Rinascimento italiano Mantegna, presentato dal punto di vista di narratori diversi (Marsilio – il segretario di Mantegna –, Farfalla – la principessa turca –, e il giovane figlio di Mantegna), intitolato *Det malede værelse* (1976, tradotto in inglese e pubblicato da Harvill Press nel 2000 con il titolo *The Painted Room* ).

A diffonderlo, se non proprio a inventarlo, è stato un poeta americano di Los Angeles di nome Gregory K. Pincus, appassionato di matematica oltre che di poesia e che di mestiere fa l'illustratore di libri per bambini e lo sceneggiatore televisivo oltre che il bibliotecario volontario in una scuola elementare. Amante dell' Haiku – un'antica forma poetica giapponese caratterizzata da una struttura metrica di tre versi rispettivamente di cinque, sette e cinque sillabe – un giorno gli venne in mente di scriverne uno di tipo non tradizionale ossia basato su nuove regole, su nuovi vincoli metrici e dunque matematici. Pensò così di ispirarsi alla successione di Fibonacci, poeticamente affascinante per la sua onnipresenza in natura. Il Fib, effettivamente, può essere considerato una specie di Haiku d'origine occidentale e moderna. Il vincolo formale, in tal caso, è quello di fare in modo che il numero delle sillabe dei versi si succeda secondo la progressione della sequenza di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33 e così via. Mentre il vincolo formale dell'Haiku impone che ciascuna poesia non superi i tre versi, in teoria il numero dei versi di un Fib potrebbe variare a piacere anche se, in genere, esso non supera mai i sei, sette versi in quanto i numeri della sequenza si susseguono con un tale ritmo di crescita che già un Fib di nove versi imporrebbe che il nono avesse ben 33 sillabe, risultando così eccessivamente lungo. Poco sopra si è detto che non fu Gregory K. Pincus, il poeta che ha portato al successo questo tipo di componimento poetico, a inventarlo. Il primo a parlarne fu, infatti, il poeta e docente di letteratura angloamericana in diverse università degli USA e del mondo – insegnò anche, in Italia, all'università di Firenze – John Frederick Nime. Egli, nel 1974, pubblicò un libro, intitolato *Western Wind. An Introduction to Poetry (Vento occidentale. Una introduzione alla poesia*) nella Premessa del quale – parlando dei diversi vincoli metrici, anche potenziali, dei componimenti poetici – accennò anche alla successione di Fibonacci. Fu però Pincus, sul suo blog, a pubblicare anni dopo, e precisamente nel 2006, il primo dei propri Fib, quello ormai famoso nel mondo intero (l'accenno alla spirale fa riferimento al fatto che tra i tanti fenomeni naturali che sono regolati dalla successione di Fibonacci c'è anche il guscio a spirale delle conchiglie):

*«One,*
*Small,*
*Precise,*
*Poetic,*
*Spiraling mixture:*
*Math plus poetry yields the Fib».*

La traduzione italiana suonerebbe:

Una / Piccola / Precisa / Poetica / Mescolanza spiraliforme / La matematica più la poesia dà il Fib.

Tuttavia il numero delle sillabe non rispetterebbe più la successione di Fibonacci, in quanto «piccola» è trisillabico e non monosillabico come «small», «poetica» è quadrisillabico e non trisillabico come «poetic» eccetera eccetera. Con notevole sorpresa di Pincus, una miriade di persone inviò al suo blog, nei giorni seguenti, entusiastici messaggi di risposta e la cosa continuò nei mesi successivi, aprendo una discussione collettiva sulla nuova forma poetica, di cui cominciarono ad arrivare anche esempi scritti da altri. Come ricorda lo stesso Pincus, con sua immensa gioia ha continuato a ricevere sul blog sempre nuovi commenti sul Fib e sempre più numerosi Fib scritti in almeno una dozzina di lingue del mondo (Pincus, gottabook.blogspot.com). Al fenomeno – soprattutto negli USA, quasi dilagante e non soltanto tra i poeti veri e propri bensì anche presso la gente comune e, per esempio e quale strumento didattico, gli insegnanti e i bambini

– ha dedicato poi un importante servizio giornalistico, così contribuendo ulteriormente alla sua conoscenza e al suo utilizzo, *The New York Times*, il cui *Learning Network* ha proposto anche una sorta di «guida» alla sua applicazione a livello scolastico. Pincus, nei suoi Fib, utilizza, come si è già notato, sei versi di complessive 20 sillabe (1, 1, 2, 3, 5, 8) e preferisce non usare rime però, naturalmente, nessuno impedisce ad altri poeti di comportarsi in altro modo. Per esempio, Suresh Venkatasubramanian, un esperto di Computer Science di New York ha scritto questo Fib – che, in tal caso, ha scelto la matematica non soltanto quale vincolo strutturale ma anche quale argomento poetico – di otto versi (essendo l'ottavo verso inevitabilmente e insolitamente lungo):

*«I*
*like*
*to blog.*
*Frequently.*
*Theory matters.*
*Computer science (theory)*
*is my home and geometric algorithms are*
*sublime. Let P be a set of points in general position in the plane. Amen.»*

In teoria, sarebbe anche possibile utilizzare la successione di Fibonacci per regolare non il numero delle sillabe bensì quello delle parole presenti nei vari versi ma i Fib scritti in questo modo sono, per ora, assai meno numerosi di quelli scritti «alla Pincus». ossia in riferimento alle sillabe del verso. Il Fib è comunque un esempio, tutto sommato modesto ma assai interessante, della vastità e varietà dei rapporti tra letteratura e matematica e di come tali rapporti non riguardino solamente l'argomento delle composizioni letterarie e in questo caso poetiche (la gran parte dei Fib, infatti, non riguardano affatto Fibonacci, la sua successione o la matematica in genere) ma anche la loro struttura formale, a cui la matematica può creativamente imporre questo o quel vincolo... Il Fib comincia a essere praticato, seppure in maniera meno clamorosa che negli USA, anche in Italia, per esempio dal bravo Popinga – pseudonimo del milanese Marco Fulvio Barozzi, laureato in geologia e insegnante di matematica e scienze – sul suo blog (keespopinga.blogspot.com/2009). Si potrebbe affermare che nel 900 un nuovo genere poetico, dopo la medievale invenzione del sonetto da parte di Jacopo da Lentini, sia nato sotto il segno luminoso di Leonardo Fibonacci, medievale matematico pisano. Ma forse l'utilizzo della sequenza che prese il suo nome, e del rapporto aureo con il quale è collegata, divenne motivo di poesia ben prima che egli formulasse le proprie idee matematiche e anzi ancor prima che nascesse. Come scrive Mario Livio, astrofisico e ottimo divulgatore scientifico nato in Romania ma oggi di nazionalità israeliana, che alla sezione aurea ha dedicato un bel volume:

*«La poesia è, probabilmente, l'ambito in cui i numeri di Fibonacci hanno fatto la loro prima apparizione, perfino prima che tra gli omonimi conigli. Una delle categorie metriche della poesia sanscrita e prakit è nota come 'matra-vitta'. Si tratta di metri in cui il numero di «morae» (le normali sillabe brevi) è costante, mentre il numero delle lettere è arbitrario. Nel 1985, il matematico Prmanand Singh dell'indiano Raj Norain College ha fatto notare che i numeri di Fibonacci e le relazioni che li defi-*

*niscono compaiono negli scritti di tre autorità indiane in tema di 'matra-vitta' prima del 1202, l'anno di pubblicazione del trattato di Fibonacci»* (Livio, 2003, pag. 290).

La prima di tali autorità fu Acarya Virahanka, che visse tra il VI e il VII secolo. Egli propose una regola poetica piuttosto vaga ma che comunque accennava pur sempre al combinarsi dei metri di due versi precedenti per ottenere il successivo, proprio come nella successione di Fibonacci. Ancora più chiaramente Gopala, la seconda autorità chiamata in causa da Singh, in un manoscritto risalente all'incirca al 1130 spiega che ogni metro è la somma dei due metri precedenti, così calcolando la serie di essi e ottenendo proprio gli stessi numeri della successione di Fibonacci. La terza autorità, infine, fu uno scrittore del XII secolo, Acarpa Hemacandra. Anch'egli affermò, in un suo testo, che la somma dell'ultimo e del penultimo numero delle variazioni metriche doveva corrispondere al numero successivo. Insomma, la presenza della successione di Fibonacci nel campo della metrica poetica sarebbe già stata conosciuta e teorizzata prima ancora che il grande Leonardo Pisano si occupasse di conigli e, forse, ancor prima che venisse al mondo in quel di Pisa e andasse ad imparare la numerazione indoaraba in quel di Bejaia.

## 4. Il Phi, la poesia, l'Eneide di Virgilio

Come già più volte si è detto, la matematica influisce sulla letteratura in almeno due modi: dettando regole (metriche, combinatorie, permutative e così via) al suo strutturarsi o comparendo invece (o anche), in maniera più o meno protagonistica nei suoi temi, argomenti, personaggi. Si è anche visto che le idee geometriche di Fibonacci e i numeri della sua successione hanno agito sulla letteratura soprattutto sul versante strutturale ma crediamo valga la pena di citare almeno una poesia in cui, invece, essa diventa, alquanto scherzosamente, il tema stesso del componimento. La riporta Martin Gardner, uno dei più divertenti divulgatori di enigmi e giochi matematici che siano mai esistiti, nel suo *Circo matematico* (Gardner, 1981). A scriverla è stato J. A. Lindon, un matematico e poeta inglese, che Gardner considerava il più grande autore novecentesco di versi umoristici a sfondo matematico. I versi sono apparentemente dedicati alle mogli di Fibonacci ma, metaforicamte, evocano la sua celebre successione:

*«Ogni moglie di Fibonacci*
*non mangiando che castagnacci*
*pesava come le due precedenti.*
*Già un suo quinto vi faceva contenti.»*

Venendo a occuparci, nei suoi rapporti con la letteratura, del rapporto aureo e del numero Phi – entrambi aventi molto a che fare, come si è detto nell'Introduzione, con i numeri di Fibonacci – occorre dire che, anche in tal caso, sono assai più frequenti le, come vedremo talora soltanto supposte, influenze di essi sulla struttura del testo letterario che non invece sui suoi temi e argomenti. Pur esistendo come sempre varie eccezioni, due delle più interessanti delle quali sono la poesia *The Golden Mean (La media aurea),* di Paul S. Bruckmann e la poesia *A la divina proporcion (Alla di-*

*vina proporzione)* di Rafael Alberti. Paul S. Bruckman, un matematico e poeta di Concord, pubblicò il suo componimento nel 1977 su *The Fibonacci Quarterly*, rivista ufficiale della Fibonacci Association, fondata nel 1963 da Verner E. Hoggart, matematico del San Josè State College, e padre Alfred Brousseau, matematico del St. Mary,s College di Marega, entrambi appassionati dell'opera del grande pisano:

*«La media aurea non è affatto banale*
*Tutt'altra cosa che un numero irrazionale.*
*Capovolta, pensate un po',*
*Resta se stessa meno l'unità.*
*Se poi di uno la aumentate*
*Quel che otterrete, vi assicuro, è il quadrato.*
...........................................
*Scritta come frazione con continuità,*
*è uno, uno, uno,...,fino a sazietà;*
*Così chiara che più chiara alcuna non resta*
*(non vi comincia a girare un pò la testa?)»*

Rafael Alberti, uno dei maggiori poeti spagnoli del 900, scrisse la sua *A la divina proporcion (Alla divina proporzione*) mentre era in esilio, per il suo antifranchismo, in Italia ed ebbe modo di vedere da vicino un'edizione del celebre libro cinquecentesco di Luca Pacioli. Essa venne poi pubblicata nella raccolta *Poemas del destierro y de la espera (Poesie dell'esilio e dell'attesa 1935-1975).* Si tratta di un sonetto (la cui traduzione è nostra):

*«A te, disciplina meravigliosa,*
*media, estrema ragione della bellezza,*
*che chiaramente accetta d'esser chiusa*
*viva nella maglia della tua legge divina.*

*A te, lieta prigione della retina,*
*aurea sezione, celeste quadratura,*
*misteriosa fonte di misura*
*che origina l'armonia dell'Universo.*

*A te, mare dei sogni angolari,*
*fiore delle cinque forme regolari,*
*azzurro dodecaedro, arco sonoro.*

*Luci per ali, un compasso ardente.*
*Il tuo canto è una sfera trasparente.*
*A te, aurea proporzione divina.»*

Venendo all'influenza, reale o presunta, della sezione aurea nello strutturarsi di celebri testi letterari, partiamo da una citazione di Remo Ceserani, acuto letterato, tratta dal suo *Convergenze. Gli strumenti letterari e le altre discipline*:

*«Alcuni studiosi, ispirandosi alla forte presenza di numeri simbolici, formule e strutture proporzionali su base matematica e geometrica nelle culture antiche, hanno ritrovato, per esempio, la presenza di un rapporto aritmetico e armonico, rappresentato da numeri simbolici o dalla sezione aurea, non solo nella struttura dei templi greci o dei gruppi scultorei di Fidia, ma anche nella poesia di Omero, nelle tragedie di Eschilo, nelle commedie di Aristofane, nelle ecloghe di Virgilio, nel grande poema di Dante»* (Ceserani, 2010, pag. 38).

In Italia per esempio questo tipo di indagini filologiche e critiche, richiamantesi alla matematica, è stato condotto, in maniera approfondita e spesso addirittura insistente, da Carlo Federico Russo e dai suoi discepoli presso l'università di Bari, dedicando una particolare attenzione alla struttura modulare dei poemi omerici nonché alle opere di Esiodo e alle commedie aristofanee. Negli Stati Uniti un illustre latinista, nonché docente di lettere classiche presso l'università di Princeton, George E. Duckworth affermò a sua volta, negli anni 60, che la struttura di ogni libro e di ogni singola parte dell'*Eneide* di Virgilio era costruita a partire proprio dalla sezione aurea. Lo fece pubblicando, nel 1962, un saggio intitolato *Structural Patterns in Vergil's Aeneid. A Study in Mathematical Composition*, nel quale sosteneva che Virgilio compose l'*Eneide* sulla base della proporzionalità matematica e precisamente utilizzando, appunto quale fonte di ispirazione strutturale che lo guidò nel comporre il poema, il Phi. Come scrisse in un articolo che anticipava questa sua tesi, *Mathematical Simmetry in Vergil's Aeneid* – pubblicato nel 1960 sulla rivista *Transaction and Proceeding of the American Philological Association* – tale clamorosa scoperta gli si affacciò alla mente nel corso dell'anno accademico 1957-58, quando andava analizzando in profondità, con i suoi studenti, il poema virgiliano in quanto stava lavorando al suo *Vergil and the Poets of Augustean Rome*. Man mano giunse ad accorgersi che l'*Eneide* possedeva una simmetria di base, un'architettura strutturale di carattere matematico. Seguendo questa traccia, riuscì finalmente a comprendere che l'opera rivelava in maniera omogenea, ossia presente sia nelle unità minori e che nelle divisioni principali, il famoso rapporto numerico noto come *sezione aurea* (o *proporzione divina* o *rapporto aureo*). La notizia fu accolta, prima con stupore e poi con ammirazione, nel mondo degli studi classici. Essa appariva storicamente credibile, in quanto l'età augustea era effettivamente contrassegnata da un diffuso interesse verso la cultura, anche matematica, della grecità e si sapeva inoltre che Virgilio, oltre ad essere – con Catullo, Ovidio, Lucrezio e pochi altri – uno dei maggiori poeti della letteratura latina, in gioventù era stato anche un attento studioso sia di medicina che di matematica. Ma cosa aveva fatto, esattamente, Durkworth per giungere alle sue conclusioni circa l'assetto matematico dell'*Eneide*? Egli aveva misurato, a suo dire con molta accuratezza, la lunghezza di tutte le parti del poema, calcolando i rapporti tra di esse. Ha scritto Mario Livio, narrando questa clamorosa vicenda:

*«In particolare, egli ha contato i versi dei passaggi definiti 'maggiori', indicandone il numero con M, e dei 'minori', il cui numero di versi ha indicato con m, calcolando poi il rapporto M/m. Per l'individuazione delle parti maggiori e minori…(egli)…si è basato sul contenuto. Per esempio, in molti passaggi la parte maggiore o minore è un discorso e l'altra parte (minore o maggiore, rispettivamente) è di*

*carattere narrativo o descrittivo. La conclusione dello studioso è che il poema conterrebbe 'centinaia di rapporti di media aurea'»* (Livio, 2003, pag. 293).

Tuttavia nel 1981, quando Duckworh era morto ormai da nove anni, Roger Herz-Fischler, matematico presso la canadese università di Carleton e grande esperto della sezione aurea (è autore, per esempio, di un libro intitolato appunto *A Mathematical History of the Golden Number,* 1998), contestò i risultati cui era pervenuto Duckworth, attribuendoli a un errore di impostazione logica del suo ragionamento e, dunque, a quello che potremmo definire un vero e proprio equivoco matematico. Le conclusioni del ragionamento di Fischler erano che, se correttamente affrontato dal punto di vista matematico, e pur lavorando proprio sui dati a suo tempo selezionati dal latinista americano, la questione della marcata presenza della sezione aurea nel disegno costruttivo dell'*Eneide* finiva con il risultare inconsistente. In sostanza, non vi sarebbe alcun ruolo del Phi nella struttura del poema virgiliano, perché una più precisa elaborazione matematica dei dati presi in considerazione porterebbe alla chiara deduzione che i valori numerici presi in esame hanno una distribuzione del tutto casuale (o meglio, rispondente unicamente a un principio di ispirazione poetica per nulla orientato dalla sezione aurea). Poiché, a parere di Mario Livio, l'equivoco matematico nel quale cadde Duckworth non è affatto isolato, anzi è proprio quello che va ad inficiare più di una dimostrazione della presenza regolativa del rapporto aureo nei più diversi domini del sapere, ricorriamo ancora una volta alle sue parole per cercare di spiegarlo ai lettori.

*«Supponiamo che abbiate una coppia qualunque di interi positivi m e M, con M maggiore di m. Per esempio, sia M=317 il numero di pagine dell'ultimo libro che avete letto e m=160 il vostro peso in libbre. (…) Possiamo rappresentare i due numeri su una linea, divisa in due segmenti di lunghezza proporzionali alla grandezza dei numeri citati. (…) Il rapporto tra la parte corta e quella lunga è m/M cioè 160/317=O,504, mentre il rapporto della parte lunga rispetto al totale, M/(M+m) è 317/477=0,665. Avete forse notato che M/(M+m) e più vicino a Phi di m/M. Si può dimostrare matematicamente che ciò si verifica sempre (provate col vero numero di pagine del libro che avete letto e col vostro vero peso). Sappiamo che per la definizione di 'rapporto aureo', se una linea è divisa secondo tale rapporto allora m/M è esattamente uguale a M/(M+m). Perciò si può essere tentati di pensare che esaminando una serie di rapporti numerici – per esempio i rapporti di lunghezza dei brani letterari – non abbia importanza prendere in esame il rapporto della parte minore con la maggiore o della parte maggiore col tutto. Tuttavia quello che si è appena dimostrato è che, invece, è importante. Ansioso di dimostrare che φ si nasconde nel rapporto tra il peso di un lettore e il numero delle pagine dei libri che legge, un appassionato del rapporto aureo può avvicinarsi a tale risultato presentando i dati nella forma M/(M+m), sbilanciata a favore di φ. Ed è precisamente quello che ha fatto Duckworth»* (Livio, 2003, pag. 81-83).

Ed è precisamente quello che a Duckworth ha contestato Roger Herz-Fischler ed è quello che alla fine pare aver convinto la comunità scientifica internazionale ad archiviare come non fondata – però, chissà: la ricerca scientifica cela sempre svolte e ritorni sorprendenti – la teoria sulla centralità della sezione aurea nella strutturazione dell'*Eneide* sostenuta da George Eckel Duckworth. Tale conclusione, alquanto amara per la fama postuma del profondo estimatore e conoscitore di Virgilio – e il cui valore filologico e critico, rispetto al mondo della Roma classica e soprattutto augustea, crediamo tuttavia debba restare intatto – non ha peraltro fatto da freno al continuare a cercare, un po' ovunque nel mondo letterario e nel caso specifico in Virgilio, il principio regolativo della sezione aurea. È del 2009, per esempio, un articolo pubblicato su Internet (www.art-litteram.com) da Mariano Grossi, che pare sia un militare con la passione della letteratura, sulla dominante presenza della sezione aurea nella VIII ecloga delle *Bucoliche* di Virgilio. Che dire? Forse, sui rapporti tra la sezione aurea e la letteratura e in particolare Virgilio, ha ragione Mario Livio, che citeremo ancora e per un'ultima volta, quando afferma:

*«Malauguratamente, le elucubrazioni sul grande mantovano e la divina proporzione continuano a trovare posto nella letteratura sul rapporto aureo… confermando, se ce ne fosse bisogno, come sia difficile guardarsi dalle insidie della 'numerologia aurea'. Tutti i tentativi (fondati e no) di svelare la presenza di Phi in varie creazioni artistiche, dalla pittura alla musica alla poesia, si basano sul presupposto che un canone di bellezza ideale esista e sia suscettibile di applicazioni pratiche. Ma la storia dell'arte insegna che a creare le opere più durature sono state semmai le personalità meno propense a tenere conto di simili criteri a priori. Nonostante l'importanza del rapporto aureo in molte branche della matematica e della scienza e in molti fenomeni naturali, la mia modesta opinione è che nell'insieme sarebbe meglio non insistere a considerarla un'immutabile norma estetica, sia della forma umana che delle forme create dall'uomo»* (Ibidem, pag. 296).

Si tratta di parole assai ragionevoli, che richiamano alla prudenza rispetto a una lettura frettolosamente numerologica – il che non significa affatto, in senso scientificamente rigoroso, matematica – di tutto ciò che accade in tutti gli universi naturali e sociali del mondo. Però non è da escludere affatto che, Virgilio a parte (ma forse compreso, chissà), questo o quel creatore di fantasie poetiche o narrative non possa avere avuto l'idea di richiamarsi a certe leggi e a certi principi della matematica per trarre ispirazione non soltanto tematica ma persino strutturalmente architettonica rispetto al testo che stava progettando e poi scrivendo. In fondo, nel Novecento, l'esempio dell'Oulipo è stato, da questo punto di vista, fondamentale e istruttivo: vari scrittori hanno scelto di vincolare il proprio costruire e scrivere i propri testi poetici o narrativi a regole matematicamente orientate, ritenendo che ciò costituisse non una costrizione impoverente, bensì un esaltante vincolo da superare, del loro intraprendere il mestiere di autori letterari. Se l'hanno fatto scrittori, narratori e poeti, del Novecento, perché non poteva farlo Virgilio (e prima di lui Omero e dopo di lui Dante)? Allora la questione diventa davvero, puramente e semplicemente, di essere estremamente rigorosi nell'analizzare, ossia nel «leggere» criticamente, i testi dei nostri grandi scrittori: tenendo conto della matematica – cosa che generalmente non si fa e che Duckworth ebbe il merito di fare – però non applicandola, pur di far tornare seppure in buona fede, i conti – come pare che Duckwoth abbia fatto – in maniera matematicamente scorretta.

## 5. Conclusioni

Giunti al termine del nostro articolo, dedicato ai rapporti tra Fibonacci (e la sua geometria e la sua successione) e la letteratura, ci accorgiamo di aver parlato quasi unicamente – salvo l'attenzione dedicata al romanzo dantesco di Bruno D'Amore – di rapporti tra la matematica fibonacciana e la poesia. Cerchiamo di rimediare accennando, in queste Conclusioni, a un altro romanzo, recentemente da noi letto con grande piacere. Non si tratta dell'anche troppo celebre *Il codice Da Vinci* del facitore di best sellers Dan Brown, ove i numeri e la successione di Fibonacci, nonché la sezione aurea, sono abbondantemente e alquanto stucchevolmente rammentati. È un tipo di letteratura che non amiamo e di cui non parliamo molto volentieri. Si tratta invece dell'ultimo romanzo di una brava narratrice americana, Lily Tuck, che ha scritto tra le altre cose anche una bella biografia di Elsa Morante intitolata *Woman of Rome. A Life of Elsa Morante* (2008). Il romanzo di cui stiamo parlando si intitola invece *I Married You for Happiness*, pubblicato nel 2011 e uscito in Italia, con il titolo *E ti ho sposato*, l'anno successivo. Narra la storia di un amore, di un matrimonio, di un lutto: quelli d'una donna di nome Nina nei confronti dell'uomo che ha amato, sposato, visto morire, un matematico di nome Philip. Essendo uno dei due personaggi principali della vicenda appunto un matematico, è logico che nel libro si parli spesso di matematica (successione di Fibonacci compresa) e, in verità, con molta intelligenza e gradevolezza. Ci sentiamo perciò di consigliarlo ai lettori di questa rivista.

## Bibliografia


D'Amore B. (2011). *Dante e la matematica.* Firenze: Giunti.

Dionisotti C. (1967) *Geografia e storia della letteratura italiana.* Torino: Einaudi.

Gardner M. (1981). *Circo matematico: una nuova serie di enigmi e giochi matematici*. Firenze: Sansoni.

Livio M. (2003). *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni.* Milano: Rizzoli.

Pötters W. (1987). *Chi era Laura? Strutture linguistiche e matematiche del Canzoniere di Francesco Petrarca.* Bologna: Il Mulino.

Pötters W. (1998). *Nascita del sonetto. Metrica e matematica al tempo di Federico II.* Ravenna: Longo.

Tuck L. (2012). *E ti ho sposato.* Torino: Bollati Boringhieri.

# 1. Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo[1]

Silvia Sbaragli[2], George Santi[3]

In this research, we highlight that pupil's misconceptions about the concept of angle, extensively treated in literature, depend also on the didactic choices made by the teachers in didactic transposition of knowledge and in the educational design. It is often driven by unique and binding choices which do not take into account that mathematical objects usually have various definitions elaborated in the history of mathematics. Mathematical objects are usually imposed by the teacher, instead of being the result of mediation and negotiation within a community of practices, with the aim of reaching a shared knowledge by the pupils. Another important cause of difficulty, on which this research specifically concentrates, consists in the incoherencies in the intentionality of the teachers deriving from a limited and unaware use of the semiotic means of objectification with respect to the conceptual and cultural aspect of the knowledge they want pupils to reach.

## 1. Introduzione

Un termine molto usato da decenni nella ricerca in Didattica della matematica è la parola «misconcezione»; tale parola viene interpretata in modi diversi dai vari Autori ma assume nella maggior parte dei casi semplicemente connotati negativi, come sinonimo di «errore», «giudizio erroneo», «idea sbagliata», ma anche «equivoco» o «malinteso». Per questa ragione le misconcezioni vengono spesso citate quando si fa riferimento alla didattica relativa agli errori.

Molti Autori concordano sul fatto che i primi usi di questo termine, nel senso di «errore» o di «malinteso», si sono avuti nel dominio della Fisica o dell'Economia. Si fa riferimento di solito a lavori di Di Sessa (1983); di Kahneman e Tversky (a partire dal 1982) riguardo ai processi decisionali; di Voss et al. (1989).

Una delle prime apparizioni documentate del termine «misconception» in Matematica avviene in USA nel 1981, ad opera di Wagner (1981), in un lavoro che tratta dell'apprendimento di equazioni e funzioni; sempre nel 1981 esce un celebre testo di Kieran (1981) sull'attività di risoluzione delle equazioni. Appaiono poi numerosi lavori nel 1985 nei quali il termine «misconcezione» è esplicito: Schoenfeld (1985), Shaughnessy (1985) e Silver (1985), che lo usano per lo più a proposito di *problem solving,* insieme al termine «convinzioni». In Silver (1985, pp. 255-256) è detto esplicitamente che vi è un forte legame tra le misconcezioni e le convinzioni errate. In Schoenfeld (1985, p. 368) si evidenzia come gli studenti possano sviluppare in modo corretto delle concezioni scorrette, soprattutto per quanto riguarda procedure.

1. Il presente articolo è una sintesi del seguente pubblicato in lingua inglese: Sbaragli S., Santi G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education*. Rivista online: http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/article/view/194/196 San Paolo, Brasile: Uniban. 4 2, 117-157.
2. DFA-SUPSI, Locarno - NRD, Bologna.
3. NRD, Bologna.

Come si vede bene, nella prima metà degli anni '80 ci fu un intenso lavoro degli studiosi di Didattica della matematica su questo tema.

In seguito diversi Autori hanno preso in esame in maniera critica il sostantivo misconcezione, per esempio nell'ambito della Scuola Francese; in una lettera privata che ci ha gentilmente autorizzato a rendere pubblica, Colette Laborde dichiara: *«Il termine misconcezione che ha origine negli Stati Uniti potrebbe non essere il termine più appropriato se ci si riferisce alla conoscenza degli studenti 'non corretta' (…). Ogni concezione ha un suo dominio di validità e funziona per quel preciso dominio. Se questo non avviene, la concezione non sopravvive. Ogni concezione è in parte corretta e in parte non corretta. Quindi sembrerebbe più conveniente parlare di concezioni rispetto ad un dominio di validità e cercare di stabilire a che dominio queste appartengono»* (riportato in D'Amore, Sbaragli, 2005, p. 12).

Tenuto conto delle posizioni dei diversi Autori e delle occorrenze a volte anche piuttosto diverse di questo termine, riteniamo che l'attenzione sulle misconcezioni, fin dal loro apparire nel mondo delle scienze (non matematiche), sia stato molto produttivo perché ha costretto gli studiosi a non identificare più gli errori con qualche cosa di assolutamente negativo, da evitare a tutti i costi, ma anche a prodotti umani dovuti a situazioni in via di evoluzione. Sempre più, negli anni, si è venuto a delineare un significato condiviso di «misconcezioni» come cause di errori o meglio ancora cause *sensate* di errori, cause che sono spesso ben motivabili e a volte addirittura convincenti (D'Amore, Sbaragli, 2005, p. 12).

Un altro approccio possibile, non lontano dalla posizione di Laborde e da noi scelto, è quello di conservare tale termine ma di analizzarlo in modo più costruttivo, fornendogli un'interpretazione più elaborata e meno negativa che tenga conto dell'attuale ricerca in Didattica della matematica e che permetta di indagare più in profondità le cause del mancato apprendimento. Da questo punto di vista, inizialmente in D'Amore (1999, p. 124) e successivamente in D'Amore e Sbaragli (2005, p. 19) si parla di misconcezione non come situazioni del tutto o certamente negative, ma anche come possibili momenti di passaggio, in corso di sistemazione, a volte necessari per la costruzione di un concetto.

Le misconcezioni così intese sono state da noi distinte in due grandi categorie: *inevitabili* ed *evitabili* (Sbaragli, 2005, p. 56 e succ.). Le prime misconcezioni sono quelle che non dipendono direttamente dalla trasposizione didattica effettuata dal docente né dall'ingegneria didattica, ma dalla necessità di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto; sapere, che non potrà mai essere esaustivo di ciò che si sta proponendo anche a causa delle caratteristiche ontogenetiche legate all'allievo. Le seconde misconcezioni dipendono proprio dalle scelte che l'insegnante fa per effettuare la trasposizione didattica e scelte concernenti l'ingegneria didattica che possono condizionare negativamente la formazione degli allievi.

In questo articolo focalizziamo la nostra attenzione sulle «misconcezioni evitabili», analizzate in una cornice «semiotico-culturale» (Radford, 2006), considerando l'«intenzionalità» dell'insegnante come una possibile causa di tali misconcezioni relative all'argomento angolo.

## 2. Quadro teorico

### 2.1. Approccio semiotico-culturale

Facciamo riferimento all'approccio semiotico culturale proposto da Luis Radford a partire dagli anni 2000 che attribuisce un ruolo centrale alla semiotica inserita in una visione antropologica del pensiero, degli oggetti matematici e dell'apprendimento. Sia gli oggetti matematici che l'apprendimento richiedono un'attività riflessiva mediata, ma i due processi sono profondamente diversi l'uno dall'altro; infatti, scrive Radford: *«Mentre i nuovi concetti culturali nascono da attività riflessive mediate compartite nella zona di sviluppo prossimale della cultura, l'apprendimento scolastico consiste nel processo di trasformare attivamente e creativamente questi concetti culturali incarnati nei testi, negli artefatti, nel linguaggio e nelle credenze in oggetti di coscienza. Questo processo nel quale soggetto e oggetto si modificano a vicenda, è il processo di significazione in cui la conoscenza soggettiva e quella oggettiva si fondono»* (Radford, 2006, p. 60).

Radford chiama questo processo, che porta l'allievo a prendere coscienza dell'oggetto matematico, «oggettivazione» (Radford, 2005a, p. 116). Riferendosi alla fenomenologia di Edmund Husserl (1913-1959), Radford (2006) associa l'oggettivazione, intesa come attribuzione di significato, a un «atto intenzionale» che mette in relazione il soggetto con l'oggetto di conoscenza e fornisce un particolare intendimento di tale oggetto. Quando consideriamo la conoscenza scientifica, in particolare la matematica, si pone il problema della natura interpersonale e generale degli oggetti matematici che non si lascia catturare dal significato soggettivo e situato che caratterizza gli atti intenzionali. In «Idee per una fenomenologia pura e una filosofia fenomenologica», Husserl risolve il problema distinguendo tra l'atto intenzionale che determina il modo in cui l'oggetto si presenta alla coscienza (noesis) e il contenuto concettuale dell'esperienza individuale (noema). A ciascuna esperienza intenzionale del soggetto, noesis, corrisponde un particolare significato concettuale, il noema (Husserl, 1965).

La fenomenologia di Husserl, da intendersi come un'epistemologia e non come un'ontologia, attribuisce centralità al ruolo del soggetto, ma presuppone da un lato l'esistenza di un oggetto trascendente che assicura coerenza e unità ai diversi atti intenzionali dell'individuo e dall'altro relega l'esperienza intenzionale a una relazione che coinvolge esclusivamente il soggetto e l'oggetto.

Osserva Merleau-Ponty (2003, p. 219) commentando Husserl: *«'Idee II' mette in luce, sotto la 'cosa materiale oggettiva', una rete di implicazioni dove non si sente più la pulsazione della coscienza costituente. Tra i movimenti del mio corpo e le 'proprietà' della cosa che questi movimenti rivelano, il rapporto è quello fra l' 'io posso' e le meraviglie che esso ha il potere di suscitare. (…). Nel corpo, e per mezzo suo, non c'è solo un rapporto a senso unico di colui che sente con ciò che egli sente: il rapporto si inverte, la mano toccata diventa toccante, ed io sono obbligato a dire che in questo caso il tatto è diffuso nel corpo, che il corpo è 'cosa senziente, soggetto-oggetto'».*

Secondo l'approccio semiotico-culturale che stiamo seguendo, non possiamo ridurre la nostra esperienza individuale a una solitaria interazione sensoriale e cognitiva con il mondo, ma il modo in cui entriamo intenzionalmente in contatto con la realtà è intrinsecamente determinato da fattori storici e culturali. I mediatori, gli artefatti, i gesti, i simboli, le parole che Radford chiama «mezzi semiotici di oggettivazione» (Radford, 2003) non sono dei semplici arnesi con i quali manipoliamo il mondo ma mediatori dei nostri atti intenzionali, portatori di una conoscenza storica costruita dall'attività cognitiva delle generazioni precedenti. Tali mezzi determinano e costituiscono le pratiche socialmente condivise nelle quali si sviluppano i processi di oggettivazione: *«Quello che ci appare di fronte nella nostra esperienza intenzionale è dunque sempre delimitato dalla storia culturale dei mezzi che utilizziamo per apprenderlo. Nella trattazione di Husserl dunque manca il riconoscimento di un fatto essenziale, vale a dire che nel dare significato a qualcosa ricorriamo al linguaggio, ai gesti, ai segni o ad oggetti concreti attraverso i quali rendiamo le nostre intenzioni manifeste e che il linguaggio, i segni e gli oggetti trasmettono una intelligenza incarnata (Pea, 1993) e portano dentro di sè, in un forma condensata, l'esperienza che si è sviluppata nella storia dell'attività cognitiva e artistica e gli standard scientifici dell'indagine (Lektorsky, 1984)»* (Radford, 2006, p. 52).

Allievi e insegnanti si trovano immersi in un contesto sociale e culturale in cui trovano oggetti che rientrano nella loro cultura. L'insegnante ha istituzionalmente il compito di guidare l'allievo nel processo di oggettivazione, affidandosi ai mezzi semiotici di oggettivazione e ai modi culturali di significazione che la storia e la cultura gli mettono a disposizione.

È utile alla nostra analisi tenere conto del fatto che, seguendo Godino e Batanero (1994) e D'Amore e Godino (2006), agli elementi appena richiamati è possibile attribuire una dimensione personale e istituzionale. Il sistema di pratiche coinvolge sia un singolo individuo sia un gruppo di individui istituzionalmente riconosciuto, nello specifico la classe; lo stesso si può dire per l'oggetto matematico che esiste sia in una relazione personale con un soggetto sia in una relazione istituzionale con la cultura dalla quale è emerso e con il gruppo sociale che gli conferisce un valore di conoscenza. Lo stesso punto di vista è sostenuto da Radford: *«Vorrei porre l'accento sul fatto che è vantaggioso pensare al significato come un costrutto a due facce, come due facce della stessa medaglia. Da un lato il significato è un costrutto soggettivo: è il contenuto soggettivo come è inteso dalle intenzioni dell'individuo. Il significato è legato all'esperienza e alla storia personale più intima dell'individuo; esprime ciò che rende l'individuo unico e singolare. Dall'altro lato e allo stesso tempo il significato è anche un costrutto culturale nel senso che, prima dell'esperienza soggettiva, all'oggetto intenzionale dell'individuo (l'objet visé) sono stati attribuiti valori culturali e un contenuto teorico che sono riflessi e rifratti dai mezzi semiotici utilizzati per riconoscerlo»* (Radford, 2006, p. 53).

L'apprendimento come processo di oggettivazione richiede un allineamento tra la dimensione personale e intenzionale dell'allievo e quella istituzionale che coinvolge gli aspetti storici e culturali. I processi di insegnamento-apprendimento comportano una dialettica tra gli aspetti personali e quelli istituzionali portando all'unificazione delle due dimensioni verso un significato unitario.

La costruzione di tale significato, in cui si realizza l'unità dell'individuo con la propria cultura, è possibile attraverso i mezzi semiotici di oggettivazione che conducono l'atto intenzionale dell'individuo verso l'oggetto matematico. Tali mezzi semiotici hanno quindi ragione di esistere in quanto al servizio dell'intenzione dell'individuo e, al contempo, permettono di incarnare la conoscenza e modi di razionalità costruiti storicamente dalle generazioni precedenti, contribuendo alla creazione di uno spazio di significato condiviso che realizza l'unità tra persona e cultura, tra significato personale e significato istituzionale, tra l'intenzione individuale e l'oggetto a cui l'intenzione è rivolta.

È necessario, dunque, considerare la rete complessa di pratiche individuali e sociali, di significati, consuetudini, credenze e convinzioni in cui l'insegnante deve quotidianamente orientarsi quando attiva i mediatori per favorire l'apprendimento del sapere matematico da parte dei suoi allievi; si tratta di una rete dalla quale possono emergere comportamenti incoerenti dell'insegnante.

È in quest'ottica che si possono interpretare le misconcezioni evitabili all'interno della prospettiva semiotica culturale. In effetti, tali misconcezioni dipendono direttamente dalle scelte degli insegnanti legate alla trasposizione didattica e all'ingegneria didattica; due fattori che, alla luce della cornice semiotica culturale, risultano determinanti per allineare il significato personale dell'allievo e quello culturale, quando l'insegnante gestisce le pratiche d'aula.

Vogliamo quindi valutare se l'insegnante riesce a unificare il suo significato personale e quello culturale utilizzando in modo appropriato i mezzi semiotici di oggettivazione, ossia se gli atti intenzionali dell'insegnante e il significato oggettivato dai mezzi semiotici risultano coerenti con il significato culturale dell'oggetto angolo che propone in classe. L'esistenza di incoerenza da questo punto di vista può creare negli allievi misconcezioni (della categoria evitabili); misconcezioni che, da un punto di vista semiotico, comportano l'incapacità da parte dell'allievo di coordinare adeguatamente le diverse rappresentazione quando egli cerca di dare senso all'oggetto matematico.

## 2.2. L'oggetto matematico angolo

In questo lavoro si è scelto di concentrare l'attenzione sull'argomento «angolo», analizzando alcune ricerche presenti in ambito internazionale. Vanno ricordati i numerosi articoli di Mitchelmore su questo tema, tra i quali Mitchelmore e White (2000) che propongono una teoria nella quale l'evoluzione della concettualizzazione dell'angolo viene presentata tramite tre livelli di astrazione sequenziali: gli allievi iniziano da esperienze fisiche relative all'angolo classificandole in specifiche situazioni, per poi passare a contesti sempre più generali, fino a raggiungere domini astratti che si ottengono dalle diverse elementari concezioni matematiche che hanno gli studenti dell'angolo. Gli Autori mettono in evidenza in questi passaggi le difficoltà a coordinare differenti aspetti di tale concetto. Secondo questa teoria è importante che la definizione formale di un concetto matematico catturi l'essenza delle elementari concezioni matematiche dalle quali essa si è astratta. Viene inoltre presentata una ricerca condotta su 192 allievi tra i 7 e i 14 anni per analizzare come loro usano il concetto di angolo per modellizzare 9 situazioni fisiche e per esprimere similarità tra queste.

Un'applicazione di tale teoria si trova in Prescott, Mitchelmore e White (2002) dove, a partire dai dati forniti da un gruppo di 12 insegnanti coinvolti in una ricerca pilota, viene mostrato come un'unità didattica che utilizza il paradigma di insegnamento per astrazione proposto in Mitchelmore e White (2000) e citato in precedenza, porta a buon apprendimento. Nell'articolo vengono anche mostrate aree per un miglioramento ulteriore dell'unità didattica. Sempre degli stessi Autori ricordiamo i lavori di ricerca: Mitchelmore (1997) e Mitchelmore e White (1998) che hanno confermato che i bambini si formano diverse situazioni concettuali di angolo fin dall'inizio della scuola quindi indipendentemente dall'insegnamento ricevuto.

D'Amore e Marazzani (2008) mostrano *come, nel corso dei millenni, la matematica ha elaborato varie definizioni dell'oggetto angolo. Alcune di esse sono profondamente diverse tra loro. Anche se nelle aule italiane ne domina attualmente una, non è detto che sia l'unica esatta (in altri Paesi, ne sono diffuse altre). Si è dimostrato che, spontaneamente, giovani allievi preferiscono fare ricorso a una delle altre, anche se non sono state usate o richiamate in aula. In particolare, vengono presentate 8 diverse definizioni di angolo e si mostra come, in colloqui individuali, studenti di diverse età, prima e dopo la presentazione di una di esse in aula, facciano spontaneamente riferimento ad altre.*

Risulta evidente dalla letteratura di ricerca la complessità della costruzione cognitiva dell'oggetto matematico angolo da parte degli studenti. In tal senso, Foxman e Ruddock (1983) e Mitchelmore e White (1998) mettono in evidenza come gli studenti, che dovrebbero già aver concettualizzato l'oggetto matematico angolo, non riescono a incorporare la rotazione come modo di considerare tale concetto. In quest'ultimo articolo vengono citate altre ricerche che confermano questo aspetto. Inoltre, Mitchelmore (1998) dimostra che circa 1/3 di studenti di prima media sottoposti alla ricerca hanno un dominio di applicazione di questo concetto piuttosto limitato non riuscendo a riconoscere similarità tra diversi aspetti che coinvolgono l'angolo.

Vadcard (2002) propone come significativa la nozione di angolo come inclinazione, pur essendo un'interpretazione molto trascurata nella ricerca in didattica e nell'insegnamento. La motivazione di tale scelta verte sull'importanza storica di questa definizione, utilizzata da Euclide nel I libro degli *Elementi*, e sull'applicazione di tale definizione usata ad esempio dai topografi. Nell'articolo vengono inoltre analizzati i libri di testo per identificare le pratiche attraverso le quali gli studenti costruiscono le nozioni di angolo.

Sono inoltre numerosi i lavori che riportano una rassegna sulle diverse definizioni di angolo presenti nella storia della matematica; ricordiamo in particolare D'Amore (1985) dove ne vengono mostrate 8 che vanno dall'interpretazione scelta da Euclide (-300) a quella di Hilbert del XX secolo; Mitchelmore (1989), Roels (1985) e Schweiger (1986) classificano le diverse definizioni di tale concetto dal punto di vista matematico, concentrandosi più che altro su tre particolari classi di definizioni ritenute più ricorrenti: angolo come rotazione di una semiretta rispetto ad un'altra attorno a un punto comune; angolo come due semirette con un'origine in comune e angolo come regione formata dall'intersezione di due semipiani.

Strehl (1983) propone un'analisi delle diverse definizioni di angolo utilizzate nei libri scolastici; analogamente Lo, Gaddis e Henderson (1996) riportano un'analisi dei testi previsti per insegnanti di scuola elementare in formazione usati in US.

Kaiser (2005) mette in evidenza le analogie che intercorrono tra le convinzioni degli allievi di prima media riferite allo sviluppo della nozione di angolo con le diverse convinzioni di grandi matematici del passato. In particolare, nell'articolo vengono confrontate le discussioni avvenute tra gli studenti sul tema angolo, posti in situazioni di insegnamento che favorivano la comunicazione, con le convinzioni e i dibattiti rintracciabili nella storia della matematica nel trattare questo argomento.

## 3. Le motivazioni di ricerca

La scelta in ambito scolastico di un argomento da proporre porta ad una terna che sempre viene esaminata quando si discute di trasposizione didattica:

– il Sapere (l'angolo, nelle sue diverse accezioni) da un punto di vista matematico;
– quel sapere che viene scelto in aula dall'insegnante come sapere da insegnare;
– quel sapere personale che ciascun allievo possiede e che scaturisce dalla propria esperienza; un sapere sul quale è necessario fondare ogni studio relativo alla trasposizione didattica.

A volte, i saperi in gioco possono essere addirittura contrastanti, per esempio quando ingenuamente l'insegnante crede che vi sia una sola concettualizzazione possibile dell'oggetto matematico e, di conseguenza, una sola definizione, quella in suo possesso.

Come è emerso nelle ricerche presentate nel quadro teorico, può avvenire che la definizione proposta istituzionalmente in aula contrasti con l'immagine intuitiva che lo studente si è già costruito, grazie ai contesti d'uso esterni alla scuola. Nel proporre una definizione, occorre dunque vagliare bene le difficoltà che avrà lo studente a cancellare o a superare la propria immagine intuiva, forse già costituitasi in modello, e sostituirla con quella proposta dall'insegnante. Se è vero che la definizione di un oggetto matematico dovrebbe essere il risultato di mediazioni e negoziazioni all'interno di una comunità di pratiche, occorre allora che ciascuno dei componenti la comunità porti il suo contributo personale, secondo le proprie convinzioni, negoziando i saperi nella microsocietà classe e giungendo, auspicabilmente, ad un sapere condiviso.

In questa ricerca vogliamo dimostrare che le scelte relative alle definizioni degli oggetti matematici e alle rappresentazioni semiotiche attraverso le quali vengono mostrati, non vedono coinvolti gli allievi che devono disambiguare la rappresentazione loro proposta nella prassi didattica e oggettivare l'oggetto, ma solo coloro che tentano una trasposizione. Ipotizziamo che si tratta solo di una mediazione fatta dall'insegnante che vuole condurre i propri allievi verso quel sapere condiviso dagli adulti, dagli insegnanti, dai matematici, appartenenti ad una determinata cultura, mentre il soggetto in fase di apprendimento è tenuto a debita distanza da tali negoziazioni. Inoltre, vogliamo verificare se la definizione scelta dall'insegnante per far apprendere ai propri allievi il concetto di angolo è univoca e se risulta addirittura in contrasto con le scelte semiotiche effettuate dall'insegnante per presentare tale argomento. Ipotizziamo inoltre che tali scelte semiotiche risultino limitate e stereotipate. Questi aspetti, scelta univoca della definizione e delle proposte semiotiche, mancanza di negoziazione da parte degli allievi e incoerenza nell'intenzionalità dell'insegnante tra aspetto concettuale e proposte semiotiche, possono essere alcune delle cause delle difficoltà degli allievi, emerse in numerose ricerche, nel gestire il concetto di angolo.

Nello specifico, le domande di ricerca che ci siamo posti sono le seguenti:

**D1** Nella trasposizione didattica dell'oggetto angolo gli insegnanti hanno in mente un'unica definizione da proporre agli studenti o ipotizzano di lavorare sulle diverse interpretazioni di tale concetto che emergono dagli allievi e che sono presenti nella storia della matematica?

**D2** Da parte degli insegnanti che vogliono proporre ai propri allievi una determinata definizione di angolo, c'è coerenza tra i mezzi semiotici di oggettivazione scelti per presentare tale concetto e la definizione alla quale si vuole giungere?

**D3** Le proposte semiotiche fornite dagli insegnanti per presentare l'argomento angolo risultano varie, oppure stereotipate e limitate?

## 4. Ipotesi di ricerca

**I1** A nostro parere, nell'effettuare la trasposizione didattica dell'oggetto angolo la maggior parte degli insegnanti propone ai propri allievi un'unica definizione, la più diffusa nei libri di testo, senza negoziare con gli allievi le proprie convinzioni.

**I2** A nostro parere non sempre c'è coerenza da parte dell'insegnante tra i mezzi semiotici di oggettivazione proposti in classe agli allievi per far apprendere l'angolo e la definizione verso la quale intende indirizzarli. A volte, in effetti, possono subentrare consuetudini e stereotipi nelle scelte semiotiche, mancanza di analisi critica e di riflessione personale sulla situazione da proporre in classe che possono creare questo tipo di incoerenza.

**I3** A nostro parere le proposte semiotiche relative all'oggetto angolo risultano stereotipate e limitate, derivanti in modo quasi esclusivo dalle proposte dei libri di testo.

## 5. Metodologia di ricerca

L'esempio emblematico da noi scelto è quello dell'angolo e delle sue rappresentazioni semiotiche.

La ricerca si sviluppa in due fasi: la prima si basa su colloqui effettuati a insegnanti di scuola primaria relativi al concetto di angolo e ai mezzi semiotici di oggettivazione scelti per comunicare questo sapere in classe, mentre la seconda su domande riguardanti l'aspetto concettuale dell'angolo poste ai relativi allievi di V primaria.

### Prima fase

Sono stati intervistati individualmente 20 insegnanti di scuola primaria di diverse città d'Italia ai quali sono state poste le seguenti domande grazie alle quali è nata una discussione tra l'intervistato e il ricercatore. Le prime tre domande sono volutamente vaghe e ampie per introdurre l'argomento, far emergere le convinzioni degli insegnanti e il loro modo di lavorare in classe, dal quale far scaturire in seguito importanti informazioni per questa ricerca.

1) Che cosa vorresti che i tuoi allievi sapessero relativamente all’angolo?
2) Da dove parti per far raggiungere questo apprendimento?
3) Che cosa proponi agli allievi su questo tema?
4) Hai in mente un’unica definizione di angolo da proporre ai tuoi allievi oppure diverse?
5) Che rappresentazione scegli per parlare di angolo in classe?
6) Perché scegli questa rappresentazione?
7) Fornisci anche altre rappresentazioni dell’angolo?

**Seconda fase**

In seguito sono stati intervistati individualmente 8 allievi di V primaria per ciascuna classe dei 20 insegnanti sottoposti alla ricerca, per un totale di 160, che sono stati scelti a sorteggio. A questi allievi è stato chiesto tramite intervista: Siamo in geometria… che cos’è per te un angolo? Da questa domanda si partiva per capire più in profondità le convinzioni degli allievi sull’angolo.

Durante le interviste agli insegnanti e agli allievi si mettevano a disposizione un foglio e una penna in caso di richiesta esplicita. Le interviste sono state registrate.

## 6. Risultati di ricerca

### 6.1. Prima fase. Gli insegnanti

Riportiamo di seguito le risposte ottenute alle sette principali domande poste ai 20 insegnanti intervistati.

**Domanda 1, 2, 3 e 4**

Alla prima domanda, 14 insegnanti rispondono elencando finalità utilitaristiche intrinseche alla matematica, allo scopo di saper gestire le tipiche richieste scolastiche su questo tema, come sapere riconoscere i vari tipi di angolo: acuto, retto, piatto, ottuso, giro, …, sapere misurare l’ampiezza di un angolo con il goniometro, saper risolvere problemi con gli angoli, saper fare i confronti delle ampiezze degli angoli, … Solo 4 di questi insegnanti fanno riferimento esplicito alla realtà esterna alla scuola: «Vorrei che i miei allievi riuscissero a risolvere i problemi che coinvolgono gli angoli anche quando saranno fuori dalla scuola»; per gli altri, l’apprendimento del concetto di angolo sembra esclusivamente interno alla scuola, legato al successo scolastico, senza legami con la realtà esterna. Gli altri 6 insegnanti rispondono con finalità più concettuali, ribadendo l’importanza di acquisire il significato di angolo in geometria.

Per introdurre il concetto di angolo, la totalità degli insegnanti afferma di fare riferimento all’ambiente che circonda i bambini, per far vivere le esperienze agli allievi in prima persona con il corpo, facendo toccare con mano e ricercare angoli prevalentemente retti, per poi fare i confronti con altri tipi di angoli. Solo 2 insegnanti dichiarano di iniziare l’apprendimento dell’angolo dalle convinzioni degli allievi, ma subito dopo affermano che successivamente dicono che cos’è un angolo in matematica, senza negoziare ulteriormente con gli allievi il significato di tale oggetto matematico; in sostanza, più che lavorare sulle convinzioni degli allievi viene fatta semplicemente un'indagine di ciò che pensano.

Tutti gli insegnanti intervistati dichiarano di avere in mente un'unica definizione di angolo alla quale far giungere i propri allievi. Nessuno ipotizza di fornire agli allievi diverse definizioni di angolo o di lavorare sulle definizioni proposte dagli allievi. Per proporre la definizione scelta, gli insegnanti dichiarano di mostrare ai propri allievi diverse classiche situazioni presenti nei libri di testo e di fornire la definizione che vogliono far apprendere, senza accettare di negoziare con gli allievi interpretazioni diverse. Dalle affermazioni degli insegnanti emerge che la definizione dell'angolo proposta in classe dagli insegnanti non è il risultato di mediazioni e negoziazioni all'interno della microsocietà classe per giungere a un sapere condiviso, ma imposto dall'insegnante.

In particolare,

– 14 insegnanti su 20 dichiarano che scelgono come definizione di angolo da proporre ai propri allievi: «La parte di piano compresa tra due semirette con un'origine in comune». Tale definizione è sicuramente la più ricorrente in Italia tra gli insegnanti di scuola di base e di conseguenza tra gli studenti; la sua origine è incerta e appare a partire dal XVII secolo in Europa.

3 dei 14 insegnanti dimenticano di parlare di origine in comune delle due semirette, ma dai gesti si intuisce che stanno facendo questa scelta concettuale senza saperla esplicitare in modo corretto, inoltre 4 dei 14 insegnanti dichiarano che la parte di piano è illimitata. È evidente che in questa situazione, l'aggettivo «illimitata» è pleonastico dato che si riferisce ad una parte di piano «aperta», ma dall'intervista successiva si rivela che ben 5 degli insegnanti che non lo esplicitano non hanno consapevolezza dell'illimitatezza della parte di piano implicita nella definizione scelta, dato che come vedremo in seguito, pensano all'angolo come a una parte di piano limitata, localizzata in corrispondenza dell'origine dell'angolo.

Gli altri 6 insegnanti fanno invece le seguenti scelte:

– 1 parla di inclinazione di due rette [scelta che ricorda Euclide, ¯III secolo o Proclo (412-486)];

– 1 considera l'angolo come cambio di direzione di due rette [scelta che ricorda Eudemo di Pergamo (attivo nel ¯225)];

– 1 parla di due semirette con un'origine in comune [impostazione che ricorda Hilbert (1899)];

– 1 di ampiezza di due semirette [facendo quindi una scelta esclusivamente metrica; una scelta metrica è presente in Carpo di Antiochia (II sec.) che definisce l'angolo la distanza delle linee (…) che lo comprendono];

– 2 parlano di rotazione di due semirette con un'origine in comune una sull'altra (scelta nata fin dal XVIII-XIX sec. e sviluppatasi in Gran Bretagna).

[Per un approfondimento delle diverse definizioni di angolo nella storia, ci siamo serviti di D'Amore (1985)].

**Domanda 5**

A questa domanda 12 insegnanti rispondono che per rappresentare l'angolo usano un «archetto» vicino all'origine dell'angolo che limita una parte di piano; 10 di questi insegnanti chiedono di poterlo disegnare per mostrarcelo meglio.

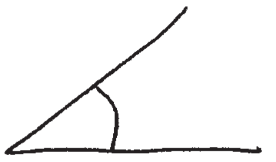


Figura 1. Schizzo a mano libera di un insegnante.

Tale rappresentazione non è univoca nei libri di testo italiani di ogni livello scolastico dato che a volte l'angolo viene raffigurato punteggiato fino ad un immaginario archetto o sfumato esaltando l'illimitatezza della parte di piano, o indicato con un asterisco, …, ma dalla maggioranza degli insegnanti intervistati la rappresentazione per mezzo di un archetto è considerata «la» rappresentazione per eccellenza, quella che rispecchia meglio delle altre l'angolo, senza una motivazione concettuale, ma più che altro di convenzione e abitudine.

Gli altri 8 insegnanti in 3 casi colorano una parte di piano limitata fino a un archetto, rientrando in qualche modo nella stessa scelta degli altri insegnanti e gli altri 5 colorano la parte di piano mostrandone l'illimitatezza.

La motivazione del mezzo semiotico di oggettivazione scelto non verte sul volere mettere maggiormente in risalto alcune proprietà della definizione dichiarata nelle domande precedenti; anzi, in alcuni casi, è la rappresentazione grafica convenzionale stessa che fa perdere il senso della definizione che si vuole far apprendere ai propri allievi, che può essere riletta anch'essa come mezzo semiotico di oggettivazione. Ossia si evidenzia, in 17 insegnanti su 20, incoerenza tra l'intenzione esplicitata dal punto di vista istituzionale e il mezzo semiotico di oggettivazione scelto per parlare del concetto in oggetto.

**Incoerenza**

Analizziamo più in profondità questa incoerenza tra l'intenzione di ciò che si vuole far raggiungere concettualmente in classe e il mezzo semiotico di oggettivazione scelto per comunicare, prendendo in considerazioni le diverse definizioni scelte dagli insegnanti per parlare di angolo.

*Parte di piano.* Dei 14 insegnanti che dichiarano che l'angolo è la parte di piano compresa tra le due semirette con l'origine in comune, 9 scelgono come mezzo semiotico per parlarne l'archetto, 3 scelgono la parte di piano colorata fino all'archetto e 2 puntano l'attenzione sull'illimitatezza della parte di piano.

I 12 insegnanti che scelgono di indicare l'archetto o di colorare la parte di piano fino all'archetto danno importanza con tali mezzi semiotici grafici di oggettivazione alla limitatezza della parte di piano e non alla illimitatezza; proprietà, quest'ultima, che è invece contemplata dalla definizione scelta, dato che la parte di piano derivante dalla definizione risulta «aperta».

In seguito all'intervista, le scelte di questi 12 insegnanti sono state divise in due categorie: 5, nella *mancanza di consapevolezza sul sapere matematico in gioco* e 7, nella *mancanza di senso critico nei confronti della propria scelta*.

Riportiamo una parte di intervista dei *due tipi di incoerenza*. Iniziamo dalla *mancanza di consapevolezza sul sapere in gioco*.

Ric.: Perché hai scelto questa rappresentazione?

C.: Perché l'angolo si rappresenta così.

Ric.: In che senso si rappresenta così?

C.: Quando si vuole parlare di un angolo si disegna così:

e gli allievi sanno che parliamo di angolo.

Si nota come questa scelta appaia univoca agli occhi di quell'insegnante. Eppure, come sostiene Duval (2006, p. 598): «All'opposto di questa riduzione delle rappresentazioni semiotiche al semplice ruolo di surrogato degli oggetti matematici, o a quello di espressione di rappresentazioni mentali, noi ci fermeremo su ciò che costituisce la caratteristica fondamentale di ogni prassi matematica: la *trasformazione* di rappresentazioni semiotiche. *Perché, in matematica, una rappresentazione è interessante solo se può essere trasformata in un'altra rappresentazione.* È soltanto nella misura in cui rispondono a questa esigenza fondamentale che le rappresentazioni semiotiche possono indicare qualcosa di «reale» e di razionalmente esplorabile, cioè diventare il mezzo di accesso a oggetti altrimenti inaccessibili».

L'intervista continua nel seguente modo:

Ric.: Indica qual è l'angolo del quale stai parlando su questa figura.
(C. indica la parte di piano fino all'archetto).

Ric.: Fino a dove arriva l'angolo?

C.: Fino a qui (indica l'archetto)

Ric.: Puoi andare oltre questo archetto?

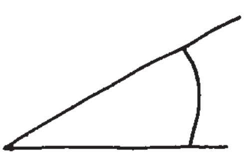
C.: No, arriva fino a qui.

Ric.: Non possiamo andare oltre l'archetto?

C.: In questo caso no.

Ric.: E in quali casi si può andare oltre?

C.: Se l'angolo è più grande.
(Disegna un altro angolo apparentemente della stessa ampiezza, con semirette e archetto più lungo).



Da questo stralcio di intervista emerge come le misconcezioni sull'angolo derivanti da rappresentazioni grafiche riscontrate classicamente in allievi e riportate in letteratura (Fischbein, Tirosh, Melamed, 1981; Foxman, Ruddock, 1984; Tsamir, Tirosh, Stavy, 1997), siano presenti in alcuni casi negli insegnanti stessi e di conseguenza trasferite ai propri allievi.

L'intervista continua nel seguente modo:

Ric.: Perché hai scelto questa rappresentazione?
C.: Perché questo è il modo di rappresentare l'angolo.
Ric.: È il modo scelto da chi?
C.: Da tutti, in tutti i libri è così.
Ric.: E ti piace questa rappresentazione?
C.: Sì, l'ho sempre fatta così, non vedo perché dovrei cambiarla.
Ric.: Che cos'è per te un angolo?
C.: È la parte di piano compresa tra due semirette che partono da uno stesso punto.
Ric.: E com'è questa parte di piano?
C.: In che senso?
Ric.: Che proprietà ha questa parte di piano?
C.: Non capisco.
Ric.: Questa parte di piano di cui parli è limitata o illimitata?
C. Guarda il suo disegno, pensa un po' e poi risponde:
C.: È limitata dalle semirette.
Ric.: E qui com'è? (Il ric. indica la parte di piano illimitata)
C.: Arriva fino a qui (indica l'archetto).
Ric.: Perché quando ti ho chiesto che cos'è un angolo non mi hai detto che arriva fino all'archetto?
C.: Perché non si dice, ma poi si fa vedere nel disegno.

L'insegnante afferma che l'angolo è limitato da due semirette il che implica che l'angolo ha una natura illimitata. Poi si riferisce «all'archetto» per giustificarne la limitatezza. Si nota come il mezzo semiotico grafico di oggettivazione sia incoerente rispetto a quello verbale esplicitato, pur essendo quest'ultimo quello che l'insegnante dichiara avrebbe voluto far apprendere ai propri allievi. Interpretando ciò dal punto di vista di Duval non c'è coordinazione di registri, eppure *«il coordinamento di registri è la condizione per la padronanza della comprensione in quanto essa è la condizione per una differenziazione reale tra i concetti matematici e la loro rappresentazione. Costituisce una soglia il cui superamento cambia radicalmente l'attitudine di fronte ad un tipo di attività o ad un dominio (…). Ora, questo coordinamento non ha niente di spontaneo»* (Duval, 1995, p. 259).

Consideriamo anche il seguente stralcio di intervista di un insegnante dei 7 che risulta incoerente per *mancanza di senso critico nei confronti della propria scelta*. L'insegnante sceglie come rappresentazione di colorare la parte di piano fino all'archetto, ma è consapevole dell'illimitatezza della parte di piano scelta come definizione di angolo.

Ric.: Nella definizione che hai scelto la parte di piano è limitata o illimitata?
S.: Illimitata
Ric.: Come mai hai scelto di rappresentare l'angolo con una parte di piano fino a un archetto?
S.: L'ho sempre disegnata così e mi sembra che gli allievi lo vedano (l'angolo).
Ric.: Non dici agli allievi che potrebbero continuare a colorare?
S.: Forse qualche volta, ma poi abbiamo deciso fin da subito di rappresentarlo così.
Ric.: Ti sembra una buona scelta?
S.: Adesso che mi ci fai pensare forse no, ma è questiona di abitudine e non ci si pensa a tutto ciò che si propone.

L'insegnante è consapevole della illimitatezza dell'angolo, ma la rappresentazione figurale che propone è inconsistente con il suo obiettivo e la sua intenzione. Quando il ricercatore porta la sua attenzione sull'adeguatezza di tale rappresentazione, l'insegnante diventa consapevole dell'incoerenza di questo mezzo semiotico. La domanda del ricercatore ha attivato il controllo razionale dell'insegnante.

Anche negli insegnanti che scelgono le altre definizioni si notano in diversi casi incoerenze tra l'intenzione concettuale alla quale vogliono far tendere i propri allievi e i mezzi semiotici scelti per esplicitarla. I 3 insegnanti che parlano di angolo come: inclinazione di due rette; cambio di direzione di due rette; due semirette con un'origine in comune, scelgono come rappresentazione grafica di dare risalto alla parte di piano illimitata, pur non essendo una proprietà caratteristica della definizione proposta.

Risulta invece coerente l'insegnante che definisce l'angolo come ampiezza di due semirette e che sceglie come mezzo semiotico di oggettivazione l'archetto per dare risalto alla misura dell'angolo. Archetto, che viene visualizzato a detta dell'insegnante anche dal goniometro, strumento di misura dell'angolo.

La stessa coerenza emerge nei 2 insegnanti che definiscono l'angolo come rotazione di due semirette con un'origine in comune e che puntano l'attenzione sull'archetto come mezzo semiotico che visualizza il processo dinamico di rotazione.

Questa coerenza non viene qui posta in relazione con un giudizio sull'efficacia della scelta didattica, il che esula dagli scopi di questo articolo.

**Domanda 6**

Per tutti gli insegnanti intervistati, la motivazione della scelta del mezzo semiotico grafico di oggettivazione è legata al fatto che tale rappresentazione è quella prevalentemente in uso e convenzionale in Italia, per questo viene percepita come vincolante e spesso univoca, la rappresentazione «matematicamente corretta». I mezzi di oggettivazione appaiono talmente vincolanti da far perdere il senso critico di ciò che viene proposto in aula, inoltre non risultano costruiti socialmente nell'ambiente classe, ma imposti. Tra le motivazioni delle scelte, due insegnanti parlano anche della forma del goniometro che richiama quella dell'archetto, motivazione assai superficiale, che confonde un concetto con lo strumento di misura utilizzato per valutarne la grandezza relativa.

In generale, non si rilevano da parte degli insegnanti scelte concettuali o personali consapevoli legate al concetto in gioco. Eppure, come sostengono D'Amore e Godino (2006, pp. 26-27): *«Ci pare di poter affermare che il significato degli oggetti matematici comincia come pragmatico, relativo al contesto; ma, tra i tipi di uso relativi a quel significato, ne esistono alcuni che permettono di orientare i processi di insegnamento – apprendimento della matematica. Questi tipi di usi vengono oggettivizzati attraverso il linguaggio e finiscono con il costituire referenti del lessico istituzionale»*; tali usi che orientano i processi di insegnamento-apprendimento non vengono favoriti dalle scelte vincolanti degli insegnanti intervistati.

**Domanda 7**

Le rappresentazioni scelte per modificare la propria richiesta iniziale rientrano tra le tre già menzionate.

In particolare, va osservato che 5 insegnanti non riescono a ipotizzare un modo diverso di rappresentare l'angolo rispetto all'archetto preso in considerazione nella seconda domanda; questo fatto mette in evidenza la rigidità di tale mezzo semiotico che è diventato ormai univoco nella mente di alcuni insegnanti. Gli altri 7 insegnanti che avevano scelto l'archetto, in seguito colorano una più estesa parte di piano, ma rimangono in 4 casi vincolati alla sua limitatezza; segno che in questo caso l'archetto non rappresenta solo un indicatore della parte di piano considerata, ma anche un visualizzatore della parte limitata.

I 3 insegnanti che avevano inizialmente colorato la parte di piano fino all'archetto, in 2 casi cambiano solamente tipo di colorazione: uno tratteggia e uno punteggia la parte di piano limitata, in 1 caso viene mostrato solo l'archetto come rappresentazione dell'angolo.

I 5 insegnanti che avevano colorato la parte di piano cercando di dare risalto all'illimitatezza, in 3 casi non mostrano alternative di rappresentazione se non cambiare tipo di tratteggio, mentre in 2 casi mostrano l'archetto.

In uno di questi ultimi due casi emerge un *cambio di senso* derivante dalla trasformazione semiotica di trattamento nel passaggio da una rappresentazione in un'altra nello stesso registro semiotico (D'Amore, 2006; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2008; Santi, 2010). Questo cambio emerge dall'affermazione esplicita di un'insegnante: *«Se rappresentiamo l'angolo in questo modo, allora stiamo parlando dell'angolo come ampiezza»* (sta parlando della rappresentazione con l'archetto), mentre in precedenza aveva parlato di angolo come parte di piano compresa tra due semirette con un'origine in comune e aveva fornito una rappresentazione cercando di dare risalto alla parte di piano illimitata. Questo esempio sembra confermare quanto emerge dalle ricerche di D'Amore e Fandiño in cui si assiste a comportamenti semiotici inaspettati rispetto alle conclusioni che costituiscono il cuore della teoria elaborata da Duval (1995, 2006). Infatti, Duval considera la *conversione* – il passaggio da una rappresentazione in un sistema semiotico a un'altra in un altro sistema semiotico – l'operazione che caratterizza il funzionamento cognitivo tipico della matematica e la principale fonte di difficoltà nel suo apprendimento. Questo esempio, invece, mostra che anche il *trattamento* è causa di difficoltà nella concettualizzazione di un oggetto matematico; nell'esempio che stiamo esaminando, si presenta con un cambio di senso dell'oggetto angolo che comporta uno stravolgimento del suo significato generale. L'insegnante associa l'ampiezza dell'angolo a una rappresentazione $R_1$ e la sua definizione ad un'altra $R_2$ senza riconoscere il riferimento al medesimo oggetto concettuale, confondendo così l'oggetto matematico con la sua rappresentazione. Il cambio di senso può essere interpretato come un disallineamento tra più significati intrapersonali rispetto al significato interpersonale e generale, culturalmente e storicamente costruito.

### 6.2. Seconda fase. Gli allievi

Le convinzioni sull'angolo emerse grazie alle interviste effettuate a 160 allievi intervistati di V primaria rientrano tra le seguenti:

– *Angolo come parte di piano limitata da un archetto*. 62 allievi sostengono che l'angolo è la parte colorata fino all'archetto utilizzato per indicarlo. La maggioranza chiede di poter disegnare e visualizza il colore esaltando la limitatezza della parte di piano; in alcuni casi viene anche indicato l'archetto, in altri rimane visualizzato indirettamente dalla parte limitata colorata che rimane ben definita all'interno dei due lati dell'angolo e che sembra non potersi estendere oltre ad un certo limite. Alla domanda se è possibile procedere colorando oltre l'archetto, gli allievi rispondono che l'angolo arriva fino a lì (nel senso che è limitato): G.: «Arriva fino a qui, altrimenti si va fuori dall'angolo».

Questa categoria era già emersa negli insegnanti, ma non c'è una correlazione stretta tra la proposta dell'insegnante e le risposte degli allievi; in effetti, diversi di questi studenti non sono scolari degli insegnanti che rientrano in questa categoria.

– *Angolo come due segmenti consecutivi.* 18 allievi affermano che due segmenti consecutivi rappresentano l'angolo stesso: «Sono queste due linee qui».

– *Angolo come archetto.* 21 allievi affermano e indicano con i gesti sul tavolo o sul disegno che l'angolo coincide con l'archetto stesso:

S.: «È questo l'angolo»
(indica sul tavolo vicino a un suo vertice un archetto).
Ric.: «Questo cosa? Mostralo meglio».
S.: «Questo qui» (indica di nuovo una linea curva).
Ric.: «Che cosa intendi?».
S.: «Da qui a qui» (indica una linea curva che unisce due spigoli del tavolo).

– *Angolo come lunghezza di un archetto.* 9 allievi sostengono che l'angolo è la lunghezza dell'archetto rappresentato: «L'angolo è quanto è lungo questo» (indica l'archetto).

Queste ultime tre categorie non sono presenti tra quelle degli insegnanti e mettono in evidenza quanto la rappresentazione semiotica grafica proposta dall'insegnante abbia preso il sopravvento sull'aspetto concettuale, forviandone il significato. In questo caso il *senso* dato dagli allievi all'oggetto matematico angolo risulta diverso rispetto a quello proposto dall'insegnante sia in termini verbali che grafici. Questo dimostra con quanta cautela è necessario proporre rappresentazioni di un oggetto matematico e soprattutto quanto sia importante indagare l'interpretazione data dagli allievi a tali rappresentazioni.

– *Angolo come parte di piano illimitata*. 34 allievi parlano della parte di piano compresa tra due semirette con un'origine in comune: D.: «È la parte di piano compresa tra due semirette». Alla domanda: Ric.: «Disegna un esempio di angolo», 21 allievi rappresentano due semirette con l'origine in comune ed evidenziano l'illimitatezza di una delle due parti di piano: «È tutta questa parte qua» (indica tutta la parte di piano); mentre i restanti 13, dopo aver rappresentato in 8 casi due segmenti con un estremo in comune e negli altri 5 casi due semirette con l’origine in comune, indicano tutti una parte di piano limitata tra i due segmenti o semirette, rientrando così nella prima categoria. Si evidenzia quindi un’incoerenza tra la definizione scelta per parlare di angolo e la rappresentazione grafica di tale oggetto matematico; incoerenza emersa anche tra le risposte degli insegnanti e commentata nel paragrafo 6.1. Il mezzo semiotico verbale dichiarato dagli allievi contrasta con quello figurale, ma tale contrasto sembra non essere percepito dagli studenti, né in precedenza dagli insegnanti. In questo caso c’è correlazione tra le convinzioni degli insegnanti e quelle degli allievi, in effetti questi 13 risultano studenti degli insegnanti che mostravano questo tipo di incoerenza. Questo esempio mette in evidenza quanto le convinzioni degli insegnanti condizionano le pratiche d’aula. Si percepisce cioè una relazione causale tra convinzioni e *misconcezioni*, dato che le *misconcezioni* degli allievi sembrano derivare direttamente da *misconcezioni* del docente e dalle sue convinzioni, secondo una sequenza come la seguente: convinzione del docente → misconcezione del docente → misconcezione dell’allievo → convinzione dell’allievo.

– *Angolo come punto-origine.* 12 allievi sostengono che l’angolo è il punto dove si incontrano due segmenti o due semirette, indicate nel tavolo o sul disegno: «*È questo punto qui*».

Questa categoria non è presente tra le risposte degli insegnanti ed è diffusa in modo uniforme tra le diverse classi. Tale categorie deriva dal linguaggio comune che concepisce l’angolo come un vertice.

– *Angolo come ampiezza*. 4 allievi parlano di angolo esclusivamente come grandezza:

S.: «È un’ampiezza».
Ric.: «Che cos’è un’ampiezza?».
S.: «Quanto è grande da qui a qui» (indica due spigoli del tavolo).

I 4 allievi sono studenti di un docente che concepiva l’angolo nello stesso modo, dimostrando così una correlazione tra le risposte degli allievi e le intenzioni dell’insegnante.

In generale, le risposte degli allievi non sono correlate con le intenzioni concettuali e culturali esplicitate dagli insegnanti, in particolare emerge con molta più forza il mezzo semiotico di oggettivazione grafico proposto dagli insegnanti piuttosto che il fine concettuale che l’insegnante intendeva raggiungere. In alcuni casi il mezzo semiotico grafico proposto prende talmente il sopravvento da snaturare l’intenzione dell’insegnante stesso, come il caso dell’angolo concepito come la lunghezza dell’archetto o l’archetto stesso. In questo caso gli allievi confondono la rappresentazione grafica con il concetto stesso che si voleva proporre. Inoltre emergono tra le risposte degli allievi categorie non previste dall’insegnante che derivano dall’uso quotidiano della lingua comune (angolo come sinonimo di vertice) e da una limitata interpretazione dei pochi o a volte univoci mezzi di oggettivazioni proposti in classe. L’univocità dei mezzi di oggettivazione proposti in aula è in contrasto sia con i riferimenti teorici rientranti nell’ambito della semiotica sia con quelli specifici dell’angolo.

## 7. Conclusioni

I risultati di ricerca mostrano che le misconcezioni possedute dagli allievi sul concetto di angolo, rilevate da diverse ricerche, dipendono anche dalle scelte didattiche effettuate dagli insegnanti, scelte spesso univoche e vincolanti che non tengono conto che gli oggetti della matematica hanno di solito varie definizioni che la storia ha elaborato, ciascuna delle quali può cogliere uno o più degli aspetti specifici dell'oggetto in questione. Ciascuna definizione tende a cogliere di quell'oggetto particolarità specifiche. In particolare, nel caso dell'angolo, le diverse definizioni che la storia ci ha consegnato sono addirittura spesso essenzialmente diverse, tanto che si può ipotizzare che l'oggetto «angolo» è l'insieme delle caratterizzazioni che ciascuna definizione evidenzia. Se una delle definizioni fosse epistemologicamente più conveniente, o più facile, o più vicina all'identità di quell'oggetto…, allora si dovrebbe fare di tutto per proporla e renderla universale; nel caso dell'angolo, però, ognuna delle definizioni che la storia ha elaborato presenta dei problemi addirittura di accettazione intuitiva.

In particolare, in D'Amore e Marazzani (2008) si è evidenziato che *tutte* le definizioni che la storia ha creato sono contemporaneamente presenti, a livello intuitivo, fra gli studenti intervistati: a fronte di un oggetto matematico unico, si vede come esistano varie interpretazioni e vari modelli che tendono a rappresentare caratteristiche di quell'oggetto. Risulterebbe quindi didatticamente importante rispettare le interpretazioni di angolo che emergono dagli allievi. Siamo in effetti in pieno accordo con Mitchelmore e White (2000, p. 234) quando sostengono: *«Una terza implicazione del nostro studio è che le definizioni verbali di angolo rischiano di non aiutare i bambini. Solo quando gli studenti hanno imparato a riconoscere la similarità tra molti contesti in cui l'angolo è definito è facile che accettino una definizione che è espressa nei termini di un unico contesto che può essere applicato a tutti contesti»*. Eppure, dalle interviste agli insegnanti emerge che la definizione proposta agli allievi risulta univoca e non è il risultato di mediazioni e negoziazioni all'interno di una comunità di pratiche, con il fine di giungere ad un sapere condiviso, ma imposta dall'insegnante stesso.

Altra importante causa di difficoltà sulla quale si è concentrata in modo specifico questo articolo sono le incoerenze nell'intenzionalità degli insegnanti derivanti da un uso limitato e inconsapevole dei mezzi semiotici di oggettivazione rispetto all'aspetto concettuale e culturale del sapere al quale si vuole far giungere i propri allievi. La complessità dell'apprendimento del concetto di angolo da parte degli allievi, messa in evidenza dalla letteratura di riferimento, è quindi amplificata dalle scelte dell'insegnante riguardanti la trasposizione didattica del sapere e l'ingegneria didattica adottata.

L'intenzionalità attribuisce all'individuo, in questo caso all'insegnante, un ruolo fondamentale nella possibilità di attribuire senso agli oggetti matematici, ma tale intenzionalità deve essere gestita con consapevolezza per poter essere efficace didatticamente. In effetti, l'incoerenza tra l'intenzionalità esplicitata dall'insegnante tramite il mezzo di oggettivazione verbale e il mezzo di oggettivazione grafico, scelti per esprimere tale concetto, può essere la fonte di misconcezioni evitabili nella mente dell'allievo. La scelta dei segni non è in effetti neutra o indipendente; come sostiene Radford (2005b, p. 204): *«I mezzi semiotici di oggettivazione offrono possibilità diverse* *per svolgere un compito per designare oggetti ed esprimere intenzioni. (…) Occorre quindi saper individuare i mezzi semiotici di oggettivazione per ottenere oggetti di coscienza»*, tale individuazione va gestita con forte senso critico da parte dell'insegnante.

Riferendoci a Husserl (1913-1959), i risultati di questa ricerca mettono in evidenza che l'insegnante, nelle pratiche d'aula, troppo spesso crea incoerenza tra l'atto intenzionale che determina il modo in cui l'oggetto si presenta alla coscienza (noesis) e il contenuto concettuale dell'esperienza individuale (noema). La coerenza e unità dei diversi atti intenzionali dell'insegnante sembrano non essere sempre presenti nelle pratiche d'aula per quanto riguarda l'angolo.

I risultati della ricerca dimostrano che le decisioni prese dall'insegnante per presentare l'argomento angolo si basano su proposte derivanti dalla noosfera, più che da scelte personali consapevoli, e vertono sul fornire all'allievo sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali senza analizzarne i tratti distintivi con gli allievi. Ma come sostiene Duval, la concettualizzazione degli oggetti matematici non avviene ricorrendo a uno solo di questi possibili sistemi semiotici, poiché il significato è forgiato dall'azione reciproca dei diversi sistemi semiotici. *«La comprensione comincia con l'articolazione, da parte del soggetto, di due registri di rappresentazione. In altre parole, non si può mai considerare che un tipo di rappresentazione è migliore di un altro se l'individuo non è capace di controllare, da solo e nei due sensi, la conversione da un tipo di rappresentazione proposto dall'insegnante in un altro registro di rappresentazione»* (Duval, 2006, p. 613). L'insegnante ha il compito delicato di guidare e sostenere lo studente nella coordinazione di mezzi semiotici di oggettivazione eterogenei, ciascuno dei quali è di per sé articolato e difficile da essere gestito, per evitare che così l'allievo, o l'insegnante stesso, confonda l'oggetto matematico con una sua rappresentazione.

I mezzi semiotici di oggettivazione non devono cioè diventare scelte *a priori* derivanti dall'esterno della situazione d'aula, senza nessuna analisi critica da parte dell'insegnante. Come sostengono Fandiño e D'Amore (2009), un docente di matematica avrebbe bisogno per insegnare di una forte competenza matematica acquisita per approfondimento personale oltre che sulla disciplina, anche sulla storia e sulla visione epistemologica di ogni singolo oggetto, così da riflettere, paragonare, analizzare ed evitare le situazioni qui descritte.

Risulta quindi indispensabile per il superamento di *misconcezioni inevitabili* e l'assenza di *misconcezioni evitabili*, fornire una grande varietà di mezzi semiotici di oggettivazione opportunamente organizzati e integrati in un sistema sociale di significazioni rappresentato dalle pratiche matematiche condivise dagli allievi gestite con consapevolezza e coerenza da parte dell'insegnante.

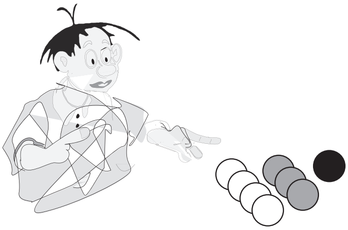
## Bibliografia


D'Amore B. (1985). L'idea di «angolo» nell'antichità e la sua evoluzione. *Le scienze matematiche e il loro insegnamento*. 1, 6-18.
D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*. 4, 557-583.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2008). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. In: Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L, Arzarello F. (eds.) (2008). *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education.* Atti del Convegno Omonimo, Roma 5-8 marzo 2008. WG 5. Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana. Collana Scienza e Filosofia.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2009). La formazione degli insegnanti di matematica, problema pedagogico, didattico e culturale. *La matematica e la sua didattica*. 23, 3, 261-298.
D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.
D'Amore B., Marazzani I. (2008). L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo. *La matematica e la sua didattica.* 22, 3, 285-329.
D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di «misconcezione». *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.
Di Sessa A. (1983). Phenomenology and the evolution of intuition. In: Gentner D., Stevens A. (eds.) (1983). *Mental models*. Hillsdale, N.J.: Laurence Erlabaum. 15-33.
Duval R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Actes de l'École d'été 1995*. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica.* 3, 1996, 250-269].
Duval R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero matematico. *La matematica e la sua didattica*. 4, 585-619.
Fischbein E., Tirosh D., Melamed U. (1981). Is it possibile to measure the intuitive acceptance of mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics*. 12, 491-512.
Foxman D., Ruddock G. (1984). Concepts and skills: Line symmetry and angle. *Mathematics in School*. 13, 9-13.
Godino J.D., Batanero C. (1994). Significado istitucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 14, 3, 325-355.
Hilbert D. (1899). *Gründlagen der Geometrie*. Stuttgart: G.G. Teubner. [Noi facciamo riferimento all'edizione italiana: *Fondamenti della geometria*, a cura di Carlo F. Manara e P. Canetta, Milano: Feltrinelli, 1970].
Husserl E. (1913-1959). *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*. Dordrecht: Kluwer. [Noi facciamo riferimento all'edizione italiana: *Idee per una fenomenologia pura e una filosofia fenomenologica*, Libro I, § 89, a cura di Enrico Filippini, Torino: Einaudi, 1965].
Kahneman D., Tversky A. (1982). On the study of statistical intuitions. In: Kahneman D., Slovic P., Tversky A. (eds.). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press. 493-508.
Kaiser J.M. (2005). Struggles with developing the concept of angle: comparing sixth-grade students' discourse to the history of the angle concept. *Mathematical Thinking and Learning.* 6, 3, 285-306.
Kieran C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics*. 12, 317-326.
Lo J.J., Gaddis K., Henderson D. (1996). Building upon student experience in a college geometry course. *For the Learning of Mathematics*. 16(1), 34-40.
Merleau-Ponty M. (2003). *Il filosofo e la sua ombra*. *Segni*. A cura di Andrea Bonomi, traduzione di Giuseppina Alfieri. Milano: Il Saggiatore.
Mitchelmore M.C. (1989). The development of children's concepts of angle. In: G. Vergnaud (ed.) (1989). *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education.* Paris. 2, 304-311.
Mitchelmore M.C. (1997). Children's informal knowledge of physical angle situations. *Learning and Instruction*. 7, 1-19.
Mitchelmore M.C. (1998). Young students' concepts of turning. *Cognition and Instruction.* 16, 265-284.
Mitchelmore M.C., White P. (1998). Development of angle concepts: a framework for research. *Mathematics Education Research Journal*. 10(3), 4-27.
Mitchelmore M.C., White P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*. 41, 209-238.

Prescott A., Mitchelmore M.C., White P. (2002). Student difficulties in abstracting angle concepts from physical activities with concrete materials. In: Barton, Bill et al. (2002). *Mathematics education in the South Pacific*. 1-2, 583-591.
Radford L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning.* 5(1), 31-70.
Radford L. (2005a). Body, Tool, and Symbol: Semiotic Reflections on Cognition. In E. Simmt and B. Davis (eds.) (2005). *Proceedings of the 2004 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*.
Radford L. (2005b). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica.* 2, 191-213.
Radford L. (2006). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics*. 61, 39-65.
Roels G. (1985). *Het fenomeen hoek* (The angle phenomenon). *Wiskunde en Onderwijs.* 11, 127-138.
Santi G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. PhD dissertation. Università di Palermo. Pubblicata sulla rivista GRIM (Gruppo di Ricerca sull'Insegnamento delle Matematiche) [Università di Palermo, Italia].
Sbaragli S. (2005). Misconcezioni «inevitabili» e misconcezioni «evitabili». *La matematica e la sua didattica.* 1, 57-71.
Schoenfeld A.H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.
Schweiger F. (1986). Winkelbegriff und Winkelmaß (The angle concept and angle measurement). *Mathematik im Unterricht*. 11, 1-9.
Shaughnessy J.M. (1985). Problem-Solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance. In: Silver E.A. (ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving*: *Multiple research perspectives.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 399-415.
Silver E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: some under represented themes and needed directions. In: Silver E.A. (ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving*. *Multiple research perspectives.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 247-266.
Strehl R. (1983). *Anschauliche Vorstellung und mathematische. Theorie beim Winkelbegriff* (Visualisation and mathematical theory of the angle concept). *Mathematica Didactica*. 6, 129-146.
Tsamir P., Tirosh D., Stavy R. (1997). Intuitive rules and comparison tasks: The grasp of vertical angles. In: Makrides G.A. (ed.) (1997). *Proceedings of the first mediterranean conference: Mathematics education and applications*, Nicosia, Cyprus Pedagogical Institute and Cyprus Mathematical Society.
Vadcard L. (2002). Conceptions de l'angle chez des élèves de seconde. *Recherches en didactique des mathématiques.* 22(1), 77-120.
Voss J. F., Blais J., Means M.L., Greene T.R., Ahwesh E. (1989). Informal reasoning and subject matter knowledge in the solving of economics problems by naïve and novice individuals. In: Resnick L.B. (ed.) (1989). *Knowing, learning and instruction: Essays in honor of Robert Glaser.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 217-250.
Wagner S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for research in mathematics education*. 12, 107-118.

# Quiz numero 48: Bianco-Rosso-Nero?

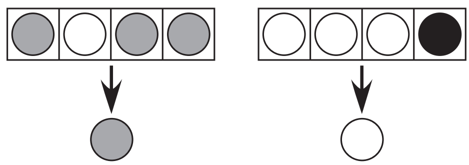
Aldo Frapolli

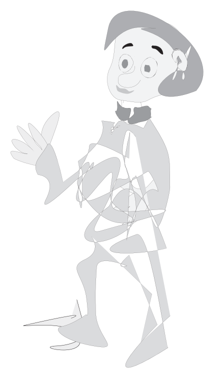


Cari amici,
prendete 8 tombolini – di cui 4 bianchi, 3 rossi e 1 nero – e facciamo il seguente gioco in due turni:

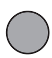
– I° turno: suddividete casualmente gli 8 tombolini in 2 insiemi, ognuno con 4 elementi. In ognuno dei due gruppi vince il colore più frequente. Nel caso di parità, per stabilire la vittoria di gruppo, lanciate una moneta ideale.
– II° turno: per stabilire chi vince fra i due colori usciti vittoriosi nella fase precedente lanciate nuovamente una moneta ideale.
Secondo voi, qual è la probabilità di vittoria per ognuno dei tre colori?

Ecco ad esempio un risultato dopo il I° turno





Per stabilire il colore che vince, tu Joe lancia la moneta (T-C): vince il rosso se esce C, bianco se esce T.




È uscito C.
Ha vinto il rosso!

Ma tu Moore mi sapresti dire qual era la probabilità che uscisse il rosso?

Completiamo e riformuliamo la domanda a tutti gli affezionati lettori del Quiz:

**Qual è la probabilità che nel gioco del Bianco-Rosso-Nero proposto da Archie vinca il rosso? E quale la probabilità che vincano il bianco oppure il nero?**

Questa volta il vincitore sarà determinato in modo aleatorio, per estrazione a sorte fra i vari solutori.

# Soluzione del Quiz numero 47

Vi proponiamo i tre anagrammi più interessanti che ci sono pervenuti:

**BOLLETTINO DEI DOCENTI DI MATEMATICA**

=

**EMBLEMA DIDATTICO, EDITATO NEL TICINO**

Ennio Peres (giocologo, Roma)

**IL MATTO MENTE DICENDO: LO BATTI A DIECI**

F. Bonetti (studente ICEC Bellinzona)

**DEDICATEMI CENTO NOTTI DA MILLE ALIBI**

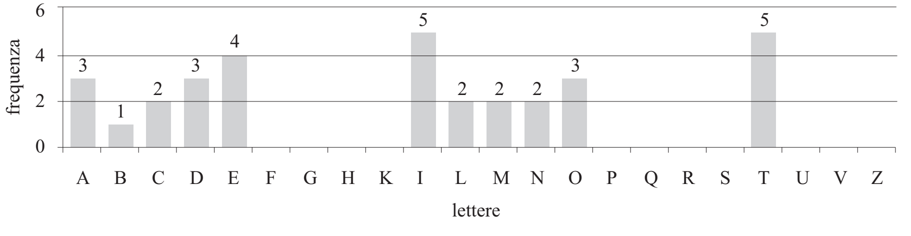
Alice Andreetti (studentessa Liceo di Bellinzona)

Il premio è stato assegnato a Ennio Peres, specialista nel tema, che ci ha fornito un anagramma che in sè definisce il testo originale: notevole! Lo ringraziamo di cuore per averci dedicato la sua attenzione.

Una menzione particolare va però agli studenti delle scuole medie superiori di Bellinzona, autori degli altri due anagrammi significativi.

Per chi volesse cimentarsi ulteriormente con questa sfida proponiamo il diagramma delle frequenze delle lettere nel testo da anagrammare:

Frequenza della singole lettere in
BOLLETTINO DEI DOCENTI DI MATEMATICA



# 2. Giochi di simmetrie

Bernardo Mutti

## 1. Alla scoperta della simmetria assiale: riproduzione grafica di alcune case o di un castello che si riflettono sullo specchio d'acqua (II ciclo)

**Esecuzione**

Gli allievi lavorano su un foglio quadrettato sul quale tracciano una retta «orizzontale» circa a metà. Il docente disegna sulla lavagna, anch'essa suddivisa in due parti da una retta. Linea dopo linea riproduce un disegno seguendo la quadrettatura, per esempio, alcune case o un castello superiormente sopra la retta, che fa da asse di simmetria. Poi disegna l'immagine riflessa. Parallelamente, gli allievi riproducono lo stesso disegno sul loro foglio. Dopo di che colorano le due immagini, rispettando la simmetria.

Se si vuole dare l'effetto dell'immagine riflessa nell'acqua, si possono aggiungere nella parte inferiore del disegno alcune piccole onde di color celeste. L'effetto è piacevole, come si può osservare nella figura 1.

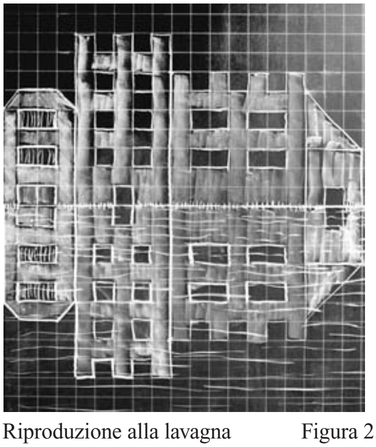


Figura 1. Riproduzione alla lavagna

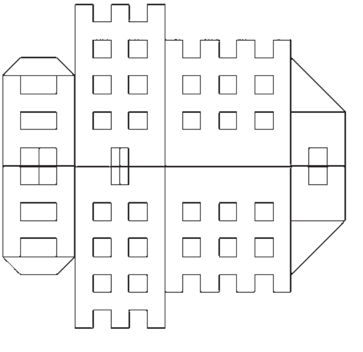


Figura 2. Disegno completo non colorato

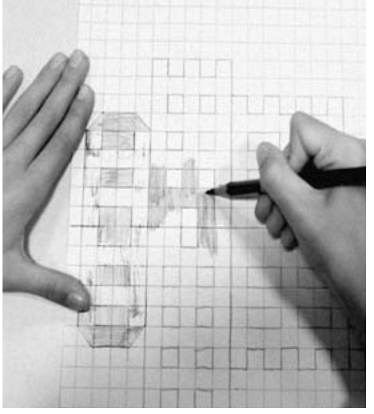


Figura 3. SE Besso. Si procede alla colorazione

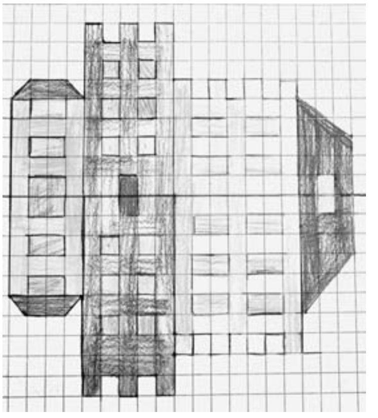


Figura 4. SE Besso. Disegno terminato.

**Discussione**

Col disegno davanti agli occhi, l'insegnante può iniziare una discussione con gli allievi, mirata a evidenziare le prime osservazioni sulle proprietà della simmetria assiale. Le due figure (quella disegnata per primo e la riflessa) sembrano essere identiche (riguardo a lunghezze e ampiezze). Si può ritagliare ciascuna figura seguendo bene il contorno e in seguito tentare di sovrapporle. Qualcosa allora non quadra: per riuscire nell'intento, occorre ribaltare una delle due. È il primo contatto con l'orientamento del piano. Altra osservazione possibile: se nella figura superiore dal piano terreno salgo al tetto, mi muovo dal basso verso l'alto; nella figura riflessa, lo stesso movimento avviene dall'alto al basso. Cambia il senso di percorrenza, cambia l'orientamento del piano.

## 2. Giochi con la simmetria centrale (disegno in coppia)

**Esecuzione grafica**

Gli allievi si dispongono a coppie.

Ognuno riceve un foglio quadrettato sul quale disegna due rette perpendicolari che si intersecano al centro del foglio, seguendo la quadrettatura. Le due rette fungono da assi di simmetria.

Partendo dalla zona centrale il primo compagno disegna un poligono semplice in uno dei 4 quadranti, segnando i suoi vertici nei nodi della quadrettatura.

Il secondo compagno copia sul proprio foglio il poligono del compagno nella stessa posizione.

Ora tutti e due riportano simmetricamente il disegno negli altri tre quadranti controllandosi a vicenda affinché le figure siano posizionate in modo corretto (stesse distanze dei vertici dai rispettivi assi di simmetria).

Disegnate le figure, queste vanno colorate subito.

Posizionate le 4 figure simmetriche, il secondo giocatore sistema il secondo poligono, vicino al primo, leggermente staccato, in uno dei quattro settori sempre facendo in modo che tutti i vertici coincidano con nodi della quadrettatura.

Fatto questo, i due riportano la seconda figura negli altri tre settori in modo simmetrico e colorano le 4 nuove figure.

Il gioco continua facendo in modo che i giocatori continuino ad alternarsi.

**Alcuni suggerimenti**

I poligoni più facili da riportare sul foglio sono i quadrati e i rettangoli, seguono triangoli e trapezi. Si possono pure introdurre poligoni non convessi.

Per impedire che il gioco si prolunghi oltre le due lezioni, si può consigliare di disegnare figure sempre più grandi man mano che ci si sposta verso i margini del foglio. Per ogni serie di 4 poligoni si consigliano colori diversi.

Ai più bravi si possono far disegnare le «linee di fuga» che partono dal centro e raggiungono i vertici dei poligoni. Importante: le linee non devono passare davanti ai poligoni che incontrano.

Ecco alcuni risultati.

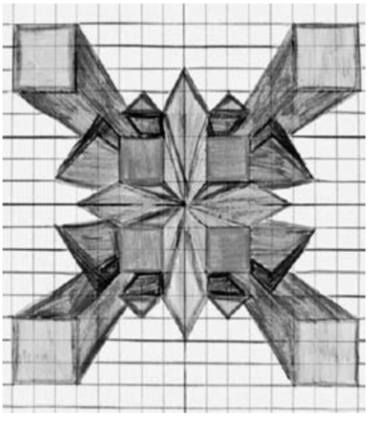


Figura 5. Esempio: SE Pregassona Probello

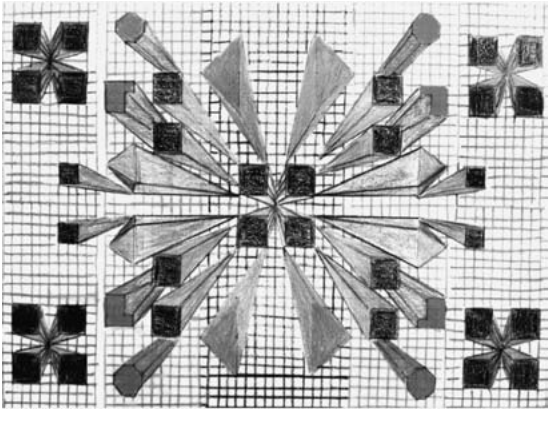


Figura 6. Esempio: SE Besso

**Esecuzione con la tecnica dell'assemblaggio (I e II ciclo)**

Le immagini seguenti mostrano composizioni eseguite dagli allievi del I e del II ciclo, mediante assemblaggio di poligoni precedentemente disegnati e ritagliati. Di ogni poligono si sono preparate 2 coppie di figure simmetriche. In questo modo gli allievi possono concentrarsi esclusivamente sulla composizione, liberare la loro fantasia, tentare e correggere sul momento.

Figura 7. Esempio: SE Pregassona

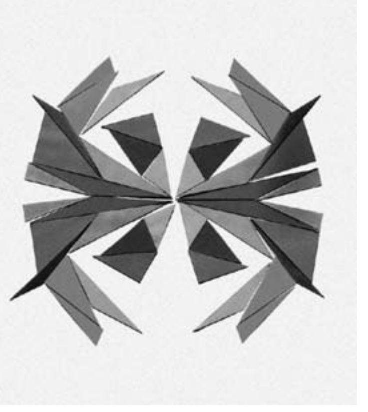


Figura 8. Esempio: SE Ruvigliana

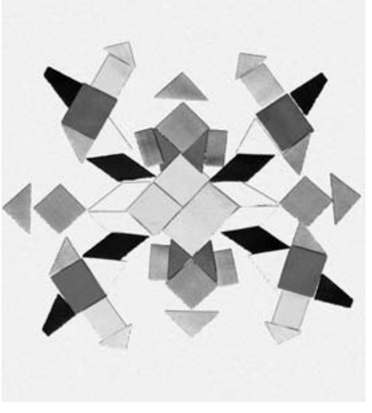


Figura 9. SE Besso

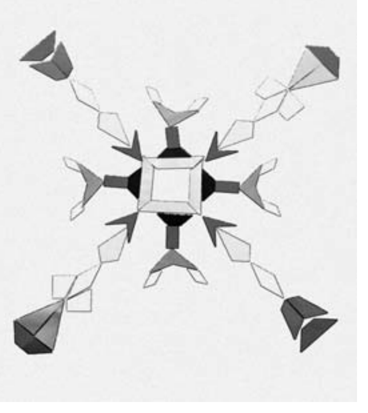


Figura 10. SE Besso

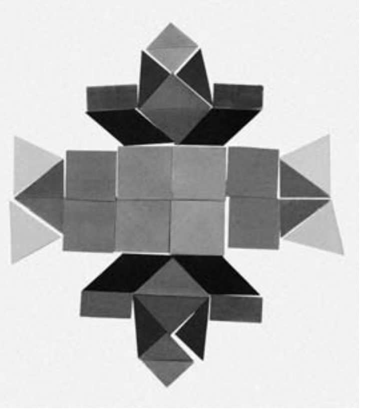


Figura 11. SE Ruvigliana

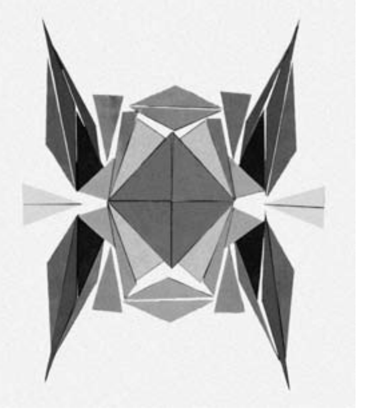


Figura 12. SE Ruvigliana

Figura 13. SE Ruvigliana

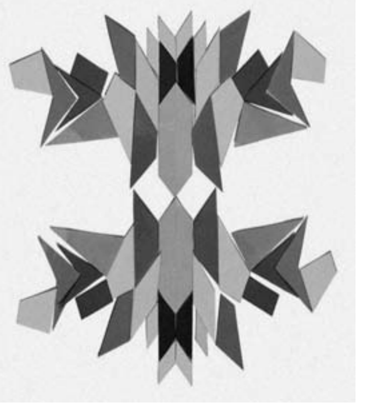


Figura 14. SE Ruvigliana

## 3. Commento

L'effetto estetico è sicuramente piacevole e costituisce un importante stimolo per l'apprendimento. La situazione offre la possibilità di promuovere una nuova discussione con la classe. L'insegnante conosce la struttura matematica soggiacente, che è la composizione di simmetrie assiali con assi perpendicolari: il risultato è un'isometria pari detta simmetria centrale o rotazione di 180˚. Gli allievi possono scoprire le proprietà di questa (per loro) nuova trasformazione geometrica. Le più interessanti sono la conservazione dell'orientamento (che cambia due volte, quindi rimane invariato) e il parallelismo dei segmenti corrispondenti.

# IV. Storia del calcolo



## 1. Da una ministoria degli strumenti di calcolo… alla loro integrazione nelle nostre scuole

Giorgio Mainini

This paper summarizes the long history of the tools that man has devised to reduce the amount of fatigue caused by calculations. Its conclusion is an invitation to school operators not to be afraid to use these tools in their everyday teaching practice; as the article claims, both pupils and students are accustomed to doing so, be it well or badly, with or without their teacher's supervision.

### 1. Per cominciare

Per poter calcolare occorre avere una prima immagine di *numero cardinale*. Ciò richiede un grado di astrazione non da poco: il numero cardinale è determinato dalla classe di equivalenza di insiemi legati da un'applicazione biunivoca, detti *insiemi equipotenti*. Cioè, per esempio, gli insiemi di tre mucche, di tre alberi e di tre figli hanno in comune qualcosa, che in matematica si indica appunto con l'espressione «numero cardinale tre», che noi rappresentiamo con il *numerale* 3 e che, nel seguito, chiameremo semplicemente numero 3.

Capito questo, il passo successivo consiste nel trovare un modo di rappresentare i numeri, cioè di inventare un *sistema di numerazione*, cioè un sistema di scrittura che faccia capo a cifre o altri simboli in modo consistente.

Si può ben pensare che avere cinque dita per mano, dieci dita nelle due mani e venti dita in tutto abbia avuto un certo influsso sulle scelte. Il «ritmo» a cinque si trova ad esempio presso i Romani, che usavano simboli per il 5, il 50, il 100, il 500 e il 1000. Il «ritmo» a dieci si trova ad esempio presso gli Egizi, che rappresentavano i numeri da 1 a 9 semplicemente accostando barrette verticali, ma che avevano poi segni specifici per il 10 –  giogo –, il 100 –  rotolo –, il 1000 –  ninfea –, il 10'000 –  dito – e il 100'000 –  girino o  rana –. Il «ritmo» a venti si ritrova, come un fossile, nei numeri in francese da 80 (quatre-vingts) a 99 (quatre-vingts-dix-neuf). I babilonesi avevano un sistema basato sul 60, con il 10 come «aiuto»: si può pensare che il 60 sia stato scelto perché ha molti divisori o perché multiplo di 12 (numero delle falangi delle dita lunghe): tracce di questo sistema di numerazione le ritroviamo oggigiorno nel numero dei minuti di un'ora, nei gradi sessagesimali, nel numero dei mesi di un anno e nel numero dei segni dello zodiaco.

I sistemi citati fin qui erano sostanzialmente additivi: per rappresentare un numero appena appena grandicello si accostavano i simboli a disposizione fino ad ottenere il numero desiderato (con qualche variante più o meno semplificativa – si pensi al 3429 romano MMMCCCCXXVIIII che può diventare MMMCDXXIX). Poi «qualcuno», forse un indiano del secolo VIII d.C., inventò il sistema posizionale a base 10: bastano dieci simboli (cifre) per rappresentare qualsiasi numero a condizione di accettare che:

– ogni cifra assuma un valore diverso a seconda delle posizione occupata e
– esista un simbolo per occupare una posizione vuota: tale simbolo è lo zero, 0.

Lo zero era inizialmente un puro simbolo (un cappello posato su una sedia per indicare che quella sedia è occupata): l'accettazione dello zero quale numero è stato un altro paio di maniche…

È interessante osservare che lo zero fu «inventato» tre volte: dai Babilonesi, dai Maya e dagli Indiani.

Il sistema posizionale indiano fu introdotto in Europa da Leonardo Pisano detto il Fibonacci (Pisa 1170 ca. – Pisa 1240 ca.) con il suo libro *Liber abbaci*, più noto come Liber abaci, pubblicato nel 1202. Il Liber abbaci comincia con queste parole:

*Novem figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.*

cioè

*Ci sono nove figure degli Indiani, che sono 9 8 7 6 5 4 3 2 1. (Così) con queste nove figure e con questo segno 0, che in arabo si chiama zefiro, si scrive qualsiasi numero, come si dimostra più sotto.*

Poche pagine dopo si trova un tabella[1], della quale riproduciamo qualche dettaglio:

| *Ianua ternarii* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *3* | *et* | *3* | *fiunt* | *6* |
| *3* | *et* | *4* | | *7* |
| *3* | *et* | *5* | | *8* |
| *3* | *et* | *6* | | *9* |
| *3* | *et* | *7* | | *10* |
| *3* | *et* | *8* | | *11* |
| *3* | *et* | *9* | | *12* |
| *3* | *et* | *10* | | *13* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *30* | *et* | *30* | *fiunt* | *60* |
| *30* | *et* | *40* | | *70* |
| *30* | *et* | *50* | | *80* |
| *30* | *et* | *60* | | *90* |
| *30* | *et* | *70* | | *100* |
| *30* | *et* | *80* | | *110* |
| *30* | *et* | *90* | | *120* |

| *De ternario* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *3* | *uices* | *3* | *fiunt* | *9* |
| *3* | | *4* | | *12* |
| *3* | | *5* | | *15* |
| *3* | | *6* | | *18* |
| *3* | | *7* | | *21* |
| *3* | | *8* | | *24* |
| *3* | | *9* | | *27* |
| *3* | | *10* | | *30* |

| *Ianua quaternarii* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *4* | *et* | *3* | *fiunt* | *7* |
| *4* | *et* | *4* | | *8* |
| *4* | *et* | *5* | | *9* |
| *4* | *et* | *6* | | *10* |
| *4* | *et* | *7* | | *11* |
| *4* | *et* | *8* | | *12* |
| *4* | *et* | *9* | | *13* |
| *4* | *et* | *10* | | *14* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *40* | *et* | *40* | *fiunt* | *70* |
| *40* | *et* | *40* | | *80* |
| *40* | *et* | *50* | | *90* |
| *40* | *et* | *60* | | *100* |
| *40* | *et* | *70* | | *110* |
| *40* | *et* | *80* | | *120* |
| *40* | *et* | *90* | | *130* |

| *De quaternario* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *4* | *uices* | *4* | *fiunt* | *16* |
| *4* | | *5* | | *20* |
| *4* | | *6* | | *24* |
| *4* | | *7* | | *28* |
| *4* | | *8* | | *32* |
| *4* | | *9* | | *36* |
| *4* | | *10* | | *40* |

| *De decenario* | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *10* | *uices* | *10* | *fiunt* | *100* |
| *10* | | *20* | | *200* |
| *(…)* | | | | |

dove si vedono i risultati delle addizioni e delle moltiplicazioni[2] di numeri di una sola cifra.

1. La riproduzione dell'intera tabella si trova sul numero 64 di questa rivista, a pagina 56.
2. Osserviamo che il termine *uices* (o *vices*, o *veces*) significa «volte».

Si osservi che è tralasciata la moltiplicazione per uno e data per scontata la proprietà commutativa per entrambe le operazioni.

Se si rappresentano i risultati in una tavola pitagorica a doppia entrata si ottiene lo schema

| **x** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **2** | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| **3** | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| **4** | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| **5** | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| **6** | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| **7** | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| **8** | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| **9** | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| **10** | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

nel quale le celle a sfondo ombreggiato sono omesse: Fibonacci insegna come risparmiare il 55% di memoria!

## 2. Strumenti di calcolo

### L'abaco

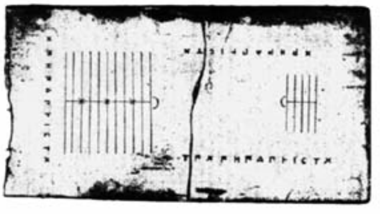
L'abaco è il più semplice e il più antico strumento di calcolo, inventato dall'uomo per semplificare l'esecuzione di calcoli lunghi e laboriosi.

Gli abachi più antichi erano tavoli ricoperti da un sottile strato di sabbia sui quali con uno stilo si segnavano i calcoli. *Abaco* deriva dal latino *abacus*, che riprende la parola greca *abaks*, che significa «tavolo» e che deriva probabilmente, a sua volta, dalla parola semitica *abaq* che vuol dire proprio «sabbia» o «polvere». Uno degli abachi più antichi, ritenuto erroneamente, all'inizio, un tavolo da gioco, è quello ritrovato nell'isola greca di Salamina, simile a quelli usati successivamente anche dai romani e fino al medioevo.

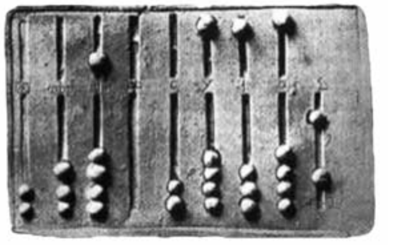
Nell'antica Cina si usavano abachi di bacchette di bambù; successivamente prevalsero le tavole o tavolette sulle quali erano segnate linee e colonne di divisione che indicavano i diversi ordini di unità del sistema di numerazione in uso. Su queste linee venivano poi collocati dei gettoni, che rappresentavano i numeri, e con i quali, se mossi in modo opportuno, si poteva eseguire ogni tipo di calcolo.

Il tipo di abaco più diffuso è quello cinese, chiamato ***Suan Pan***, costituito da una serie di asticciole che indicano, andando da destra verso sinistra, i diversi ordini delle unità, cioè le unità, le decine, le centinaia, le migliaia e così via.

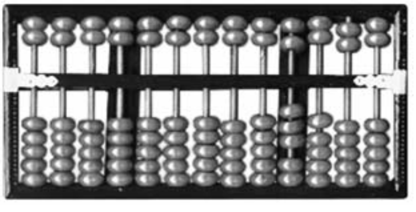
Importante, e ancora usato, è l'abaco giapponese, detto ***Soroban***. Il *Soroban* differisce dal *Suan Pan* per il numero di palline sopra la barra (una sola nel *Soroban*, due nel *Suan Pan*) e sotto la barra (quattro nel *Soroban*, cinque nel *Suan Pan*).



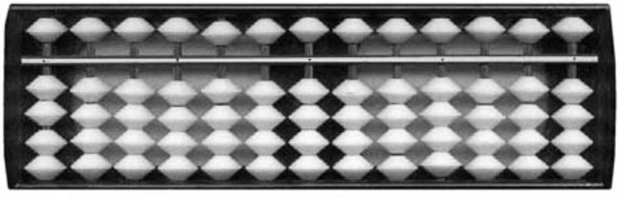
Abaco di Salamina, III sec. a.C.



Abaco romano.



Abaco cinese (Suan Pan).



Abaco giapponese (Soroban).

Abaco russo (Schoty).

Si osservi che anche negli abachi è presente una forma rudimentale di sistema posizionale a base 10 con il «vuoto».

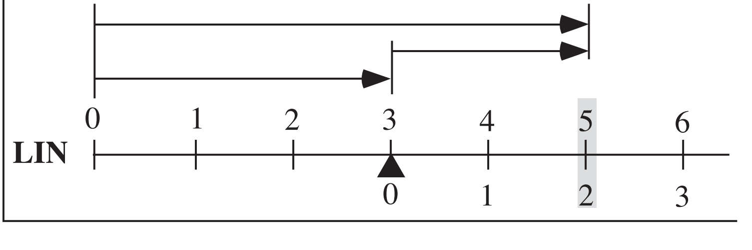
Come si può dedurre dalla seguente figura, ancora nel XVI secolo si dibatteva tra abacisti e algoritmisti se fosse meglio lavorare con l'abaco o con le cifre arabe.

Gregor Reisch, 1503: l'Aritmetica osserva alla sua sinistra Pitagora che calcola con l'abaco e alla sua destra il filosofo Boezio che calcola con le cifre arabe.

Sembra però che Aritmetica sorrida verso Boezio…

## 3. Il regolo

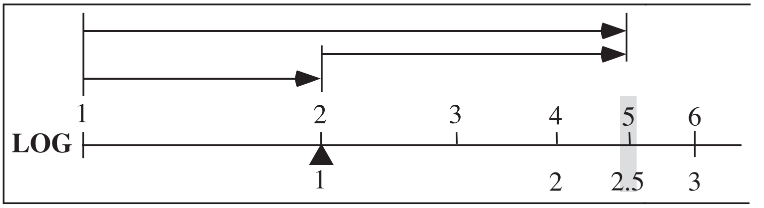
### Il regolo a scala lineare




Nella figura si vede come calcolare 3 + 2: si fa scorrere il cursore (la parte mobile del regolo) fin che il suo 0 coincide con il tre dello statore: in corrispondenza del 2 del cursore, sullo statore si legge 5.

È ben evidente che il regolo a scala lineare è di ben poca utilità pratica, se non, forse, per scopi didattici.

**Il regolo a scala logaritmica**




Verso il 1600 Nepero (John Napier, Merchison Castle 1550 – Edimburgo 1617) elaborò il concetto di *logaritmo naturale*.

In generale, se $c = a^b$ allora, per definizione, $b = \log_a c$

che si legge «b è il logaritmo in base a di c».

Se la base è il numero e (≈ 2.718281828459…), allora si parla di logaritmo naturale. Si ha:

se $c = e^b$ allora, per definizione, $b = \log_e c = \ln c$.

I logaritmi, in qualsiasi base accettabile (cioè un numero reale positivo diverso da 1), godono di parecchie proprietà, ma quella che serve per realizzare un regolo a scala logaritmica è la seguente:

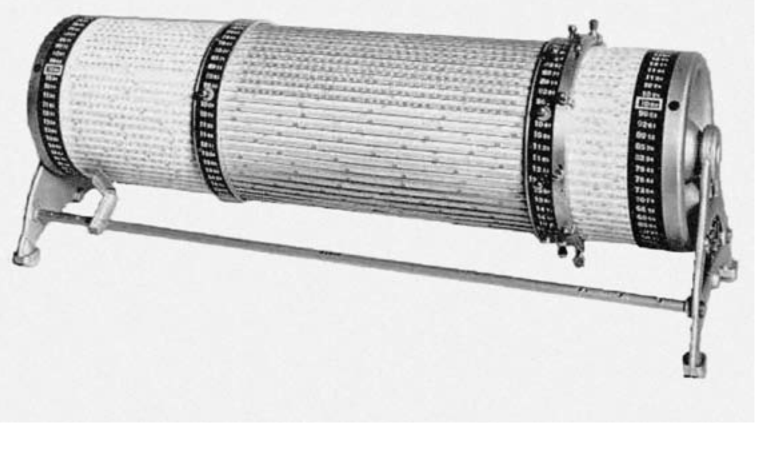
$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.

La proprietà consente di trasformare un prodotto in una somma. Di conseguenza se le scale sullo statore e sul cursore di un regolo sono logaritmiche, «sommando» due numeri (come nel regolo a scala lineare) si ottiene il loro prodotto.

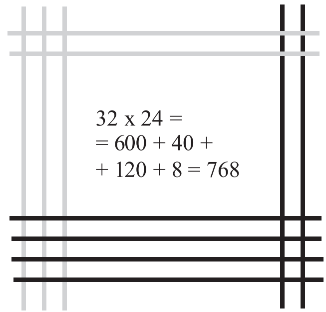
Nella figura che precede si vede come calcolare il prodotto 2 · 2,5 = 5

Naturalmente l'esattezza del risultato dipende sia dalla precisione delle scale sia dalla manualità dell'operatore: se si calcola 3,57 · 14,21 (= 50,7297) con il regolo, grasso che cola se si ottiene 50,73. In realtà 50,7 è già un buon risultato.

Quanto più grande è il regolo, tanto maggiore può essere la sua precisione: un regolo lungo 15 metri è però tutt'altro che pratico. Ma l'astuzia può risolvere il problema: l'oggetto rappresentato di seguito (una Loga cilindrica del 1930, lunga 60 cm) equivale, appunto, a un regolo lungo 15 metri.



Se si può chiamare «strumento di calcolo», ecco qualcosa che è poco più di un giochino. Usando bastoncini colorati o tracciando segmenti colorati, si possono eseguire moltiplicazioni. Nell'esempio, in grigio sono rappresentate le decine e in nero le unità.




Basta contare gli incroci:
– grigio con grigio: decine x decine = centinaia (sono 6, quindi 600)
– grigio con nero: decine x unità = decine (sono 16, quindi 160)
– nero con nero: unità x unità = unità (sono 8, quindi 8)
– 600 + 160 + 8 = 768 risultato giusto (e ci mancava altro!)

## 4. I bastoncini di Nepero

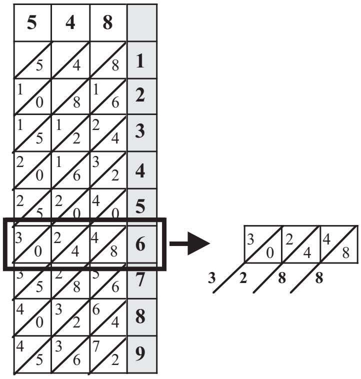
Nel libro *Rhabdologiae seu Numerationis per virgulas libri duo* del 1617 Nepero trattò delle *virgulae numeratrices*, che noi chiamiamo bastoncini di Nepero e che nei paesi anglosassoni sono talvolta chiamati ossi di Nepero – *Napier's bones* – perché spesso realizzati, ai tempi, con avorio o ossa di animali.

Nella loro versione più semplice, i bastoncini sono asticelle, su ciascuna delle quali sono incisi i primi multipli di un numero, con le decine e le unità divise da una barra obliqua.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **2** | 2 | 4 | 6 | 8 | 1/0 | 1/2 | 1/4 | 1/6 | 1/8 |
| **3** | 3 | 6 | 9 | 1/2 | 1/5 | 1/8 | 2/1 | 2/4 | 2/7 |
| **4** | 4 | 8 | 1/2 | 1/6 | 2/0 | 2/4 | 2/8 | 3/2 | 3/6 |
| **5** | 5 | 1/0 | 1/5 | 2/0 | 2/5 | 3/0 | 3/5 | 4/0 | 4/5 |
| **6** | 6 | 1/2 | 1/8 | 2/4 | 3/0 | 3/6 | 4/2 | 4/8 | 5/4 |
| **7** | 7 | 1/4 | 2/1 | 2/8 | 3/5 | 4/2 | 4/9 | 5/6 | 6/3 |
| **8** | 8 | 1/6 | 2/4 | 3/2 | 4/0 | 4/8 | 5/6 | 6/4 | 7/2 |
| **9** | 9 | 1/8 | 2/7 | 3/6 | 4/5 | 5/4 | 6/3 | 7/2 | 8/1 |

Accostando i bastoncini corrispondenti a diverse cifre fino a comporre un certo numero (per esempio accostando i bastoncini per 5, per 4 e per 8 a comporre 548), e sommando le cifre che risultano adiacenti (non separate dalla barra) nelle diverse righe, si ottiene facilmente la tabellina dei multipli del numero in questione.

La moltiplicazione si esegue come nell'esempio che segue: $548 \cdot 6$

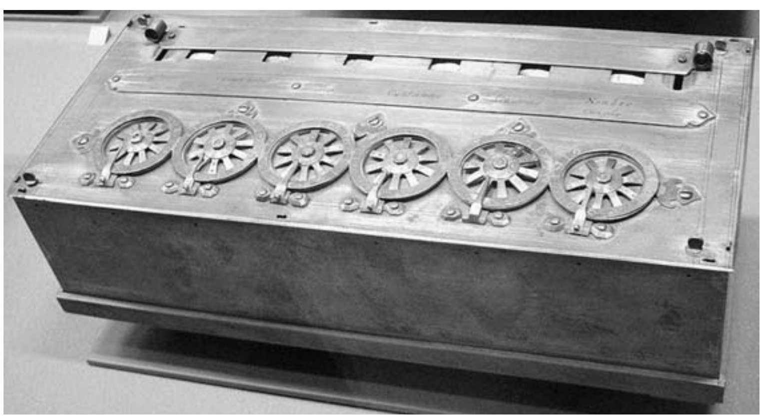



Se si vuol eseguire la moltiplicazione $548 \cdot 692$, si calcolano separatamente i prodotti $548 \cdot 6$, $548 \cdot 9$ e $548 \cdot 2$ e poi si sommano, dopo averli moltiplicati per le opportune potenze di 10.

## 5. Le addizionatrici meccaniche

### La pascalina

Inventata da Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 1623 – Parigi 1662) nel 1642, è una macchina addizionatrice che, grazie a un «trucco» matematico, serve anche ad eseguire sottrazioni.



Si imposta il primo addendo sulle rotelline, che poi si fanno girare per aggiungere il secondo addendo. Le rotelline sono costruite in modo che, quando una fa un giro completo, quella alla sua sinistra avanza di uno scatto.

Il trucco per sottrarre è mostrato nell'esempio:

427 – 156 diventa 427 + 843 = 1270 che diventa 271.

Il 156 diventa 843 se ogni sua cifra viene sostituita dal suo complemento a 9. Trovata la somma, l'1 a sinistra viene cancellato e si aggiunge 1 a ciò che resta.

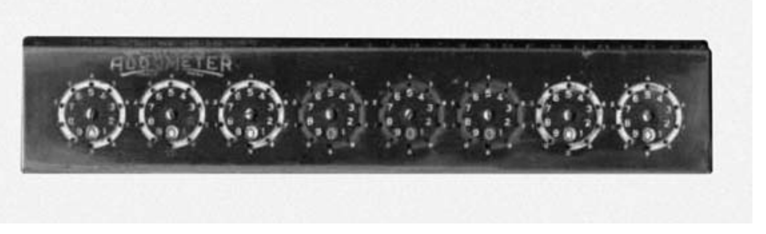
Se il sottraendo ha meno cifre del minuendo, lo si completa con i necessari zeri a sinistra:

591 – 68 diventa 591 – 068 che diventa 591 + 931 = 1522 che diventa 523;

7423 – 54 diventa 7423 – 0054 che diventa 7423 + 9945 = 17'368 che diventa 7369.

**L'addometro**

È uno strumento basato sulla pascalina, con la differenza che le rotelline sono mosse con uno stilo.

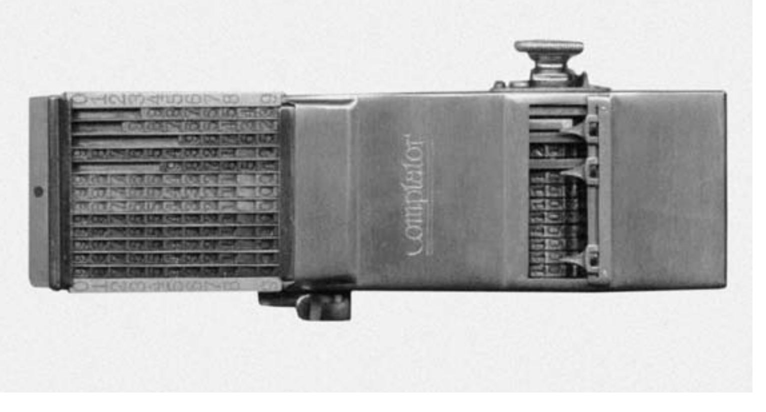



**Il Comptator**

È una macchinetta prodotta in Germania a partire dal 1908.

Dopo aver impostato il primo addendo, con uno stilo si spostano le colonne: il risultato appare nella finestra in basso.

La sottrazione si esegue con il metodo dell'addizione (vedi *La pascalina*). È il «padre» di una famiglia di macchine di varia forma e dimensione basate sullo stesso modo di procedere. Sostanzialmente, anche le addizionatrici meccaniche a manovella o a tasti funzionano allo stesso modo.



## 6. Le moltiplicatrici meccaniche

Sono macchine che, oltre all'addizione, permettono di eseguire anche la moltiplicazione e, invertendo la procedura, la divisione.

Per realizzare macchine di questo tipo occorre che esse soddisfacciano due condizioni:

– che si possa registrare il moltiplicando,

– che si possa spostare il registro dei dati rispetto a quello del risultato, così da poter eseguire le addizioni dei risultati parziali nelle giuste posizioni.

La loro comparsa avviene a partire dal '700, grazie ai lavori di Gottfried Wilhelm von Leibniz (Lipsia 1646 – Hannover 1716), Philip Mathäus Hahn (Scharnhausen 1739 – Echterdingen 1790), Charles Xavier Thomas de Colmar (Colmar 1785 – Parigi 1870), Giovanni Poleni (Venezia 1683/5 ? – Padova 1761) e di altri.

I tipi più antichi consentivano di moltiplicare per numeri di una sola cifra, procedendo per addizioni successive. Solo nel 1888 Léon Bollée (Le Mans 1870 – Neully sur Seine 1913) ebbe l'idea di incorporare nella macchina un «corpo moltiplicatore» così da poter usare anche moltiplicatori a più cifre.

L'optimum meccanico fu raggiunto con la Curta.

**La Curta**

Fu inventata da Curt (da cui il nome) Herzstark (Vienna 1902 – Nendeln 1988) che ne ottenne il brevetto nel 1937. Come si può immaginare, visto il suo cognome, Herzstark fu arrestato e rinchiuso nel campo di concentramento di Buchenwald nel 1943. La sua macchina, però, aveva suscitato molto interesse presso le SS, che volevano farne un «regalo per la vittoria» a Hitler: di conseguenza Herzstark poté continuare a svilupparla in un laboratorio segreto. Liberato da Buchenwald nel 1945, fondò nel 1946 la ditta Contina nel Liechtenstein: la prima Curta prodotta in serie vide la luce nel 1948. Quando, nel 1972 ne venne interrotta la produzione, ne erano stati prodotti circa 150'000 esemplari!

Ecco la Curta, il «macinino del caffè», come veniva affettuosamente chiamata:

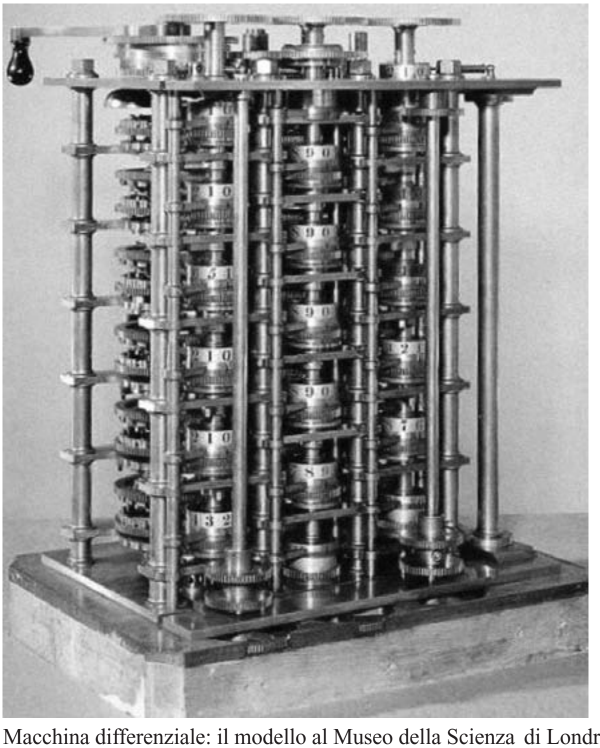

Curta Type I.


Curta Type II.

## 7. Le macchine di Babbage

### La macchina differenziale

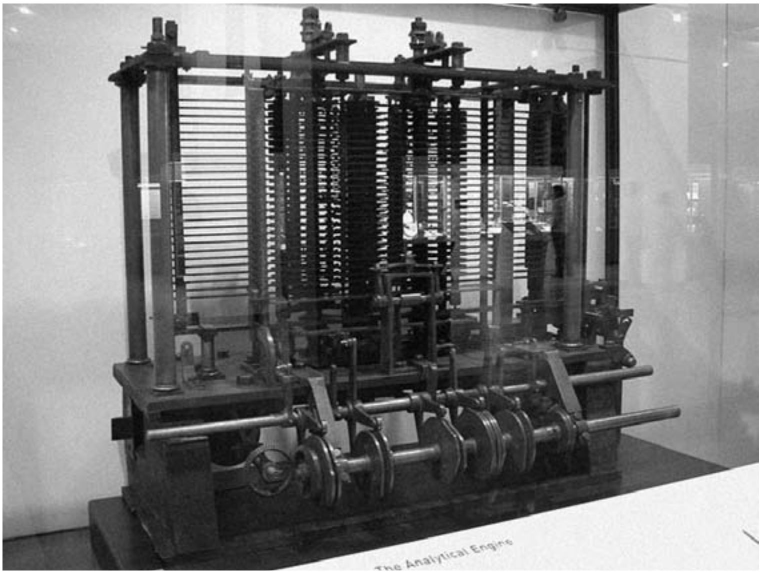
Nel 1822, Charles Babbage (Londra 1791 – Londra 1871) presentò alla Royal Astronomical Society un suo lavoro con il quale si prefiggeva di costruire una *macchina differenziale* che producesse tabelle con i valori che assumevano i polinomi quando si fosse sostituita la variabile con un dato valore. L'idea venne approvata e la costruzione della macchina fu iniziata, ma mai portata a buon fine: solo nel 1991 ne fu costruita una funzionante, basata sui progetti di Babbage del 1849. Si trova al Museo della Scienza di Londra.



Macchina differenziale: il modello al Museo della Scienza di Londra.

### La macchina analitica

Babbage, tra il 1833 e il 1842, tentò di costruire la *macchina analitica*, che avrebbe dovuto eseguire qualsiasi tipo di calcolo, con tanto di processore aritmetico, unità di controllo, meccanismo di uscita e una memoria: un vero e proprio computer come lo intendiamo noi oggi. Il progetto si arenò completamente per svariati motivi nonostante il sostegno di Lady Ada Lovelace, che addirittura scrisse programmi per la macchina: si può quindi dire che Lady Ada è stata la prima programmatrice della storia. Nel 1855 due svedesi, padre e figlio, Georg e Edvard Scheutz, costruirono con successo una macchina differenziale, basata su un progetto di Babbage del 1834. Babbage fu tra quelli che la visionarono e ne diede un giudizio positivo.




Modello di una parte della macchina analitica, in mostra al Museo della Scienza di Londra.

## 8. I computer

Che cosa è un computer? Che cosa lo differenzia dagli altri strumenti di calcolo? Una definizione soddisfacente è questa:

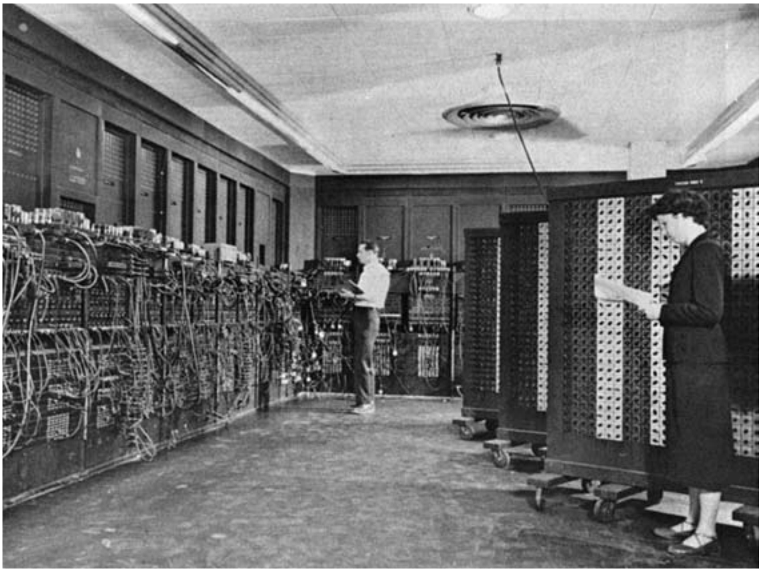
*Un computer automatico è una macchina che manipola simboli secondo regole date in modo predeterminato e auto-diretto*

La parola più significativa è «auto-diretto». Qualsiasi precedente dispositivo di calcolo, che si tratti di un abaco o di una calcolatrice, deve essere diretto da altri, cioè l'operatore deve intervenire personalmente.

Anche se qualche cosa che si può chiamare computer era già stato costruito nel 1915 dalla Ford e nel 1930 al Massachusetts Institute of Technology (MIT) sotto la direzione del matematico Vannevar Bush (Everett 1890 – Belmont 1974), un importante passo avanti si ebbe nel 1939, quando il fisico Howard Aiken (Hoboken 1900 – St. Louis 1973) costruì un computer elettromeccanico sequenziale e digitale che, oltre che calcolare, poteva eseguire delle scelte.

**L'ENIAC**

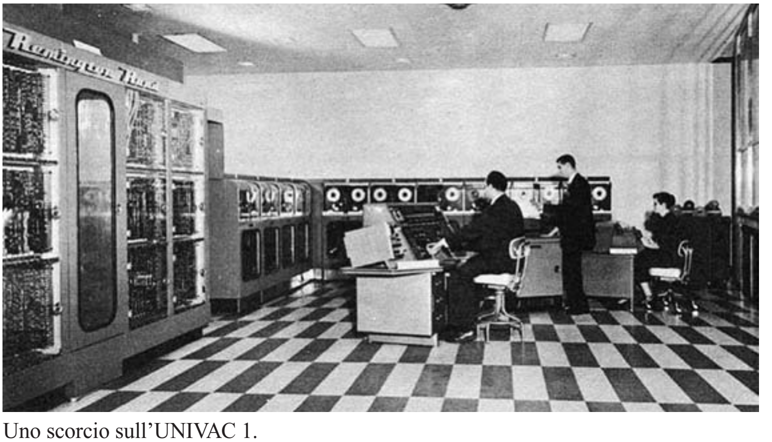
Un passo decisivo si ebbe nel 1946, quando John Adam Presper Eckert (Filadelfia 1919 – Bryn Mawr 1995) e John William Mauchly (Cincinnati 1907 – Ambler 1980), che più tardi avrebbero fondato una ditta che divenne la Divisione UNIVAC della Sperry Rand, costruirono il primo computer elettronico: si tratta dell'ENIAC, acronimo di Electronic Numerical Integrator Automatic Computer.



Uno scorcio sull'ENIAC.
La sua programmazione avveniva spostando i cavi che si vedono a sinistra.

**L'UNIVAC 1**

L'UNIVAC 1 (UNIVersal Automatic Computer), il cui primo modello fu fornito nel 1951 all'United States Bureau of Census, è stato il primo computer a essere commercializzato.




Uno scorcio sull'UNIVAC 1.

Sia ENIAC sia UNIVAC 1 si basavano sulla tecnologia dei tubi a vuoto, che scaldavano come molte stufe e si rompevano spesso. Solo nel 1959 la IBM produsse una versione del modello 709 nella quale, per la prima volta, furono usati i transistor. Si poté così cominciare a rendere più affidabili i circuiti e a miniaturizzarli.

Né si può dimenticare il contributo di John von Neumann (Budapest 1903 – Washington 1957) con la sua tipologia di architettura hardware (architettura di von Neumann).

**L’Olivetti P101**

Oltre ai grandi computer, che non vale la pena di citare uno per uno, si costruirono gli antesignani degli attuali personal computer.

Una dei primi computer da tavolo fu l’Olivetti Programma 101, noto come P101, che arrivò persino al Liceo di Lugano e sul quale si sono fatti le ossa ben più di pochi appassionati, tra i quali, oltre al sottoscritto, è da annoverare un certo Gianfranco Arrigo che, del sottoscritto in questione, è stato mentore.

Fu sviluppato tra il 1962 e il 1964 per la Olivetti di Ivrea dall’ing. Pier Giorgio Perotto (Torino 1930 – Genova 2002) che così ne scrive:

*Nel 1965 non esisteva l’idea stessa di strumento di elaborazione «personale», con programma, supporto magnetico per l’ingresso e l’uscita dei dati e delle istruzioni, totalmente autosufficiente, da mettere sulla scrivania di un qualsiasi impiegato di un ufficio. Potevamo pensare che la macchina avrebbe potuto più facilmente essere accolta negli ambienti tecnico-scientifici, ma anche lì c’era il timore che questi fossero abituati ad usare strumenti di elaborazione più potenti, anche se più scomodi e meno accessibili. Questi ambienti avrebbero rappresentato comunque un mercato abbastanza limitato.*


Eccolo, il (o «la») P101, in tutto lo splendore del suo *design*, opera di Marco Bellini.

**Il PC1 della IBM**

Il primo PC fornito dal Canton Ticino agli uffici e alle scuole è stato l'IBM Personal Computer (IBM PC), presentato nel 1981. Funzionava bene, e sopportava parecchi programmi, tra cui il famoso Framework, ma per fargli fare ciò che si voleva bisognava dargli ordini da tastiera con un linguaggio ben poco perspicuo. Ma era ciò che passava il convento…

Il PC1 della IBM, modello 5150. Si noti che non ha il mouse.

**Il Commodore C64**

Presentato nel 1982, detiene il record (riconosciuto dal Guinness dei primati) di computer più venduto al mondo: in totale più di 17'000'000 di esemplari. Programmabile in BASIC, giunse anche nelle nostre scuole, dove molti docenti e allievi impararono a programmare con un linguaggio «di alto livello».

Il C64 nudo (così come veniva venduto)…

… e con tutte le periferiche che vi si potevano/dovevano aggiungere.

**Il McIntosh 128K**

Il rivoluzionario McIntosh 128K della Apple, il «Mac», presentato con un «boom» nel 1984, è il capostipite di una numerosissima dinastia di McIntosh. Fu il primo computer da tavolo con interfaccia grafica e mouse di serie.


Il McIntosh 128K, si vedono il Mac, la tastiera e il mouse di serie.
La scatoletta a destra è una memoria esterna, opzionale.

## 9. Le calcolatrici elettroniche

Grazie alla miniaturizzazione dei componenti elettronici, in particolare con i circuiti integrati, arrivarono sul mercato anche le calcolatrici elettroniche.

**La HP-35**

Prodotta dalla Hewlett Packard a partire dal 1972, la HP-35 è la prima calcolatrice tascabile scientifica. Utilizzava la notazione polacca inversa, per la quale occorre una «pila» (*stack*) dove vengono introdotti i dati; poi si introducono gli operatori, che prelevano i dati dalla cima della pila. Con tale notazione non si usano mai parentesi, ma bisogna veramente farci il callo.

Ad esempio per calcolare l'espressione
(7:3) : ((1 – 4) · 2) + 1

si introducono i dati e gli operatori così:
7 E 3 / 1 E 4 – 2 E* / 1 E +


La HP-35 del 1972. Il tasto ENTER (E nell'esempio sopra) serve per separare i dati ed introdurli nella pila.

### La SR-10 e la TI-30

Introdotta nel 1973 dalla Texas Instruments, la SR-10 adottava il sistema algebrico di introduzione dei dati (quello solito e noto a tutti). SR significa *slide rule* cioè regolo calcolatore. Fu seguita nel 1976 dalla TI-30, ben più nota alle nostre latitudini.

La SR-10.


La TI-30.

### La HP-65

Messa sul mercato nel 1974, la HP-65 è stata la prima calcolatrice elettronica programmabile. La presenza del tasto ENTER indica che usa la notazione polacca inversa.


Il resto è cronaca…

## 10. Considerazioni didattiche

Ai primi del ’200 Fibonacci introduce in Europa la notazione arabo-indiana e mostra gli algoritmi di calcolo ad essa connessi. Volendo forzare un po’ il significato dei termini, si può dire che tali algoritmi sono *macchine di calcolo*. In effetti, chi vi fa capo non si preoccupa di sapere come la *macchina* funziona: dà per scontato che funzioni, e riduce così la propria fatica.

Ci si può allora domandare: di tutti gli strumenti inventati per diminuire la fatica del calcolare, quali sono entrati nell’uso corrente delle nostre scuole?

Purtroppo la risposta è: ben pochi, per non dire nessuno.

In realtà, la faccenda può essere riassunta in questi termini: quando un ragazzo ha imparato a sommare «passando la decina» e ha memorizzato la parte utile della tavola pitagorica, deve ancora imparare le basi del far di conto. Ciò significa che deve saper calcolare, e anche stimare, 42 + 107, così come 74 x 36, 681 : 59 e poco più. «Saper calcolare» è una locuzione che va precisata, ma non è questa la sede per farlo: rinvio agli scritti di Gianfranco Arrigo in vari numeri del Bollettino. Che senso ha calcolare in colonna il prodotto di un numero di 5 cifre per un altro di 6? Se una tale iattura dovesse capitare, si può ben prendere in mano una calcolatrice ed eseguirlo, dopo aver stimato che il risultato dovrebbe avere circa undici cifre.

In buona sostanza, sostengo che è sciocco non adoperare nella scuola gli strumenti che la tecnologia odierna ci mette a disposizione. Fosse solo perché, se non si adoperano intelligentemente e responsabilmente a scuola, verranno comunque usati, quasi sicuramente male, fuori da essa.

E non mi riferisco solo alle *macchinette*, penso anche, e soprattutto, ai computer connessi alla rete e ai cellulari. Chi leggerà il rapporto «Minori e internet 2012» o, se vuole far meno fatica, la «Presentazione ppt 2012» di Lara Zgraggen e Michele Mainardi, testi scaricabili da http://www.supsi.ch/home/ricerca/progetti/dettaglio.628.html non potrà più nascondersi dietro un dito e rifiutarsi di rispondere, a giornalisti e genitori, «per non svegliare il can che dorme». Perché il cane è tutt’altro che addormentato: è ben sveglio, abbaia e, talvolta, morde.

Qui si parla di aritmetica (anche se non soltanto) e quindi un calcolino ci sta.

Supponendo che un/a allievo/a di Scuola media dedichi 10 ore al giorno alle sue necessità fisiologiche, egli/ella sarà sveglio 365 x 14 = 5110 ore all’anno, di cui 35 x 35 = 1225 passate a scuola. Sarà quindi totalmente padrone di sé stesso per 5110 – 1225 = 3885 ore all’anno. Ora 1225 rappresenta il 24% e 3885 il rimanente 76% della sua vita da sveglio. La proibizione dell’uso dei prodotti tecnologici a scuola contribuisce quindi, forse, a risolvere i problemi della sede scolastica, ma sicuramente non mette al riparo nessuno dai conclamati pericoli di internet e dei cellulari. Né la tolleranza passiva è una buona soluzione, che può solo consentire un loro uso scorretto e/o non pertinente.

Bisogna poi guardare il problema dai suoi due lati: pericoli, sì, di internet e dei cellulari, ma anche le loro «virtù». Non sto sostenendo che l’uso corrente, «normale» delle tecnologie dell’informazione e della comunicazione (TIC, in inglese ICT) nella scuola sia la panacea: sostengo semplicemente che le TIC sono un potente mezzo di miglioramento dell'attività didattica. E per «uso corrente» intendo proprio «uso corrente»: ben vengano gli specialisti a dare informazioni su punti precisi, ma non ci si accontenti. Ha detto John Dewey, ma ben prima di lui Confucio: «se ascolto dimentico, se vedo ricordo, se faccio capisco». Quindi: facciamo, e facciamoli fare!

Il 6 settembre ultimo scorso la RSI ha messo in onda un numero di Falò che si può rivedere qui http://la1.rsi.ch/falo/welcome.cfm?idg=0&ids=963&idc=43259.

Invito a guardare almeno il video «Touch School», ma anche «Generazione connessa», che offre spunti molto interessanti. Naturalmente, spunti interessanti, per parecchi versi, si possono ricavare anche da «Studio con Manuele Bertoli e collegamenti con la Scuola media di Chiasso». Non vorrei, d'altra parte, che qualche collega si trovasse d'accordo con le troppe banalità che si leggono nel Forum.

## Debito

Per la prima parte, fino alla Curta, mi sono rifatto a
http://www.rechenhilfsmittel.de/zahlen.htm

## Per approfondimenti

Sulla storia sei sistemi di numerazione:
http://web.unife.it/altro/tesi/A.Montanari/numerazi.htm
http://www.riflessioni.it/enciclopedia/numeri.htm

Sul Liber abbaci:
http://mathematica.sns.it/media/volumi/20/Scritti%20Vol%201_bw.pdf

Sull'abaco:
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Arithmetic/SuanPan.shtml
http://www.ee.ryerson.ca/~elf/abacus/index.html
http://webhome.idirect.com/~totton/abacus/
… e, per curiosità:
http://www.youtube.com/watch?v=yj7XbnYrIk0&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=LXynrhW7tKo&feature=related
http://www.youtube.com/watch?v=KwY9oazPqGg&feature=related

Sulle addizionatrici meccaniche
http://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_calculator
http://www.rechenwerkzeug.de/comptatoranl.htm

Sulla Curta:
http://www.curta.de/

Su Charles Babbage e le sue macchine:
http://it.wikipedia.org/wiki/Charles_Babbage

Sull'ENIAC e macchine sue contemporanee:
http://en.wikipedia.org/wiki/ENIAC
http://www.old-computers.com/history/detail.asp?n=61&t=3

Sull'UNIVAC:
http://en.wikipedia.org/wiki/UNIVAC_I
http://www.old-computers.com/history/detail.asp?n=62&t=3
Su John von Neumann e la sua architettura:
http://it.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann
http://it.wikipedia.org/wiki/Architettura_di_von_Neumann

Sui computer da tavolo:
http://it.wikipedia.org/wiki/Olivetti_Programma_101
http://www.piergiorgioperotto.it/libriperotto/programma%20101/101.htm
http://it.wikipedia.org/wiki/PC_IBM
http://www-03.ibm.com/ibm/history/exhibits/pc25/pc25_birth.html
http://it.wikipedia.org/wiki/Commodore_64
http://www.computermuseum.it/museum/Commodore_64.htm
http://it.wikipedia.org/wiki/Macintosh_128K
http://lowendmac.com/history/index.shtml
… e, sempre per curiosità:
http://www.youtube.com/watch?v=OYecfV3ubP8

# 2. Il *mito* della Matematica Vedica per una riflessione sul sistema posizionale decimale[1]

Francesco Locatello[2]

This article summarizes a historical and mathematical research focused on the exposition of the «vedic» theory of the arithmetic, useful to introduce a reflection on the meaning and the elegance of the positional system for the development of a mathematical thought looking for excellence from the primary school. I want to show how, beyond the mechanic rules there is a meaningfull method, useful also for the student who will not love mathematic.

## 1. Premessa

In questo articolo vengono esposti alcuni algoritmi della tradizione matematica indiana, presentati dal punto di vista del controverso interesse storico (legato prevalentemente alla questione della paternità del metodo di cui sarà data in seguito trattazione esaustiva), sfruttati per una riflessione matematica sull'uso del sistema posizionale. Lo studio dell'effettivo valore pedagogico viene lasciato ai professionisti del campo.

## 2. Storia della matematica vedica e della sua diffusione

La matematica vedica è un ramo della matematica, sviluppatosi dal 3000 a.C. in India nella Valle dell'Indo. Vi sono diverse controversie in merito all'originalità di questa matematica, che tuttora è un argomento poco conosciuto. Il metodo vedico ultimamente è tornato in auge grazie alle «scoperte» di Tirthaji, studioso di filosofia, lingue e matematica, attorno al 1965 con la pubblicazione di Vedic Mathematics. Questo libro segna una vera e propria svolta, perché vuole rappresentare la prima trattazione veramente completa della tradizione matematica indiana.

Proprio intorno alla sua opera vi sono le maggiori diffidenze, anche se ormai sembra accertato che gli algoritmi proposti non siano completamente tradizionali (anzi, la buona parte non lo sono). Le fonti storiche da cui avrebbe dedotto i *sutra* (che non sono presenti nei Veda[3]) sono più che discutibili: l'autore dichiarò infatti di aver trovato un'appendice sconosciuta ai Veda che però non ha reso pubblica.

1. Sullo stesso argomento, si veda anche l'articolo di Giorgio Mainini, pubblicato sul numero 59, dicembre 2009, pagg. 105-112.
2. Studente ingegneria dell'informazione, Università degli Studi di Padova.
3. I Veda sono un'antichissima raccolta in sanscrito di testi sacri dei popoli arii che invasero l'India settentrionale intorno al XX secolo a.C., e che costituiscono la civiltà religiosa vedica. A partire dalla nostra era, esse sono opere di primaria importanza per l'Induismo.

Dal punto di vista dell'osservatore esterno sembra proprio simile all'aneddoto sui pitagorici e la diagonale del quadrato: proteggere la filosofia in cui si crede è più importante della verità. L'autore infatti aderiva all'idea secondo cui nei Veda fosse velatamente scritta tutta la conoscenza che l'uomo potrà mai raggiungere.

Negli ultimi decenni, la matematica indiana (grazie anche all' aggettivo evocativo e un po' naif «vedico») ha avuto una notevole diffusione, soprattutto negli Stati Uniti (dal momento che i testi sono scritti nella forma di inglese parlata in India), cominciata in maniera se vogliamo un po' pragmatica a causa del minor prezzo richiesto per le ripetizioni di matematica dai professori indiani. Il tema dell'uso educativo del metodo è ancora privo di rilevanti studi e ricco di controversie: da un lato il mondo occidentale lo esalta, dall'altro l'India lo vieta (probabilmente però qui la motivazione religiosa ha un peso non indifferente; a tal proposito si veda in Dani, 1993). Però alcuni algoritmi proposti si prestano ad essere facilmente interiorizzati e risultano essere molto veloci per il calcolo mentale e meno meccanici e richiedono un approccio attivo al momento dell'applicazione.

Sono da segnalare le applicazioni del metodo a livello di didattica elementare dei professori Satish Sharma e Kenneth Williams in due scuole inglesi[4].

Interessante dal punto di vista ingegneristico è anche l'uso di uno degli algoritmi di moltiplicazione per costruire un moltiplicatore binario, da integrare in una CPU, più efficiente di quello tradizionalmente usato per il calcolo di moltiplicazioni fra numeri grandi e per il calcolo della *fast fourier transform*[5].

La matematica vedica (quella storica, non quella di Tirthaji) è stata spesso accusata di non essere originale, specialmente in epoca coloniale; a tal proposito cito la frase di Kaye, del 1915, illuminante sotto questo punto di vista:

«I risultati dei Greci in matematica e in arte costituiscono i capitoli più stupendi della storia della civiltà e questi risultati sono oggetto dell'ammirazione degli studiosi occidentali. È quindi naturale che gli occidentali, indagando sulla storia della conoscenza, abbiano cercato tracce dell'influenza greca nelle manifestazioni posteriori dell'arte e in particolare della matematica». (George Gheverghese Joseph, 1991, pag. 216)

Secondo questa lettura la matematica vedica viene quindi considerata frutto dell'influenza dei Greci in oriente. Ora è ampiamente dimostrato che Kaye si sbagliava, essendo stata appurata la sua scarsa conoscenza del sanscrito, indispensabile nell'approccio diretto ai classici della matematica vedica (in cui i numeri stessi sono espressi in maniera linguistica).

Oggi, seppur sia provata l'originalità di molte intuizioni dei matematici indiani, molti mettono ancora in dubbio l'originalità di questi algoritmi. Vennero però trovati diversi manoscritti (quello Bakhshali ad esempio) volti a sostenere l'originalità

4. Si veda in en.wikipedia.org/wiki/Bharati_Krishna_Tirtha's_Vedic_mathematics
5. La trasformata di Fourier veloce (spesso indicata come FFT, dall'inglese Fast Fourier Transform) è un algoritmo ottimizzato per calcolare la trasformata discreta di Fourier. Grazie al basso costo computazionale, è di grande importanza per una grande varietà di applicazioni: dall'elaborazione di segnali digitali alla soluzione di equazioni differenziali, alle derivate parziali e agli algoritmi per moltiplicare numeri interi di grandi dimensioni.

delle tesi indiane, ma la discussione – almeno in alcune parti – resta aperta. In alcuni campi si può tranquillamente affermare l'anticipo della matematica orientale (non solo indiana) sulla matematica greca e occidentale ma, data la difficoltà del rapporto diretto con le fonti, le questioni aperte sono destinate a rimanere tali.

Il tema dell'originalità di questo metodo (o di parte di esso) però non ne toglie il fascino e il successo dal punto di vista puramente matematico: pertanto se da un lato è possibile criticarne storicamente molti punti (anche se ormai parte di esso viene considerata originale, tolto ovviamente il discorso sul *Vedic mathematics*) la correttezza della procedura e dei risultati possono essere verificati e matematicamente accettati.

Lo studio diretto della matematica vedica è estremamente complesso poiché inseparabile dallo studio del sanscrito. Questa lingua deriva dalla matrice linguistica indoeuropea importata in India dai pastori ariani nel 1500 a.C. che distrussero la civiltà di Harappa, la la cui geometria fu applicata soprattutto alla costruzione di altari geometrici in mattoni. Nel corso del tempo il sanscrito ebbe un'evoluzione sufficiente per permettere la dissertazione filosofica, religiosa e scientifica. Il suo potenziale per l'uso scientifico aumentò in seguito all'opera di sistematizzazione grammaticale operata da Panini circa duemilasettecento anni fa su una base di 4000 *sutra* (cioè regole espresse in forma di aforisma), dopo i quali la lingua non ebbe variazioni particolarmente significative per circa 2000 anni. La conseguenza indiretta, dal punto di vista scientifico e matematico, degli sforzi di Panini per rendere più semplice e rigorosa la grammatica del sanscrito appare se paragoniamo la lingua degli indù alla geometria euclidea: infatti in Grecia la matematica ebbe origine dalla filosofia, mentre in India la sua nascita fu una conseguenza dei progressi linguistici. In effetti l'organizzazione della lingua in *sutra* (che possono essere paragonati ai postulati euclidei, anche se spesso più sintetici), partendo da 1700 elementi semplici (vocali, consonanti, sostantivi, pronomi ecc.), non è molto diversa dal modo in cui si specifica un teorema: partendo da una serie di postulati si deducono teoremi. D'altronde si può affermare che il carattere algebrico della matematica indiana non è altro che il sottoprodotto della tradizione linguistica di rappresentare i numeri con le parole (e non con le lettere come in Grecia) (Gheverghese Joseph, 1991, pag. 218).

La matematica indiana si divide in due tradizioni, quella antica e quella classica. Io mi occuperò solamente di quella antica, che arriva fino al 400 d.C. e che risulta comunque essere molto avanzata rispetto alla contemporanea matematica europea: si ha infatti l'uso del sistema posizionale decimale, lo zero, l'algebra delle equazioni lineari, quadratiche, sistemi di equazioni, radici quadrate e istruzioni dettagliate per la rappresentazione di incognite e numeri negativi (Srinivasiengar, 1967, pag. 2).

Tra il 400 d.C. e il 1200 d.C. vi è la matematica indiana classica che termina con l'invasione dell'India da parte di dinastie mussulmane.

Uno dei problemi dell'interpretazione di testi indiani è l'uso degli aforismi che spesso li rendono quasi incomprensibili. Inoltre secondo la loro filosofia il maestro dava una regola al discepolo che doveva meditare su come egli fosse giunto a tali conclusioni, pertanto nei testi difficilmente sono presenti dimostrazioni, lasciate come compito al discepolo. Questa «tradizione» viene adottata ancora oggi nei moderni testi di matematica vedica (Tirthaji ad esempio).

### 2.1. Approccio all'articolo

Ho scritto l'articolo utilizzando la notazione e i *sutra* del *Vedic Mathematics* per evitare di allontanarmi dalla terminologia che gli altri testi riportano, quindi con perdita di chiarezza espositiva. Invito però il lettore a non soffermarsi sui *sutra* né tantomeno sull'uso di essi come se fossero mistiche regole matematiche. Non si vuole assolutamente aderire alla moda della matematica indiana, ma prendere ciò che di buono ha da offrire. L'invito pertanto è di capire dal punto di vista algebrico il corretto ragionamento. Le parti sicuramente originali della tradizione indiana sono l'algoritmo di moltiplicazione a croce (si veda paragrafo 6.1), l'invenzione dello zero e dei grandi numeri e l'uso dei numeri vincolo. Questi sono anche gli argomenti più interessanti e utili matematicamente, a cui aggiungo gli ultimi due metodi di divisione (paragrafi 8.2 e 8.3), il primo applicazione algebrica del teorema di Ruffini, il secondo ottimizzazione dell'algoritmo di divisione che si usa comunemente, con notevoli affinità con la divisione fra polinomi.

## 3. Il sistema decimale, l'introduzione dello zero e dei grandi numeri

La principale innovazione storicamente accertata che gli Indù hanno portato migliaia d'anni fa e che viene attualmente impiegata persino nella nostra tecnologia dei chip al silicio, è l'invenzione dello zero e dell'uso del punto decimale. Noi chiamiamo i nostri numeri «arabi» ma, in realtà, essi risalgono al concetto indù di creazione e vuoto: il *Bindu* o meglio «il Punto Zero». Tutta la matematica vedica è basata sulla consapevolezza dell'Unità, che significa l'uso delle basi numeriche corrispondenti a: 10, 100, 1'000, 10'000 ecc. ognuna delle quali equivale a 1. Ciò è estremamente interessante se lo rapportiamo alle basi canoniche. La stessa notazione è diversa perché gli indiani dopo il migliaio separano gli zeri ogni due cifre anziché tre, e nelle operazioni la base a cui il numero fa riferimento occupa un ruolo centrale.

| Inglese britannico | Notazione | Inglese indiano | Notazione |
|---|---|---|---|
| Ten | 10 | Ten | 10 |
| Hundred | 100 | Hundred | 100 |
| Thousand | 1'000 | Thousand | 1000 |
| Ten thousands | 10'000 | Ten thousand | 10'000 |
| Hundred thousands | 100'000 | Lakh | 1'00'000 |
| One million | 1'000'000 | Ten lack | 10'00'000 |
| Ten millions | 10'000'000 | Crore | 1'00'00'000 |
| Hundred millions | 100'000'000 | Ten crore | 10'00'00'000 |

Tabella 1. Da Alex Bellos, 2010, pag. 137

Utilizzando queste basi gli Indiani riuscirono a concepire numeri immensi (senza esprimerli come potenze di 10, ma con apposite nomenclature), ben più grandi della «miriade» greca (10'000). Infatti secondo un testo sacro del IV secolo il Buddha, sfidato a esprimere i numeri più grandi che conoscesse, utilizzò sistemi di parole composti da 24 termini l'uno, ognuno dei quali è 100 volte il precedente, arrivando così[6] a $10^{421}$.

Questo numero è un numero immenso: si stima che nell'universo vi siano $10^{80}$ atomi, se prendiamo il più breve intervallo misurabile, noto come intervallo di Planck – un secondo diviso in $10^{43}$ parti – ci sono state $10^{60}$ unità di tempo dal Big Bang. Se moltiplichiamo il numero di atomi nell'universo per il numero dei tempi di Planck dal big bang – il che ci dà il numero di posizioni uniche di ogni particella dall'inizio del tempo – siamo ancora a $10^{140}$, ben lontani dal grande numero di Buddha, che non ha alcuna applicazione pratica. (Bellos, 2010, pag. 137)

La ricerca dei grandi numeri si sviluppa fino all'elaborazione del concetto di infinito da parte dei matematici Jaina, anche se non formale dal punto di vista matematico.

I numeri vennero divisi in numerabili (minimi, intermedi e massimi), non numerabili (quasi non numerabili, assolutamente non numerabili e innumerabilmente non numerabili) e infiniti (quasi infiniti, assolutamente infiniti e infinitamente infiniti). Raggiunto N, il massimo numero numerabile si arriva ad infinito con questa sequenza di operazioni

$N+1, N+2, \dots, (N+1)^2$
$(N+1)^2, (N+2)^2, \dots, (N+1)^4$
$(N+1)^4, (N+2)^4, \dots, (N+1)^8$
E così via.

Vengono definite cinque specie di infinito: infinito in una direzione, infinito in due direzioni, infinito nell'area, infinito ovunque, infinito in eterno.

Queste sono idee veramente rivoluzionarie anche se matematicamente non supportate: infatti questi matematici furono i primi a scartare l'idea che tutti gli infiniti fossero equivalenti, mentre in Europa bisognerà aspettare l'opera di Georg Cantor alla fine del XIX secolo per definire le differenze fra gli ordini di infinito.

Il più elevato numero numerabile dei Jaina (N) corrisponde all' «aleph zero» di Cantor, il numero cardinale dell'insieme dei naturali, interi e razionali (Gheverghese Joseph, 1991, pag. 249).

Un'altra innovazione nel campo dell'aritmetica dovuta ai matematici indiani antichi è l'introduzione dello zero e del sistema posizionale. I numeri romani non avevano queste caratteristiche e gestirli è molto più complicato, dal momento che la lunghezza dei numeri non dipende dal loro valore. Inoltre, per moltiplicare due numeri

6. Come riporta Karl Menninger, nel suo libro A Cultural History of Numbers, si narra che Buddha, quando chiese in moglie Gopa, la figlia del Principe Dandaparui, venne sottoposto, con altri cinque pretendenti, a una serie di prove di abilità che superò brillantemente. Alla fine il padre di Gopa gli chiese dì superare un'ultima prova, la più difficile, di matematica (questo dimostra l'alta considerazione in cui gli indiani hanno sempre tenuto la scienza dei numeri), battendosi contro Arjuna, il matematico più celebre del regno. Quest'ultimo gli chiese di elencare le unità degli ordini superiori al koti, che corrispondeva a 10 milioni. Buddha non solo le elencò tutte, fino a $10^{53}$, un numero chiamato tallaksana, ma andò oltre con una serie di sequenze di numeri, simili a quelle trovate da Apollonio e da Archimede, che si concludeva con $10^{421}$.

tra loro, si usava il metodo egizio, ovvero la scomposizione di un fattore in somme di potenze di due e realizzando una tabella di doppi dell'altro.

Ad esempio, se vogliamo moltiplicare, 57×43
scomponiamo il 57= 32+16+8+1,
costruiamo la tabella dei doppi per il 43,
1×43=43
2×43=86
4×43=172
8×43=344
16×43=688
32×43=1376

Il prodotto cercato è equivalente alla somma dei numeri nella tabella dei doppi corrispondenti alle quantità nella scomposizione:
57×43=1376 + 688 + 344 + 43 = 2451

I termini indù per indicare i numeri invece si riferivano al nome della posizione e il numero in essa, partendo da destra andando verso sinistra. Così, tralasciando i nomi delle basi, il numero 422396 veniva chiamato sei, nove, tre, due, due, quattro. Ogni numero nella lista ha un valore che dipende dalla sua posizione; il sistema posizionale però richiede l'uso di un «segnaposto», nel caso in cui non siano necessarie tutte le cifre. L'invenzione di questo «segnaposto» è probabilmente dei babilonesi, che scrivevano i simboli numerici in colonne e in base sessagesimale e come segnaposto lasciavano uno spazio bianco, presto sostituito da un simbolo, un indicatore che significava l'assenza di un valore. Nel sistema babilonese questo simbolo non veniva considerato un numero a tutti gli effetti, cosa che nemmeno i romani fecero, sebbene utilizzassero l'abaco che lo contiene necessariamente (fondandosi sul sistema posizionale).

In India lo zero (*shunya*) mosse timidamente i primi passi finché venne dimostrato il suo comportamento nei confronti degli altri numeri. Le regole per le proprietà dello zero vennero esplicitate come segue, intendendo con *fortuna* un numero positivo e con *debito* un numero negativo:

*«un debito meno shunya è un debito* $(-a - 0 = -a)$
*una fortuna meno shunya è una fortuna* $(a - 0 = a)$
*shunya meno shunya è shunya* $(0 - 0 = 0)$
*un debito sottratto da shunya è una fortuna* $(0 - (-a) = a)$
*una fortuna sottratta da shunya è un debito* $(0 - a = -a)$
*il prodotto di shunya moltiplicato per un debito o una fortuna è shunya* $(0 \cdot a = 0 \cdot (-a) = 0)$
*il prodotto di shunya moltiplicato per shunya è shunya* $(0 \cdot 0 = 0)$*»*.
(Bellos, 2010, pag. 145).

L'uso dello zero in questo senso è sintomo di quella notevole capacità di astrazione che portò all'invenzione dei numeri negativi. I Greci fecero prodezze in campo matematico, ma senza zero e senza numeri negativi o frazioni, perché avevano una concezione spaziale della matematica. Per loro non aveva senso niente che non potesse essere qualcosa, un Greco non poteva immaginare un numero negativo come non poteva immaginare un triangolo negativo.

Una curiosità sui numeri indiani è la pluralità dei nomi attribuiti ai numeri da zero a nove. Zero era shunya, etere, punto, buco o il serpente dell'eternità, uno era la terra, la luna, la stella polare o il latte cagliato e così via. L'uso di diversi termini per indicare i numeri si fonda sul contesto in cui dovevano essere usati, conformandosi alle rigide regole del sanscrito in merito a versificazione e metrica. Inoltre, in un'epoca in cui i manoscritti erano estremamente fragili, era utile avere metodi alternativi per ricordare numeri importanti (poesie, filastrocche) e riuscire a comunicarli fra persone che non comprendevano i simboli numerici.

Grazie alla sua facilità d'uso il metodo indiano si diffuse in Medio Oriente, dove fu adottato dal mondo islamico e importato in Europa da Fibonacci con il suo «Liber Abbaci» sul sistema posizionale del 1202. Il metodo arabo-indiano però venne osteggiato dalla Chiesa che ne vedeva la rapidità e l'ingegnosità come opera demoniaca che minacciava coloro che usavano l'abaco per professione. La stessa etimologia richiama il timore degli Europei verso i numeri arabi. Da «Zefiro» derivò «zero», ma anche la parola portoghese «chifre», che significa corna, e la parola inglese «cipher» che significa «codice», probabilmente perché i numeri con uno zefiro venivano usati di nascosto contro il volere della chiesa. Nel 1299 Firenze bandì i numeri arabi sostenendo che erano più facili da falsificare dei numeri romani. Fu solo verso la fine del XV secolo che i numeri romani vennero messi da parte, mentre l'uso dei numeri negativi venne accettato solo nel XVII secolo perché associato alla pratica dell'usura, considerata blasfema. I numeri romani tuttavia sopravvissero là dove non sono necessari calcoli, come documenti legali, capitoli di libri e numerazione dei secoli.

## 4. I sutra

Riporto l'elenco dei sutra per completezza di trattazione, ricordandone la loro dubbia provenienza e utilità. Anzi, applicandoli meccanicamente viene meno tutto il processo di analisi del problema, parte centrale del metodo. I 16 sutra principali sono i seguenti (li riporto in lingua originale e in inglese, con traduzione a lato, dal momento che è in questa forma che vengono citati nei testi di matematica vedica):

1. *Ekadhikina Purvena*
   Significato: By one more than the previous one (uno più che il precedente)
2. *Nikhilam Navatashcaramam Dashatah*
   Significato: All from 9 and the last from 10 (tutto dal 9 e l'ultimo dal 10)
3. *Urdhva-Tiryagbyham*
   Significato: Vertically and crosswise (verticalmente e a croce)
4. *Paraavartya Yojayet*
   Significato: Transpose and adjust (trasponi e aggiusta)
5. *Shunyam Saamyasamuccaye*
   Significato: When the sum is the same, that sum is zero (quando la somma è la stessa essa è zero)

6. *(Anurupye) Shunyamanyat*
   Significato: If one is in ratio, the other is zero (se uno è in rapporto, l'altro è zero)
7. *Sankalana-vyavakalanabhyam*
   Significato: By addition and by subtraction (per addizione e per sottrazione)
8. *Puranapuranabyham*
   Significato: By the completion or non-completion (per completamento o non completamento)
9. *Chalana-Kalanabyham*
   Significato: Differences and Similarities (differenze e somiglianze)
10. *Yaavadunam*
    Significato: Whatever the extent of its deficiency (qualunque sia la misura della sua differenza)
11. *Vyashtisamanstih*
    Significato: Part and Whole (parte e tutto)
12. *Shesanyankena Charamena*
    Significato: The remainders by the last digit (il resto per l'ultima cifra)
13. *Sopaantyadvayamantyam*
    Significato: The ultimate and twice the penultimate (l'ultima e raddoppia la penultima)
14. *Ekanyunena Purvena*
    Significato: By one less than the previous one (di uno meno che il precedente)
15. *Gunitasamuchyah*
    Significato: The product of the sum is equal to the sum of the product (il prodotto della somma è uguale alla somma dei prodotti)
16. *Gunakasamuchyah*
    Significato: The factors of the sum is equal to the sum of the factors (il fattore della somma è uguale alla somma dei fattori).

## 5. Sottrazioni

### 5.1. Sottrazioni da una base

Un sistema molto curioso, applicazione del sutra *tutti dal 9 e l'ultimo dal 10*, è quello usato per calcolare, partendo da un dato numero, la sua espressione come differenza da una potenza di 10. Questo metodo è importante perché i numeri, nella matematica vedica, sono sempre posti in relazione alla loro base più vicina, in modo da non usare le cifre sopra il 5. La tecnica è veramente semplice. Analizziamola tramite un esempio numerico:

64 = 100 – 36,
ricavato come sottrazione di 4 dal 10 e 6 dal nove.

Analogamente:
445 = 1000 – 555
Ovvero l'unità di 445 dal 10 e i restanti numeri, i due 4, dal 9.

Questo sistema, così semplice e immediato può risultare utile nella vita quotidiana per calcolare il resto che ci deve essere dato se paghiamo con una banconota. Ad esempio se noi utilizziamo una banconota da 10 € per pagare qualcosa che ne costava 5,34, il calcolo del resto è immediato.

Ragioniamo con i centesimi (per scrivere i numeri senza virgola, però il passaggio non è più necessario una volta capito il meccanismo) convertendo le cifre che prima avevamo in euro:

dobbiamo pagare 534 centesimi e ne abbiamo dati 1000.

In sostanza dobbiamo trovare la distanza di 534 dal 1000.

Operando nel modo sopra esposto sottraiamo la cifra delle unità, cioè 4, dal 10 e le restanti dal 9 ottenendo 466 centesimi, cioè 4,66 €.

E se invece di 10 € ne avessimo 20?

In tal caso basta considerare il fatto che non ci stiamo rapportando con la base immediatamente vicina a quella rispetto a cui vogliamo calcolare il resto ma a quella successiva: aggiungeremo un 1 alla cifra delle migliaia per ogni multiplo della base 10.

Da 20 € dobbiamo ricevere 14,66 €.

Da 50 € riceveremo 44,66 €.

## 5.2. «Bar numbers» o «numeri vincolo»

Introduciamo ora il concetto di numero vincolo che ci permette di scrivere ogni cifra di un numero come distanza dalla sua base. Il numero 18 ad esempio è molto vicino al 20, quindi può essere scritto comodamente come 20 – 2, e, tramite la simbologia indiana, come $2\underline{2}$ che in inglese si legge: two, bar two (in alcuni testi si trova la cifra negativa sopralineata al numero, ma la notazione è arbitraria).

In italiano non viene data una traduzione ufficiale, viene però letto due, vincolo due.

Dal momento che gli Indiani leggevano i numeri singolarmente (cifra per cifra: ad esempio 234 veniva letto a partire dalle unità quattro tre due) noi, che li leggiamo da sinistra verso destra, dalla potenza maggiore a quella minore, a mio avviso possiamo leggere questi numeri vincolo come numeri negativi, o meglio sottrazioni, a tutti gli effetti.

$2\underline{2}$ si dovrebbe leggere venti meno due.

In realtà risulta più comodo leggere i numeri cifra per cifra (al modo indiano ma da sinistra verso destra, cioè due – che in tale posizione vale 20 – , meno due) così nello svolgere un'operazione mentalmente possiamo iniziare a dare il risultato mentre ancora lo stiamo calcolando.

I numeri vincolo possono essere inseriti in qualunque posizione all'interno di un numero e sono importanti perché ci permettono di esprimere ogni numero utilizzando solo cifre minori di 6.

Il numero 574 ad esempio viene trascritto come

$6\underline{3}4$ cioè $600 - 30 + 4 = 574$

Se vogliamo eliminare anche il 6 di $6\underline{3}4$ allora scriviamo

$1\underline{43}4$ che equivale a $1000 - 400 - 30 + 4 = 574$

Quali sono i vantaggi dello scrivere un numero in questo modo? Cifre basse, maggior possibilità di semplificazioni e maggior frequenza di 1 e 0 che snelliscono molto i calcoli. Inoltre questa tecnica può essere facilmente applicata per compiere le sottrazioni senza considerare i riporti.

Ad esempio
4 5 4 –
$\underline{2\ 8\ 6 =}$
$2\ \underline{3}\ \underline{2}$
Nello specifico:
nelle unità: 4 – 6 = $\underline{2}$ (quattro meno sei uguale meno due)
nelle decine: 5 – 8 = $\underline{3}$ (cinque meno otto uguale meno tre)
nelle centinaia: 4 – 2 = 2
il risultato pertanto si legge due, meno 3, meno 2, si scrive $2\underline{32}$ che significa 200 – 32 = 168

Si evitano i riporti semplicemente sottraendo le cifre e riportando i numeri vincolo dove il risultato della sottrazione sarebbe negativo.

## 5.3. Sottrazioni senza numeri vincolo

Se non vogliamo scomodare questi numeri, possiamo evitarli usando quasi meccanicamente la combinazione dei sutra.
– *Uno più che il precedente*
– *tutti dal 9 e l'ultimo dal 10*

Prendiamo come esempio esplicativo la sottrazione 11111 – 1792.

Il sottraendo può essere scritto anche come 01792 in modo che abbia lo stesso numero di cifre del minuendo. Innanzitutto notiamo che le cifre del sottraendo sono tutte maggiori o uguali di quelle del minuendo. Lo zero è la prima cifra a partire da sinistra quindi applichiamo a questa il primo sutra, innalzando di uno il primo termine del sottraendo, e sottraiamola dalla corrispondente cifra del minuendo.

1 – (0 + 1) = 0

Per quanto riguarda le altre cifre applico il secondo sutra sottraendo ogni singola cifra dal nove e l'ultima dal 10 e SOMMANDOLA a quella corrispondente del minuendo. I vari passaggi per l'esempio proposto sono i seguenti:

1 – (0 + 1) = 0    1 + (9 – 1) = 9    1 + (9 – 7) = 3    1 + (9 – 9) = 1
1 + (10 – 2) = 9

Abbiamo ridotto la sottrazione in una sequenza elementare di addizioni senza riporti, ottenendo il risultato 9319.

Proviamo a fare un esempio più complesso:
423462 – 187175

Prima di partire applicando i nostri sutra notiamo che le cifre del sottraendo sono tutte maggiori di quelle del minuendo, eccetto per la presenza di due uno che spezzano in due parti il sottraendo (non essendoci lì prestito), 187 e 175.

In questo caso, e in tutti i casi simili, l'operazione viene spezzata in due, dividendo le due operazioni. Iniziamo quindi a eseguire la nostra sottrazione mentalmente partendo da sinistra ovvero dalle centinaia di migliaia, ottenendo:

Primo gruppo di cifre:
4 – (1 + 1) = 2
2 + (9 – 8) = 3
3 + (10 – 7) = 6
Secondo gruppo di cifre:
4 – (1 + 1) = 2   6 + (9 – 7) = 8   2 + (10 – 5) = 7
Il risultato è pertanto 236287

In questo caso si nota come sia comodo leggere i numeri cifra per cifra così da poter dichiarare il risultato man mano che lo stiamo calcolando, senza dover tenere a mente tutte le cifre per formalizzarle in un numero alla fine del processo. Guardare al numerale come a un insieme di cifre significa interpretare il numero da un punto di vista più qualitativo che quantitativo, cogliendone le caratteristiche che permettono di snellire i calcoli, come per esempio la vicinanza rispetto a una base, il numero di cifre o la presenza di 1.

Dal punto di vista matematico si nota che con l'applicazione della commutatività di addizione e sottrazione[7] il metodo è esattamente identico a quello arabico con i «prestiti». La differenza – a mio parere è questo l'aspetto più interessante – sta nell'analisi qualitativa del numero fatta a priori, identificando prima di svolgere l'operazione dove saranno gli eventuali prestiti: questo permette un calcolo snello e soprattutto molto veloce. La somma di 9 o 10 da cui si toglie la cifra del sottraendo non è altro che il prestito, a cui si toglie il sottraendo per diminuire il valore delle cifre.

## 6. La moltiplicazione

La moltiplicazione nel metodo vedico è un'operazione che presenta diverse regole da applicare a seconda del caso in cui ci troviamo a operare. In poche parole vi è una regola generale valida per tutti i casi di moltiplicazione (a mio avviso la migliore e anche storicamente accertata) e regole più veloci per specifici casi. I metodi principali sono due e seguono rispettivamente i sutra:

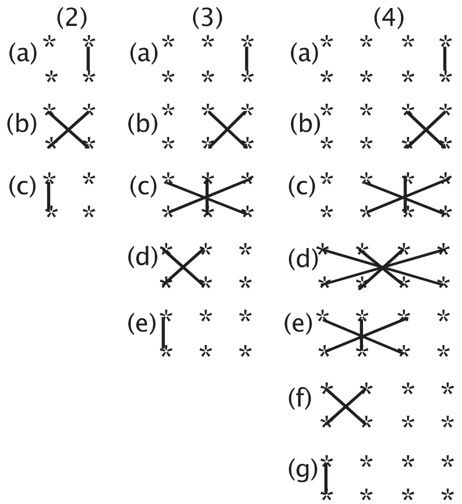
– *verticalmente e a croce*
– *tutti dal 9 uno dal 10*

7. La commutatività della sottrazione si può ottenere sfruttando quella dell'addizione purché si abbandoni l'insieme dei naturali per quello dei numeri interi: in questo modo la differenza fra due numeri naturali si può vedere come somma (che è commutativa) fra il minuendo e l'opposto del sottraendo che pertanto deve appartenere all'insieme Z. Può essere interessante notare come i numeri vincolo benché consentano di pensare ad una cifra come intrinsecamente negativa (quindi apparentemente di Z, se si pensa che anche una singola cifra è un numero) non inducano un naturale passaggio da N a Z. Più volte abbiamo infatti pensato (a ragione) $\underline{2} = -2$ ma sempre in rapporto ad una base. L'espressione $\underline{2}=0-2$ è un passaggio logico spontaneo illecito a meno di un'estensione dell'insieme di definizione, perché lo zero non è una potenza della base.
Parlando di divisioni ci capiterà di lavorare con resti negativi ma non sarà comunque necessario uscire da N (salvo in alcuni casi vjhappoggiarci all'insieme Q, ma solo per agevolare la notazione) perché l'eventuale resto negativo sarà comunque esprimibile come differenza rispetto al divisore. L'estensione a Z serve in questo caso per mostrare la perfetta simmetria fra questo metodo di sottrazione (che di per se non richiede un estensione del dominio) e quello classico.

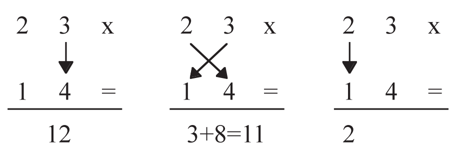
## 6.1. Metodo Urdhva-Tiryagbyham: verticalmente e a croce

La regola generale, applicabile per tutti i casi di moltiplicazione, importata in Europa dal *Liber Abaci* di Fibonacci è quella che segue il sutra verticalmente e a croce.

Il metodo è estremamente semplice e viene riassunto con lo schema seguente, dove le due serie di asterischi rappresentano i fattori della moltiplicazione (che devono avere lo stesso numero di cifre, se così non fosse è necessario aggiungere degli zeri davanti al numero con meno cifre per renderlo omogeneo all'altro) e le frecce che li congiungono rappresentano le moltiplicazioni da effettuare per ricavare ogni singolo termine del prodotto finale.




Un esempio numerico semplice per capire il funzionamento del metodo può essere la moltiplicazione fra due numeri di due cifre, 23 × 14. I passaggi da effettuare sono i seguenti:




Il risultato parziale dei singoli passaggi ordinato per base di riferimento pertanto risulta essere:

| 2 | 11 | 12 |

In questo schema ogni casella rappresenta una delle cifre del numero finale; per ottenerlo eseguiremo dei normali riporti per i numeri maggiori di 9 che occupano una singola casella:

| 2+1 | 1+1 | 12 | ovvero 322.

Questo passaggio viene eseguito mentalmente considerando che ogni passaggio dell'algoritmo genera un numero che deve tradursi in una singola cifra eccetto per la moltiplicazione dell'ultima cifra a sinistra. Tradurre graficamente come sopra un procedimento mentale non rende evidente l'immediatezza mentale del processo di riporto.

Questo algoritmo viene comunemente utilizzato nella competizione fondata nel 2004 dall'informatico tedesco Ralf Laue tenuta ogni due anni nell'università di Lipsia. La gara, chiamata Mental Calculation World Cup, prevede la soluzione di alcuni quesiti a mente nelle categorie già scelte dal Guinness dei primati per valutare l'abilità di un calcolatore mentale: la moltiplicazione di due numeri di otto cifre, l'addizione di dieci numeri di dieci cifre, l'estrazione di radice quadrata di numeri di sei cifre fino a otto cifre significative e il calcolo del giorno della settimana di una data compresa tra il 1600 e il 2100.

*«[…] alla Mental Calculation World Cup, Coto [vincitore dell'edizione della gara a cui ci si riferisce] […] non ricorreva a tecniche segrete quando ha moltiplicato 29513736 x 92842033. Ha usato semplicemente le tabelline dall'1 al 9. Il modo più veloce per moltiplicare 8 cifre per 8 cifre è quello del sutra vedico in verticale e in diagonale, che scompone il calcolo in 64 moltiplicazioni tra numeri di una sola cifra. Coto è riuscito a trovare la risposta giusta in una media inferiore a 51 secondi»* (Bellos, 2011, pag. 179).

La giustificazione algebrica del metodo è estremamente semplice: dati due numeri $(a\cdot 10+b)$ e $(c\cdot 10+d)$, il loro prodotto risulta essere $ac\cdot 10^2+(ad+bc)\cdot 10+bd$.

## 6.2. Il metodo Nikhilam: tutto dal 9 e l'ultimo dal 10

Un altro sistema per svolgere le moltiplicazioni sfrutta il sutra «tutti dal 9 e l'ultimo dal 10». Questo sutra esegue il prodotto di due numeri considerandoli come differenza da una base multipla di 10.

Ad esempio nella moltiplicazione:

$97 \times 99$

97 viene considerato nella sua differenza di 3 dal 100 (quindi gli si associa –3), 99 di 1 da 100.

Innanzitutto dividiamo il risultato della moltiplicazione in due parti, nella parte di destra ci saranno tante cifre quanti gli zeri della base.

BASE: 100
97 – 03 x
99 – 01 =

| – –

Ora le due parti del prodotto saranno una il prodotto delle distanze dei due numeri dalla base (03 per 01, ricordare che nella parte destra del risultato vanno due cifre quindi lo zero è essenziale), l'altra la differenza tra uno dei due numeri e la distanza dell'altro dalla base. In questo caso:

BASE: 100
97 – 03 x
99 – 01 =

(97–1) oppure (99–3) | (03x01)

Il risultato pertanto è 9603.

### 6.2.1. Se i fattori sono maggiori della base

È importante scrivere i numeri dei fattori vicini alla loro distanza dalla base, perché, se il prodotto da effettuare fosse 1007 × 1010, allora il calcolo andrebbe effettuato nel modo seguente:

BASE: 1000
1007 + 007 x
1010 + 010 =

(1007+10)=(1010+7) | (010x007)

Il risultato è 1017070.

### 6.2.2. Se i fattori sono uno maggiore e l'altro minore della base

Se i numeri da moltiplicare sono uno maggiore e uno minore della base il procedimento è il medesimo dei casi precedenti. Supponiamo di moltiplicare 111 × 80

BASE: 100
111 + 11 x
80 – 20 =

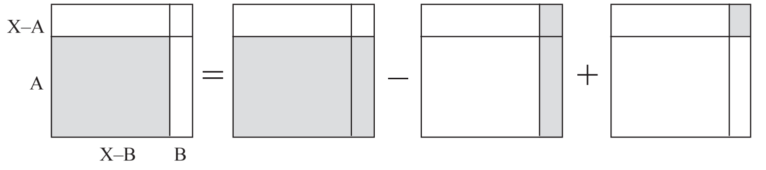
(111–20) oppure (80+11) | $-_{2}20$

Risulta 91 | ($-_{2}$20)=9100–220=8880.

In questi casi tornano utili i numeri vincolo della sottrazione. Infatti portando subito il riporto di –2 nella parte sinistra del prodotto (ricordiamo che a destra del prodotto possono stare tante cifre quanti gli zeri della base) otteniamo come risultato 89$\underline{20}$=8880.

Vi sono due dimostrazioni valide per questo metodo, una algebrica e una geometrica.

#### 6.2.2.1. Dimostrazione geometrica



Moltiplicare tra loro due numeri A e B considerandoli come differenza da una base X equivale a calcolare l'area di un rettangolo di lati A e B contenuto in un quadrato di lato X. Infatti il prodotto A × B porge:

$$A \cdot X - (X-B) \cdot X + (X-A) \cdot (X-B) = A \cdot B$$

Questa è esattamente l'espressione algebrica dell'algoritmo: dal primo numero (A) si toglie la distanza dalla base di B (X–B); entrambi vengono moltiplicati per X (la base) in modo che non ci siano interferenze con l'ultima parte ovvero il prodotto delle distanze dalla base.

#### 6.2.2.2. Dimostrazione algebrica

Detta X la base, A e B la differenza dei fattori dalla base stessa si ha che:

$$(X - A)(X - B) = X^2 - AX - BX + AB = X(X - A - B) + AB$$

che è ancora la rappresentazione algebrica del metodo di moltiplicazione proposto in cui AB nell'esempio precedente (97 × 99) è 03 (03 × 01) mentre X(X–A–B) da 100(100-03-01)=9600. Il risultato infatti è 9603.

### 6.2.3. Se i fattori non hanno la stessa base

È possibile eseguire moltiplicazioni con questo metodo anche con fattori che fanno riferimento a basi diverse. Ad esempio se vogliamo calcolare il prodotto di 995 × 85 è sufficiente ricordare che la moltiplicazione gode della proprietà distributiva quindi se moltiplico per 10 il fattore 85 esso avrà la stessa base di 995 e il loro prodotto sarà 10 volte superiore a quello di 995 × 85.

### 6.2.4. Se la base non è una potenza di 10

Se i fattori della moltiplicazione sono lontani da una potenza di 10 è comunque possibile utilizzare il metodo di questo sutra adoperando una base espressa come multiplo di 10. Ad esempio se vogliamo moltiplicare 49 × 47 possiamo considerare il 50 come il multiplo di 10 più vicino ai fattori considerandolo come 100/2 o come 5 × 10, applicando il metodo normalmente e correggendo la parte sinistra del prodotto, o dividendola (in questo caso) per 2, o moltiplicandola per 5.

| BASE: 10 | | | BASE: 100 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Base di lavoro: 10x5 | | | Base di lavoro: 100/2 | | |
| 49 | – 1 | x | 49 | – 01 | x |
| 47 | – 3 | = | 47 | – 03 | = |
| 46 | 3 | | 46 | 03 | |
| 46x5 | 3 | | 46/2 | 03 | |
| 230 | 3 | | 23 | 03 | |

Ovviamente è sempre preferibile moltiplicare una base più piccola piuttosto che dividere una base più grande, per non avere eventuali riporti quando la parte destra del prodotto non fosse divisibile per la frazione di base scelta.

## 7. Le tabelline

I numeri vincolo introdotti con la sottrazione sono utilissimi per ricavare in pochissimi secondi ogni tabellina, anche di numeri grandissimi. Ricordiamo che i numeri vincolo rappresentano dei numeri negativi intesi come differenza del numero stesso dalla base più vicina ed è proprio così che vengono utilizzati in questo contesto. Calcolare il numero vincolo di un dato numero è semplicissimo dal punto di vista intuitivo in alcuni casi ma, formalmente, utilizziamo i sutra:

– *Di uno innalza quel che sta d'innanzi*
– *Da nove tutti e l'ultimo da dieci*

Prima di procedere con la definizione formale diamo una definizione algoritmica dei numeri vincolo le cui cifre possono essere singolarmente positive o negative ma sempre in valore assoluto minori o uguali 5. Dato un numero qualunque si manipolano le cifre per ridurle utilizzando i numeri vincolo (o si applicano meccanicamente questi due sutra alle cifre maggiori di 5). Ad esempio se voglio trovare il numero vincolo di 3754, noto che il 7>5, quindi alzo di uno il 3 che lo precede e sottraggo dal 10 il 7. Il risultato di questa operazione è $4\underline{3}54$ che equivale a scrivere 4(–3)54.

Ora utilizziamo i numeri vincolo per calcolare la tabellina del 26. Scriviamo il 26 come 3(–4) e sommiamo semplicemente il 26 al suo numero vincolo.

3(–4) 26 52 78 104 130 156 182 208 234 260

Cosa succede se voglio calcolare la tabellina del 5890?

Calcolare il numero vincolo di questo numero non è immediato e bisogna prestare attenzione. Agendo come prima dovremmo innalzare di uno il 5 che di suo è chiaramente minore o uguale a 5. Così facendo avremmo però un 6, che non può esserci nella notazione scelta. Scriviamo pertanto il numero dato come 05890 e consideriamo il 5 come un numero grande da ridurre. Si procede ora aumentando lo zero di uno e sottraendo le altre cifre dal nove eccetto l'ultima, diversa da 0, (9) dal 10. Otteniamo pertanto 1(–4)(–1)(–1)0. Se non ci fosse venuto in mente avremmo potuto scrivere 6(–1)(–1)0 per poi trasformare il 6 in 1(–4).

La tabellina è presto fatta:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | –4 | –1 | –1 | 0 |
| 0 | 5 | 8 | 9 | 0 |
| 1 | 1 | 7 | 8 | 0 |
| 1 | 7 | 6 | 7 | 0 |
| 2 | 3 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | 9 | 4 | 5 | 0 |
| 3 | 5 | 3 | 4 | 0 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 4 | 7 | 1 | 2 | 0 |
| 5 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 8 | 9 | 0 | 0 |

Notiamo che non è sbagliato lasciare un numero maggiore di 5 nella trasposizione in numeri vincolo, non si infrange nessuna regola matematica. La rigidità della notazione non deve vincolare la creatività dell'approccio all'algoritmo. Quindi in un eventuale scenario didattico, dimenticare di ridurre anche il 6 non si dovrebbe considerare sbagliato, purché non venga meno la correttezza del risultato finale. Con questi algoritmi non si vuole mai proporre un metodo rigido per raggiungere il risultato, ma mostrare come ci possano essere altre strade meno scontate e più rapide per arrivare allo stesso risultato in meno tempo. Questo scenario poi è lo stesso con cui lo studente dovrà confrontarsi nella propria crescita matematica e capire questa realtà già dai problemi algebrici elementari, ciò che sarà sicuramente positivo per il suo futuro rapporto con la materia.

Per questo motivo il sutra in sé non è interessante quanto il metodo che induce, vero nodo del valore di questi algoritmi.

*«L'aritmetica è essenziale nella vita quotidiana ed è importante padroneggiarla, è per questo che ci viene insegnata così metodicamente a scuola. Eppure, concentrandoci sull'aspetto pratico abbiamo perso di vista la straordinarietà del sistema numerico indiano [quello correntemente usato e noto come numeri arabi] che ha rappresentato un enorme passo avanti rispetto a tutti i metodi precedenti usati per contare e non è più stato migliorato in un millennio. Diamo per scontato il sistema decimale posizionale senza renderci conto di quanto sia versatile, elegante ed efficiente»* (Bellos, 2010, pag. 171).

Matematicamente il procedimento che abbiamo seguito è lo stesso che già usiamo per le tabelline, però con l'uso di queste notazioni abbiamo notevolmente semplificato i calcoli abbassando le cifre che componevano il numero di cui calcolare la tabellina, in modo da limitare i riporti al minimo indispensabile. Inoltre abbiamo considerato le cifre singolarmente e non il numero nel suo complesso, dal momento che è la posizione che determina il valore di ogni singola cifra (1, 10, 100, …). Da ciò si può capire come sia possibile ragionare sempre sulle singole cifre e considerarle alla luce del loro valore posizionale senza dover operare su tutto il numero.

## 8. La divisione

Nella matematica indiana vi sono diversi modi per affrontare la divisione dal momento che l'obiettivo è trovare il procedimento migliore ad ogni caso specifico che ci permetta di calcolare rapidamente il risultato, se possibile anche mentalmente.

I metodi di divisione che analizzeremo sono il metodo *nikhilam, paravartya* e *Urdhva-Tiryagbyham.*

### 8.1. Il metodo Nikhilam: tutto dal 9 e l'ultimo dal 10

Questo metodo è estremamente intuitivo e risulta essere molto veloce solo se ci troviamo in un caso in cui il divisore sia composto da cifre molto grandi o molto piccole, quindi il più vicino possibile ad una base (ed ecco la principale limitazione).

Per questo metodo utilizziamo, come per la moltiplicazione, uno schema che ci permetta di inquadrare il divisore come differenza dalla base e il separare il risultato della serie di operazioni che andremo a compiere in quoziente e resto in base agli zeri della base del divisore.

BASE

DIVISORE differenza dalla base — DIVIDENDO

quoziente — resto

parte sinistra — parte destra

Ricordiamo che la differenza dalla base può essere sia positiva che negativa a seconda che il divisore sia maggiore o minore della base a cui fa riferimento. Il metodo è veramente meccanico e semplice: la prima cifra partendo da sinistra del dividendo è la prima cifra del quoziente. Questa va moltiplicata per la differenza dalla base del divisore. La somma della seconda cifra del dividendo e la prima del prodotto tra la prima cifra del quoziente e la differenza dalla base rappresenta la seconda cifra del quoziente partendo da sinistra. Si continua con questa serie di operazioni fino a che arriviamo a scrivere il prodotto della differenza dalla base con un termine del quoziente in linea con l'ultima cifra del dividendo. Procediamo con una serie di semplici esempi per chiarire il metodo.

### 8.1.1. Esempio

Consideriamo la divisione 23 : 9

L'operazione risulta più complicata ad illustrare nei vari passaggi che a fare poi in pratica, ma per chiarezza espositiva, la descriveremo un passaggio alla volta. Nel primo riquadro abbiamo lasciato l'indicazione di dove si trova la base, il divisore, il dividendo, il quoziente e il resto, mentre nei successivi verrà tralasciato.

1° passaggio: prima di tutto devo considerare la base di riferimento del divisore 9, che in questo caso è 10, per cui scrivo la cifra 1 sotto la linea del divisore, come differenza di 9 dalla sua base 10 e separare il dividendo a seconda del numero di zeri della base a cui si riferisce. Poi scrivo la cifra 2 (del numero 23, delle decine del dividendo) nello spazio del quoziente come prima cifra da considerare nell'operazione.

base 10
divisore 9
1

dividendo
2 | 3
↓
2
quoziente — resto

2° passaggio: eseguo la moltiplicazione della prima cifra del quoziente 2 per la cifra 1 (che è la differenza del divisore dalla base) e riporto il risultato +2 nella parte a destra del dividendo, sotto la cifra 3 (delle unità del dividendo).

3° passaggio: infine eseguo l'addizione delle unità 3 e +2 per calcolare il resto, risultato che andrà scritto nello spazio apposito.


Quindi 23 : 9 è uguale a 2 con il resto di 5.

Come si vede le operazioni per eseguire 23 : 9 sono state, a parte 10 – 1 = 9 per calcolare la differenza dalla sua base di riferimento:

2 × 1 = 2

3 + 2 = 5

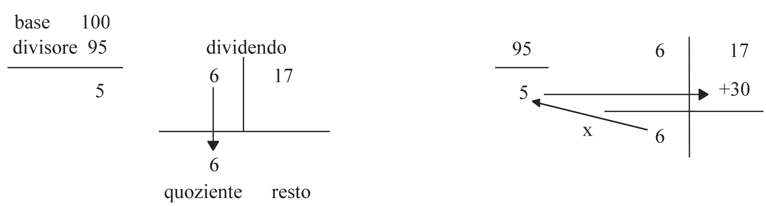
Ben più semplici di quelle da eseguire nel metodo classico: considerare quante volte ci sta il 9 nel 20 ed eseguire 9 × 2 = 18, poi sottrarre il prodotto al dividendo 23 – 18 = 5

### 8.1.2. Esempio

Vediamo un altro esempio con due cifre al divisore 617 : 95

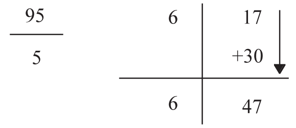
Siccome ora il divisore è 95, dovremo considerare la base 100 come la più vicina, e scriveremo la cifra 5 come risultato della differenza di 95 dalla sua base di riferimento 100.

Poi riportiamo la cifra 6 (quella delle centinaia del dividendo) nello spazio del quoziente.




Calcoliamo il prodotto della prima cifra del quoziente 6 con 5 (differenza del divisore dalla base) e scriviamo il risultato +30 nella parte a destra sotto le cifre 17.

Infine eseguiamo l'addizione 17+30 e troviamo il resto




Quindi 617 : 95 = 6 con il resto di 47

In questo caso è molto evidente la semplicità dei calcoli del metodo in questione rispetto a quello standard.

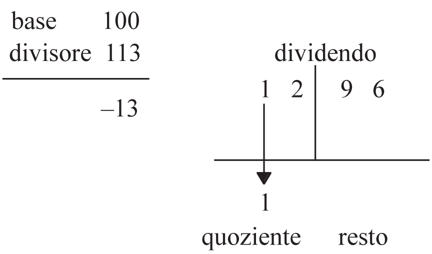
Prima di tutto bisogna calcolare la differenza del divisore dalla base di riferimento 100 – 95 = 5

e poi:
6 × 5 = 30
30 + 17 = 47
Invece di:
considerare quante volte ci sta il 9 nel 61, calcolare 9 × 6 = 54, che però sarebbe 90 × 6, quindi 540, poi stimare se aggiungendo 5 × 6 = 30 si supera 617 o se nella differenza ci stia un'altra volta il divisore 95, quindi eseguire 95 × 6 = 570, poi 617 – 570 = 47 e così trovare il resto.

### 8.1.3. Esempio

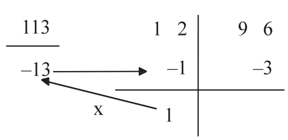
In quest'altro esempio opereremo con un divisore di 3 cifre 1296 : 113. Siccome abbiamo il divisore superiore, seppur di poco, alla sua base di riferimento 100, allora la differenza questa volta sarà un numero negativo: –13.

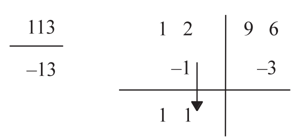
Poi come prima, partendo dalla prima cifra sinistra del dividendo la riportiamo come prima cifra a sinistra nel quoziente.



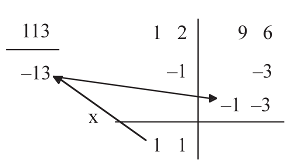

A questo punto eseguiamo il prodotto di 1 × (– 13) che scriveremo sotto le cifre del dividendo subito a destra della prima ma distinguendole in –1 e –3 (che ovviamente stanno ad indicare –100 e –30). Questo perché sta nella strategia del metodo operare con una cifra alla volta.

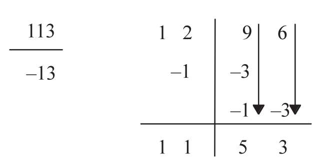
Ora eseguiremo l'operazione indicata nella colonna della seconda cifra a sinistra del dividendo, cioè 2 – 1 e riportiamo il risultato 1 come seconda cifra del quoziente. Quindi si moltiplica 1 × (–13) e si riporta il risultato nella stessa modalità di scrittura di prima sotto le successive cifre a destra.




Non rimane altro che trovare il resto che verrà calcolato una colonna alla volta: prima 9 – 3 – 1 = 5 e per ultima 6 – 3 = 3



quindi 1296 : 113 = 11 con il resto di 53.
Siccome 53 è minore del divisore l'operazione può ritenersi conclusa.

### 8.1.4. Esempio

Propongo ora un esempio compatto (110999 : 1321) perché il lettore possa vedere il metodo applicato nei passaggi che un potenziale alunno scriverebbe sul suo quaderno e perché possa lui stesso cimentarsi con questa operazione sperimentando concretamente l'algoritmo.

| | | |
|---|---|---|
| 1321 | 1 1 0 | 9 9 9 |
| –321 | –3 –2 | –1 |
| | 6 | 4 2 |
| | | –12 –8 –4 |
| | 1 –2 4 | 0 3 5 |
| 100–20+4 | Q=84 | R=35 |

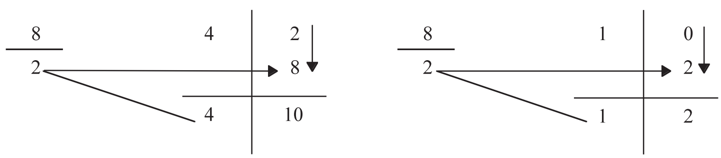
Quindi 110999 : 1321 = 84, resto 35

### 8.1.5. Limiti del metodo

Questo metodo di divisione, seppur molto rapido, presenta due problemi, principalmente:

1. Talvolta il resto rimane più grande del divisore e allora è necessario operare una nuova divisione tra il resto e il divisore, sommando infine il nuovo quoziente a quello precedente per ottenere il risultato corretto.

Per esempio, 42 : 8




E il risultato avrà quoziente la somma dei quozienti delle due divisioni e come resto, il resto dell'ultima operazione, ovvero: Q=4+1=5, R=2

2. Se il divisore ha una differenza dalla base particolarmente significativa il processo di divisione del quoziente andrà operato più di una volta rendendo il metodo assolutamente troppo lungo e scomodo.

### 8.2. Il metodo Paraavartya yajayet (trasponi e applica) e il teorema del resto

Il metodo di divisione che segue il sutra «trasponi e applica» necessita di una competenza matematica da buon liceo scientifico per essere veramente compreso, ma è possibile utilizzarlo anche senza averne padroneggiato la dimostrazione, perché è un metodo di divisione molto simile al metodo Nikhilam seppure più formale dal punto di vista teorico.

Il metodo paraavartya ci permette di calcolare in modo rapido le divisioni nei casi in cui le cifre del divisore non siano troppo grandi utilizzando il sutra «trasponi e applica». Questo ripropone con tonalità mistiche ciò che comunemente si usa nella risoluzione delle equazioni. Secondo questo sutra infatti, si può operare una trasposizione di valori e/o variabili cambiandone il segno (da somma a sottrazione, da moltiplicazione a divisione e viceversa). Questa regola trova un'applicazione anche nell'aritmetica per eseguire le divisioni.

Banalmente significa che data un'eguaglianza è possibile spostare gli elementi da una parte all'altra dell'uguale cambiandone il segno.

Per definire formalmente questo metodo useremo dei polinomi, introducendo una variabile x. In matematica indiana, visto che stiamo lavorando sulle tecniche di divisione, la variabile x indica la base, ovvero il 10. In questo modo si può scrivere un polinomio letterale e considerarlo anche come un numero a tutti gli effetti.

Introduciamo ora il teorema del resto: dati E, D, Q e R il dividendo, il divisore, il quoziente e il resto di una data divisione, se il divisore è $(x-p)$, si possono scrivere alcune relazioni algebriche tra questi elementi:

$$E = D \cdot Q + R = Q\,(x - p) + R$$

Se ponessimo $x=p$ l'equazione avrebbe forma $E=R$.

In altre parole l'espressione stessa, che nella divisione rappresentava il dividendo, diventerebbe il resto. L'espressione data (E) diventa pertanto automaticamente il resto (con p sostituito a x); p risulta immediatamente calcolabile sapendo che $x-p=0$. In termini generali questo significa che se E fosse in forma

$a\,x^n + b\,x^{n-1} + c\,x^{n-2} + \dots$ e $D=x-p$

allora, sostituendo p a x il resto risulterebbe

$a\,p^n + b\,p^{n-1} + c\,p^{n-2} + \dots$

### 8.2.1. Esempio

Supponiamo ora di dividere il polinomio $12\,x^2 - 8\,x - 32$ per $x-2$.

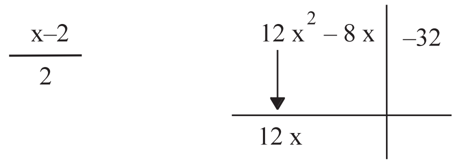
I passaggi da fare sono del tutto simili a quelli utilizzati nel metodo nikhilam. Utilizziamo la moltiplicazione dei termini del quoziente per i coefficienti numerici delle variabili di grado minore rispetto a quella con grado massimo cambiati di segno (in questo caso il grado massimo è quello di x quindi moltiplichiamo per 2) e scriviamo le somme da effettuare come secondo il metodo nikhilam dividendo logicamente ogni termine per il primo termine del divisore (in questo caso x per abbassare i termini del polinomio.

Considerando il numero $x-2$, operare con l'opposto dei coefficienti numerici delle variabili minori di quella con grado massimo significa proprio operare con lo zero che annulla il divisore, in modo da determinare il resto.

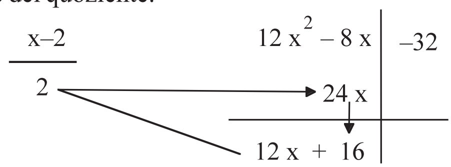
Se il divisore ha un grado maggiore di 1 (x) allora l'opposto dei coefficienti numerici delle variabili con grado minore rispetto a quello massimo non rappresenta più lo zero del polinomio. In effetti è proprio come dividere due polinomi fra loro, esattamente come facciamo normalmente, con lo stesso procedimento. Però, considerando il fatto che x rappresenta la base 10, il metodo può essere utilizzato anche per le normali divisioni.

La semplice organizzazione logica delle operazioni ci permette di effettuare l'operazione di prima anche a mente, seguendo questi tre passaggi:

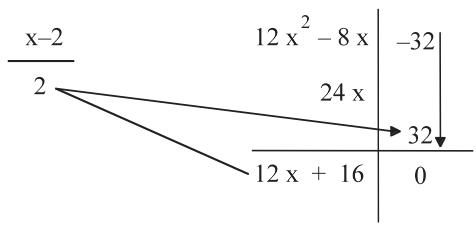
1. $12\,x^2/x$ dà 12 x come primo coefficiente del quoziente.




2. Moltiplichiamo il 12 per 2 e sommiamo il risultato al prossimo termine del numeratore. In questo caso $12x \cdot 2 = 24x$, sommato a $(-8x)$ otteniamo $16x/x$ come secondo termine del quoziente.




3. Moltiplichiamo 16 per 2 e lo sommiamo al prossimo coefficiente del numeratore, ottenendo 0 come resto.



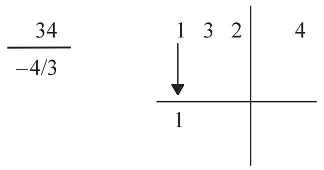

### 8.2.2. Esempio

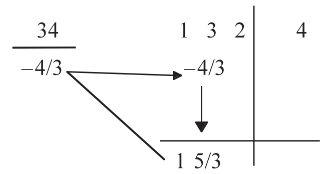
Se il primo termine del divisore non ha coefficiente 1 allora è possibile eseguire il metodo come precedentemente dividendo il risultato di ogni singolo passaggio per il coefficiente del primo termine. Molto meno complesso è dividere subito il divisore per il coefficiente del primo termine in modo da portarlo alla forma di $x-p$, completare l'operazione e infine dividere il risultato ottenuto per il coefficiente del primo termine eccetto il resto che rimane costante.

Come esempio calcoliamo 1324:34; 34 equivale a $3x+4$ quindi dividendo per 3 otteniamo $x+4/3$.

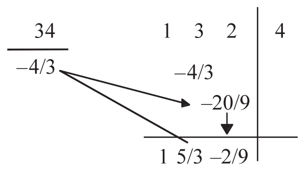
Come nel metodo nikhilam per le moltiplicazioni si cambia il segno al termine ottenuto dal divisore: in questo caso 4/3 diventa $-4/3$. Procediamo ora come per l'esempio precedente, senza però segnare le x che rappresentano la base nella trasposizione tra numero e polinomio: ecco il ruolo centrale della posizione, si entra nel vivo del sistema posizionale decimale!

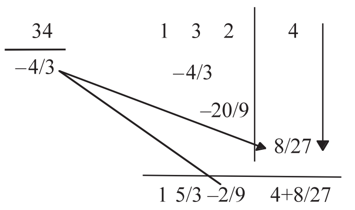
Eseguiamo i passaggi ora come nel metodo nikhilam: si porta nel quoziente il primo termine del dividendo e si moltiplica il termine del quoziente ottenuto per lo zero del «polinomio» che rappresenta il divisore e si somma col termine successivo del dividendo.




Ora si continua il procedimento sempre nello stesso modo, i vari riquadri mostrano lo sviluppo dei passaggi.




Ora il quoziente si ottiene dividendo per tre il risultato dell'algoritmo e mantenendo il resto invariato:

$$Q = \left(x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{9}\right)\Big/3 = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{5}{9}x - \frac{2}{27}\right) \qquad R = 4 + \frac{8}{27}$$

Le x, reintrodotte non per necessità ma per agevolare la comprensione, rappresentano la base 10.

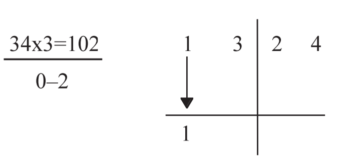
Sostituendo 10 a x otteniamo come quoziente $Q = 38 + \frac{22}{27}$.

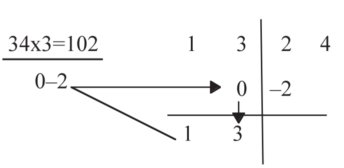
Il risultato di una divisione nei naturali non può essere un numero razionale quindi occorre portare il 22/27 del resto moltiplicandolo per il divisore, ovvero 34. Si ottiene così Q=38, R=32.

### 8.2.3. Esempio

Per evitare di operare con frazioni che rendono inutilmente complicati i calcoli conviene moltiplicare il divisore in modo da avvicinarlo a una base. Ad esempio riproviamo a dividere 1324 per 34 mostrando ancora i passaggi.

Invece di dividere per 34 moltiplichiamo il quoziente per 3 ottenendo 102 che essendo vicino ad una potenza della base ci garantirà calcoli migliori. Ricordiamo però che sarà necessario moltiplicare per 3 anche il risultato dell'algoritmo per ottenere il corretto quoziente.



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 34x3=102 | 1 | 3 | 2 | 4 |
| 0–2 | | 0 | –2 | |
| | | | 0 | –6 |
| | 1 | 3 | 0 | –2 |

Dall'algoritmo si ottiene Q=13, R=–2. Per ottenere i valori corretti occorre moltiplicare il quoziente ottenuto per quanto avevamo moltiplicato il divisore ovvero 13 × 3=39 e portare un'unità del quoziente nel resto per renderlo positivo: il quoziente diventa Q=8, R=34–2=32.

### 8.2.4. Considerazioni

L'unica differenza che c'è tra il metodo nikhilam e il paraavartya è come si sceglie il numero per il quale moltiplicare i termini del quoziente. Ad esempio, se come divisore avessimo il numero 819 secondo il metodo nikhilam, scegliendo come base 1000, la differenza da essa sarebbe 181 quindi $2\underline{2}1$ quindi 2 (–2) 1. Se utilizzassimo il metodo paraavartya penseremmo all'819 come al polinomio $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$. Questo numero espresso senza esplicitare la base e utilizzando i numeri vincolo diventa $1\underline{2}2\underline{1}$. Siccome dobbiamo operare con i coefficienti delle variabili minori di quella di grado massimo cambiati di segno avremmo:

$-(\underline{2}2\underline{1})=2\underline{2}1$, esattamente come ottenuto seguendo il metodo Nikhilam.

La cosa veramente interessante è come questi metodi di divisione (specialmente il paraavartya) ricordino moltissimo il teorema di Ruffini esposto nel 1809. In effetti l'algoritmo è assolutamente simile, con la differenza che la divisione sintetica serve a calcolare rapidamente il quoziente e il resto della divisione tra due polinomi, mentre, nelle regole di divisione indiana, la x rappresenta la base di a cui fa riferimento ciascun numero e viene qui inclusa nell'algoritmo per poter visualizzare concretamente la base di lavoro.

Il metodo vedico può anche essere visto come un'applicazione algebrica della più generale regola di Ruffini per la risoluzione di divisioni numeriche nel caso in cui il divisore abbia grado massimo 1. Altrimenti, con divisori più grandi (sopra il 50, dove allora si è vicini alla base 100 ovvero $x^2$) la divisione proposta è esattamente la normale divisione fra polinomi (o forse viceversa), con la differenza di significato che si dà alla x.

### 8.3. Metodo Urdhva-Tiryagbyham: verticalmente e a croce

Il terzo metodo, seppur somigliante al secondo, riesce a essere più rapido nei casi in cui, se avessimo scelto il metodo paraavartya, avremmo dovuto operare con frazioni. Questo metodo deriva dal sutra verticalmente e a croce ed è stato definito da Tirtaji la vera perla della matematica vedica.

Come configurazione iniziale per l'algoritmo scriviamo i due numeri in frazione isolando i termini che concorreranno al resto. Il primo termine del quoziente sarà la divisione tra i primi termini del dividendo e divisore senza però lasciare frazioni:

si considereranno solo i risultati interi scrivendo il resto a fianco del numero successivo nel dividendo sotto forma di riporto. Tutti gli altri termini del quoziente si ottengono come somma della moltiplicazione a croce dei prodotti di questa. Un esempio polinomiale per spiegare il metodo può essere la divisione $(12\ x^2 - 8\ x - 32)/(x-2)$

$$\begin{array}{l|l} 12\,x^2 - 8\,x & 32 \quad = 12\,x \\ \hline x-2 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 12\,x^2 - 8\,x & 32 \quad = 12\,x \\ \hline x-2 & \quad 24\,x \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 12\,x^2 - 8\,x & 32 \quad = 12\,x + 16 \\ \hline x-2 & \end{array}$$

$12\ x^2/x$ dà 12 x come primo termine del quoziente.

Moltiplichiamo a croce il 12 x per il –2 che dà –24 x

Ora Q=12 e il coefficiente attuale della x nel prodotto (o nel dividendo) è –8. Quindi per arrivare a –8x ci mancano 16 che otteniamo come distanza tra il –24x e il –8x, ottenendo come nuovo termine del quoziente 16 dopo averlo diviso per x. Il quoziente risulta 12x+16.

Ora – 2 × 16 = –32 quindi si arriva a 32 con R = 0.

N.B. nel calcolare il resto NON si divide ovviamente più per il primo termine del divisore: come potremmo d'altronde dividere il resto se è di natura più piccolo del divisore? Ora finché si tengono le x per indicare la base l'errore risulta evidente perché rapportato alla base scritta esplicitamente; togliendola è fondamentale capire che l'errore commesso dividendo la porzione del quoziente che da il resto rappresenta il mancato utilizzo del sistema posizionale: ragionare cifra per cifra snellisce i calcoli ma richiede l'attenzione necessaria per capire quale sia il ruolo della cifra che prendiamo in esame.

### 8.3.1. Esempio

Con i numeri il metodo è equivalente e ci permette di scrivere immediatamente il risultato di una divisione. L'esposizione dei singoli passaggi risulta essere molto complessa proprio perché l'obiettivo di questo algoritmo è dare in un singolo passaggio il risultato di qualsiasi divisione.

Utilizziamo il metodo dell'esempio di prima: 1324 diviso per 34 e, quando otterremo numeri negativi li scriveremo con la notazione dei numeri vincolo.

L'esercizio svolto in un unico passaggio risulta essere il seguente dove i pedici sono i riporti effettuati per la presenza di resti nella divisione delle singole cifre.

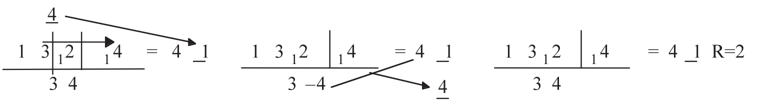
$$\begin{array}{l|l} 1 \quad 3 \quad {}_1 2 & {}_1 4 \qquad = 4\underline{1} \quad R=\underline{2} \quad Q=39, \quad R=-2; \quad Q=38 \quad R=32 \\ \hline \quad 3 \quad 4 & \end{array}$$

Mostriamo ora i passaggi «scritti» dell'algoritmo, scrivendo a parole i procedimenti mentali che purtroppo non possono trovare una rappresentazione grafica agevole:

$$\begin{array}{l|l} 1 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 4 & \quad = \\ \hline \;\; 3 \;\; 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1 \;\; 3 \;\; {}_1 2 \;\; 4 & \quad = 4 \\ \hline \;\; 3 \;\; 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1 \;\; 3 \;\; {}_1 2 \;\; 4 & \quad = 4 \\ \hline \;\; 3 \;\; 4 & \text{dal 16 al 12} = 4 \end{array}$$

- 13/3= 4 resto 1, scrivo l'1 vicino al 2 (divido il 13 non potendo chiaramente dividere 1 per 3, esattamente come nella divisione classica).

– Moltiplico il 4 del quoziente per il 4 del divisore ottenendo 16, dal 16, per arrivare al 12, aggiungo
– 4 diviso per tre da 1 con il resto di 1 che scrivo vicino al 4 finale del dividendo (nel grafico riporto il passaggio in alto anche se non sarebbe previsto nell'algoritmo: è un passaggio che va fatto a mente!).




1 moltiplicato per 4 da 4,
nel divisore abbiamo come ultimo termine 14 che equivale a 6.
Per arrivare da 4 a 6 mi serve un 2 che diventa il nostro resto.

Quindi Q=39 , R= –2 e nella forma finale si ha Q=38 R=32.

### 8.3.2. Esempio

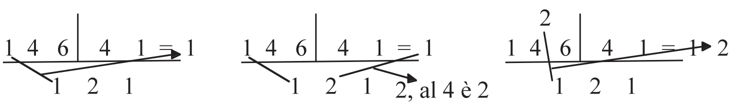
Queste operazioni si possono effettuare anche con divisori con più di due cifre. In tal caso la moltiplicazione che effettuiamo non sarà più su una solo cifra, ma sulle ultime due (il metodo è identico alla divisione impostata nel modo standard, solo che le moltiplicazioni si fanno ottimizzando i passaggi in modo da poter fare la divisione a mente).

Come esempio, dividiamo 14641 per 121

```
1 4 6 | 4 1 =
------------
  1 2 1
```

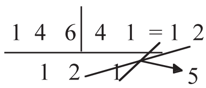
I numeri dell'elenco seguono le cifre del dividendo da considerare

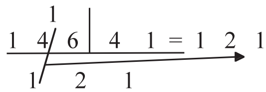
1. Considero la prima cifra del dividendo e la divido per la prima del divisore che mi da 1 come risultato.
2. Considero solo la seconda cifra del dividendo, il 4. Moltiplico l'1 (prima cifra del quoziente) per il 2 e l'1 del divisore (le ultime due cifre, in altre parole tutti i coefficienti numerici delle variabili di grado minore rispetto a quello massimo). Ora però ci interessa solo la seconda cifra del dividendo, pertanto, avendo un 2 per raggiungere il 4 ho bisogno di un altro 2. Questo 2 diviso per 1 dà 2 come secondo termine del quoziente.



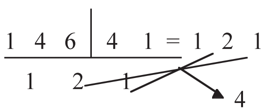

3. Considero ora la terza cifra del dividendo.
Moltiplico il 2 per il 2 e 1 che da 4 e 2.
Per quanto riguarda la terza cifra ho un 4 e un uno dal prodotto precedente (1 per 2 e 1 dava un 2 che ho già utilizzato e un 1 che uso ora) che

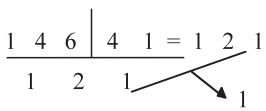
da 5. Dovendo arrivare a 6 (terzo termine del dividendo) mi serve un 1 che diviso per 1 da 1 come terzo termine del quoziente.




4. Ora mancano le ultime due cifre, che indicheranno il resto della divisione. 1 per 2 e 1, da 2 e 1, tengo conto del 2 e del 2 di prima ottenendo 4. Dovendo arrivare a 4 (quarta cifra del dividendo) non aggiungo nulla e il primo termine del resto sarà pertanto 0.
5. Per l'ultima cifra non opero più moltiplicazioni visto che facendolo otterrei due nuove cifre mentre me ne serve una sola (inoltre non ho più prodotto termini del quoziente da moltiplicare): ho un 1 e devo arrivare a 1 quindi avrò un altro 0.




R=00

N.B. Per quanto riguarda il calcolo del resto non si opera più la divisione per il primo termine del divisore!

Il risultato dell'operazione è 121 R 0

Per ottimizzare le moltiplicazioni (cosa che nell'esempio non è stata fatta completamente) in modo da agevolare il calcolo mentale, si facciano i prodotti solo quando sono necessari, in modo da non dover tenere a mente i risultati delle operazioni precedenti e produrre solo numeri che verranno usati per il termine del quoziente su cui stiamo lavorando.

Nell'esempio, per produrre la seconda cifra (passo due dell'elenco puntato) del quoziente, invece di moltiplicare l'1 per 2 e 1 è sufficiente moltiplicare solo per il 2, lasciando l'altro prodotto al punto successivo.

Nel punto 3 (produzione della terza cifra) si moltiplica il 2 (ultimo risultato prodotto nel quoziente) per il 2 e l'1 per l'1. In casi di numeratori con più cifre questo metodo è essenziale per essere veloci, ma è anche difficile sbagliare. Si potrà notare infatti come l'ultimo numero prodotto nel quoziente vada moltiplicato per il secondo del divisore (il primo è riservato per dividere) e si continua sommando i risultati delle moltiplicazioni scalando verso destra il dividendo e verso sinistra il quoziente; si continua con il penultimo del quoziente con il terzo del divisore e così via, fino a che non ci saranno più termini del dividendo da moltiplicare (mentalmente si possono visualizzare configurazioni di moltiplicazioni incrociate simili ad asterischi).

Proponiamo un ulteriore esempio aumentando il divisore, che il lettore potrà provare a svolgere mentalmente!

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 6 & 9 & 5 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & & \end{array} = 1\ 0\ 1 \qquad R=000$$

Per visualizzare quali cifre servono per la moltiplicazione (tutte tranne la prima) si può usare anche questa configurazione.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 6 & 9 & 5 & 8 \\ \hline & & 1 & 2 & 1 & \end{array} =$$

### 8.3.4. Considerazioni

Questo metodo di divisione non è realmente una novità, è esattamente identico al nostro, l'unica proposta è l'ottimizzazione delle moltiplicazioni in modo da risolvere la divisione in un unico passaggio. Un'altra differenza, anche se molto sottile, è che il risultato che si ottiene con la divisione con il primo termine del divisore passaggio per passaggio, è una stima del risultato corretto, che si aggiusta da solo con il «segno» dei termini successivi. In poche parole dividiamo in maniera compatta un numero come se fosse un polinomio. Per questo si può ragionare come: «se ho ottenuto n per arrivare a m, ho bisogno di tot». Questo è esattamente il passaggio dell'algoritmo di divisione fra polinomi in cui si moltiplica il termine del risultato appena trovato con il divisore e si sottrae al dividendo per ottenere un dividendo di grado più basso.

## 9. Conclusione

Questo articolo vuole in prima lettura proporre alcuni metodi alternativi di calcolo da utilizzare in contesti di vita quotidiana per arrivare velocemente a risultati corretti. Se si parla di calcolo mentale però vi sono altri testi fondamentali che hanno fatto la storia del genere: qui invece si vuole sfruttare un argomento apparentemente esotico con sfumature mistiche, per riflettere sulla potenza del sistema posizionale decimale (tutti dal nove e l'ultimo dal dieci). Possiamo infatti appoggiarci a questa grandissima invenzione per ottimizzare l'aritmetica elementare.

Ci sono moltissime controversie sia sull'originalità di questi algoritmi sia sul loro valore: molti infatti li definiscono semplici giochetti che nulla hanno a che vedere con la matematica reale. Dal mio punto di vista questi, che effettivamente sono giochetti, possono essere molto utili per il significato che nascondono, tramite collegamenti diretti con le operazioni fra polinomi. Solo sotto questo punto di vista è giustificabile la curiosità spontanea degli effetti del metodo sull'approccio degli allievi alla matematica; è un modo sicuramente diverso e creativo per rapportarsi con i numeri: un modo in cui viene privilegiato il calcolo mentale ed evidenziato il ruolo della posizione occupata da una cifra all'interno di un numero. Inoltre la familiarità con le tecniche utilizzate nelle operazioni fra polinomi, acquisita con un generatore favorevole (la base 10), sarà sicuramente di aiuto nel passaggio a una matematica fatta di lettere.

Ecco che questo articolo presenta due letture possibili: quella amatoriale, per assicurarsi un vantaggio quotidiano all'approccio con i numeri, e quella dello specialista di didattica per cui questo articolo può rappresentare una base teorica per approfondimenti (anche sperimentali), un compendio uniforme di regole che nascono dietro a un velo di misticismo (che lo specialista dovrebbe rimuovere), una riflessione sul sistema posizionale e sul significato di ciò che viene insegnato agli allievi.

## Bibliografia

Bellos A. (2010). *Il meraviglioso mondo dei numeri.* Torino: Einaudi.
Dani S.G. (1993). *Myths and reality: On «Vedic mathematics».* Mumbai: Tata Institute of Fundamental Research.
Gheverghese Joseph G. (1991). *C'era una volta un numero*. Milano: Il Saggiatore.
Tirthaji B. K. (1965). *Vedic Mathematics.* Delhi: Motilal Banardissas Pubblishers.
Srinivasa Iyengar S. (1967). *The History of Ancient Indian Mathematics.* Calcutta: World Press.
Valentinuzzi. T. Slide *Vedic Mathematics.*
*http://www.powershow.com/view1/1cacc0MjllM/Diapositiva_1_powerpoint_ppt_presentation*

## Sitografia

Area progetti politecnico Torino:
http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/Matematicae/Dic_07/Vedica.htm

Appunti dei corsi di Giuseppe Levi:
http://www.giuseppelevi.com/appunti-di-matematica-vedica-elementare.html
http://www.remorombi.it/index.php?option=com_content&view=article&id=74&Itemid=44

Wikipedia:
Aleph zero: http://it.wikipedia.org/wiki/Aleph-zero
Tempo di Planck: http://it.wikipedia.org/wiki/Tempo_di_Planck
Regola di Ruffini: http://it.wikipedia.org/wiki/Regola_di_Ruffini
Storia della matematica: http://it.wikipedia.org/wiki/Storia_della_matematica

# V. Segnalazioni



## 1. Matematica: il grande spettacolo

**Seconda grande festa della matematica**

Dipartimento didattico Oltremare, Riccione
NRD, operante presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna
Associazione Incontri con la Matematica
Direzione di Silvia Sbaragli

**Riccione, Parco Oltremare**
**sabato 23 e domenica 24 marzo 2013**

Una grande spettacolare festa della matematica, aperta a tutti, nella splendida cornice del Parco Oltremare, tra delfini e falchi.

**Programma**

**Sabato 23 marzo**

| | |
|---|---|
| 10.00-10.45 | **Alessandro Gimigliano** (Università di Bologna): *I numeri. Quattro passi nei secoli sulle loro tracce* |
| 10.45-11.30 | **Paolo Pasi** (RSDDM, Bologna): *Il segreto degli artisti: il numero della bellezza* |
| 11.30-12.15 | **Gianfranco Gambarelli** (Università di Bergamo): *Passeggiate e spigolature fra matematica pura e applicata, teoria dei giochi e poesia* |
| 12.30-13.00 | **Spettacolo dei rapaci** |
| 14.00-14.45 | **Anna Cerasoli** (divulgatrice della matematica): *Due storie per i più piccini* |
| 14.45-15.30 | **Bruno D'Amore** (NRD, Bologna) e **Federico Taddia** (giornalista e autore radiotelevisivo): *Ma perché diamo i numeri?* |
| 15.45-16.15 | **Spettacolo dei delfini** |
| 16.30-17.15 | **Federico Benuzzi** (giocoliere professionista, Bologna): Sessione didattica sui rapaci: *Volo anch'io. No tu no!* |
| 17.30-18.15 | **Emilio Pasquini** (Università di Bologna): *Matematica fra metrica e filologia* |
| 18.15-19.00 | **Gianfranco Arrigo** (SMASI, Lugano): *La matematica tradizionale giapponese come spunto didattico* |

**Domenica 24 marzo**

10.00-10.45 **Benedetto Di Paola** (GRIM, Palermo):
*Il fumetto: un possibile strumento didattico per l'insegnamento/ apprendimento della matematica nella scuola primaria e secondaria inferiore*
10.45-11.30 **Anna Cerasoli** (divulgatrice della matematica): *Tutti in cerchio!*
11.45-12.15 **Spettacolo dei delfini**

13.00-14.00 **Federico Benuzzi** (giocoliere professionista, Bologna):
*Fisica sognante. Riflessioni su matematica, fisica, giocoleria e didattica*
14.00-14.45 **Martha Isabel Fandiño Pinilla** (NRD, Bologna):
*Alcuni artisti colombiani, la matematica e la semiotica*
15.00-15.45 **Bruno D'Amore** (NRD, Bologna): sessione didattica sui delfini:
*Esseri umani, delfini, animali, la matematica è un istinto dell'essere vivente*
16.00-16.30 **Spettacolo dei rapaci**
16.45-17.30 **Raffaella Franci** (Università di Siena):
*Giochi matematici alla corte di Carlo Magno*
17.30-18.15 **Paolo Bascetta e Francesco Decio** (Bologna, Centro Diffusione origami):
*La geometria nell'origami*
18.15-19.00 **Guido Moretti** (artista, Brescia): *La terza via alla scultura*

**Mostre**

**Sabato 23 marzo e domenica 24 marzo**
**(dalle ore 9.30 alle 19.00)**

**Lorenzo Armaroli e Massimo Intelisano** (RSDDM, Bologna): Laboratorio interattivo di crittografia.

**Gianfranco Arrigo** (SMASI – Lugano): San Gaku*, La matematica tradizionale giapponese tra arte e scienza (XVII-XVIII sec.)*.

**Paolo Bascetta e Francesco Decio** (Bologna, Centro Diffusione Origami): *La geometria nell'origami.* Mostra e laboratorio interattivo con produzione di materiale geometrico.

**Lorella Campolucci e Danila Maori** (MIR, Corinaldo - RSDDM, Bologna) in collaborazione con **Media Direct**: *Robotica Lego e Polydron. Esperienze didattiche in continuità.*

**Benedetto Di Paola** (GRIM, Palermo): *Il fumetto: un possibile strumento didattico per l'insegnamento/apprendimento della matematica nella scuola primaria e secondaria inferiore.*

**Formath**: Giochi e attività per bambini e ragazzi. *Il Dottore Matematico: operando con la carta e con la penna* (Scuola primaria); *Le P della matematica: Pitagora e Pigreco* (Scuole Secondarie).

**Guido Moretti** (artista, Brescia): *La terza via alla scultura.*

**Paolo Pasi** (RSDDM, Bologna): *Profondo, profondo infinito. Un viaggio nell'universo di Escher.*

**Bambuseto**: progettazione e realizzazione di oggetti e strutture per creare e arredare spazi interni e all'aperto, ma anche giocattoli: tutto in bambù, naturalmente!

**Stefano Alberghi**, **Lorenza Resta** e **Sandra Gaudenzi** (Faenza): *«MATEFUN». La matematica del luna park.*

Gli autori sono a disposizione del pubblico. Per ogni mostra è realizzato un foglio esplicativo redatto dagli stessi autori, da distribuire al pubblico visitante.

Le stazioni di oltremare saranno aperte e fruibili come nelle normali giornate di apertura del parco, dalle 9.30 alle 19.00.

**Informazioni**

Per informazioni e iscrizioni: info@oltremare.org e 0541.4271, il programma dettagliato e continuamente aggiornato è pubblicato nei siti:
www.dm.unibo.it/rsddm
www.oltremare.org

Per prenotazioni alberghiere:
www.promhotelsriccione.it

| **Tariffe** | **se prenoti entro il 1. marzo 2013** |
|---|---|
| individuale x 1 giorno: 28 € | 19 € |
| individuale x 2 giorni: 36 € | 25 € |
| gruppi (min 25 pax) x 1 giorno: 19 € | 2 gratuità ogni 25 pax |
| gruppi (min 25 pax) x 2 giorni: 25 € | 2 gratuità ogni 25 pax |
| scuola (vale sempre 2g): 16 € | 12,50 € |

Per i gruppi scolastici sarà possibile usufruire, su prenotazione e con un costo aggiuntivo di 3 € a persona, di alcuni prodotti didattici facenti parte dell'offerta scolastica 2013 del Parco Oltremare.

**Come ci si arriva**

Pullman: autostrada A14 Bologna-Ancona, di fronte al casello di uscita «Riccione».

Treno: collegamento diretto dalla stazione ferroviaria di Riccione (linea urbana AM n°58)

# 2. Recensioni

**Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla. (2012). Matematica come farla amare. Firenze: Giunti Scuola. ISBN: 978-88-09-77195-6. Pagg. 190, € 10,00.**

Gli autori sono molto noti anche da noi e ammirati per la caparbietà e la profondità culturale dei loro studi in didattica della matematica. Con questo nuovo contributo offrono la possibilità agli insegnanti in primo luogo, e a tutti coloro che hanno interesse per la scuola, in particolare per l'insegnamento/apprendimento della matematica, di riflettere criticamente sulle proprie convinzioni. Stiamo attraversando un periodo storico molto delicato, contrassegnato da grossi ed evidenti squilibri che si possono notare anche nella nostra scuola. Il fatto che insegnare matematica sia molto difficile – come scrivono gli Autori – e che insegnarla per far sì che gli studenti la imparino è ancora più complesso, è una di quelle affermazioni che, fatte davanti a un pubblico di insegnanti, trova tutti d'accordo. Così come il riconoscere che uno degli aspetti basilari per ottenere un buon apprendimento (mi si perdoni l'aggettivo «buon» che nasconde molti aspetti che non voglio citare in questa sede) è l'aspetto emozionale e che decisivo per il successo negli studi è in misura preponderante la scuola primaria (o elementare). Succede però che queste affermazioni molto spesso rimangono in superficie, a mo' di slogan, e non sono studiate e approfondite come andrebbe fatto. Ben venga allora un testo come questo: serio, rigoroso, documentato, ma nello stesso tempo piacevolissimo, grazie all'abilità degli Autori che sanno catturare l'interesse usando un tono affabile, non privo di ironia, come dovrebbero fare tutti gli specialisti quando si rivolgono al grande pubblico.

Le prime 75 pagine appaiono come un racconto, una carrellata sullo stato della matematica nel mondo d'oggi, su come questa disciplina è vista e vissuta dall'uomo della strada allo scienziato, al letterato, all'artista e, principalmente, dallo studente.

Dato che, come si sa e si può verificare, alla fine di un normale percorso scolare, gli studenti ricordano, per quanto riguarda la matematica, quel che hanno appreso alla primaria, gli Autori si rivolgono direttamente agli insegnanti di questo ordine di scuola. Ciò non significa che gli altri (insegnanti delle secondarie e anche universitari) siano tagliati fuori; anzi, queste pagine sono molto rivelatrici e possono far luce sui frequenti e annosi problemi di apprendimento di fronte ai quali questi ultimi si trovano regolarmente. Già, perché è inutile prendersela con lo studente che sbaglia; occorre per contro indagare sulle cause che hanno determinato l'errore; più si conoscono, più se ne parla, tanto più si diffonderanno strumenti per prevenirle e rimediare.

La riflessione che gli Autori ci invitano a compiere prende avvio con una sintetica elencazione delle conoscenze indispensabili all'insegnante:

1. riflessioni sulla matematica, che non sono mai sufficienti;
2. analisi delle scelte epistemologiche alla base della matematica che si insegna e che si desidera venga appresa;
3. conoscenza almeno delle prime basi storiche sulle quali si fonda la creazione della nostra disciplina.

Ci si potrebbe chiedere: quali di questi tre punti si affrontano in una normale facoltà di matematica? Allora si capirebbe finalmente perché un laureato in matematica non è affatto pronto per svolgere la professione di insegnante.

Altro punto interessante sottolineato nel libro: la maggior parte delle persone è convinta che la matematica professi la verità. Ciò non è frutto di una posizione filosofica personale, ma di un insegnamento errato. Anche se troppo spesso l'insegnante usa il termine «vero», occorre ribadire che la matematica si costruisce sulla «coerenza» che deve esistere fra definizioni, assiomi e teoremi. Sostituire il concetto di coerenza con quello di verità, significa contribuire al formarsi di quell'immagine della matematica come disciplina «asettica», prefabbricata, che occorre imparare per forza, ma che non lascia alcuno spazio alla creatività e alle emozioni. Nulla di più falso.

Se a scuola si vive la matematica nel modo errato, appena descritto, non solo si va incontro all'insuccesso nell'apprendimento, ma si genera una falsa e pericolosa mentalità che spinge l'individuo a snobbare la disciplina, ad ammettere questo suo analfabetismo addirittura vantandosene, facendo sembianza di non conoscere l'importanza che riveste la matematica nella società e nella cultura universale di tutti i tempi.

Oggi gli studiosi di didattica ci indicano chiaramente quali devono essere i punti focali della formazione matematica nella scuola obbligatoria, ciò che ritroviamo puntualmente anche da noi negli intendimenti contenuti nei piani di studio che si stanno approntando all'interno della riforma HARMOS. Le «novità» più evidenti sono il nuovo modo di operare in geometria (per esempio lo studio delle figure tridimensionali anche nella scuola primaria), il nuovo modo di affrontare il calcolo (mentale-scritto, approssimato e strumentale) e l'introduzione/anticipazione della probabilità e della statistica.

Nel testo si dedicano alcune pagine al problema del linguaggio matematico, non per ribadire la falsa idea secondo la quale questo particolare linguaggio si differenzia da quello della letteratura perché totalmente referenziale, strumento per esprimere «realtà» esterne, ma per ribadire la grande affinità esistente tra i due linguaggi. Per esempio, *«nessuno pensa mai e nessuno avvisa mai gli studenti che in matematica è obbligatorio, necessario e irrinunciabile l'uso di metafore […]mentre nella poesia vengono spiegate dai critici e analizzate esplicitamente, nella lingua comune tendono a essere accettate e usate senza la consapevolezza che di metafore si tratta; in matematica quasi nessuno sembra accorgersi che in molte frasi si parla di metafore e non* *di oggetti o verbi o relazioni matematiche: 'prolungare un segmento', 'unire due punti', 'la retta r taglia la retta s' […]».*

Un altro messaggio importante: alla matematica occorre dar senso. Molto spesso gli studenti chiedono «A che serve questa cosa?» (dove il termine «cosa» è una variabile in senso matematico: la si può sostituire per esempio con «frazione», «equazione», «teorema di Pitagora», ecc.). Attenzione, però: a questa domanda si può rispondere in due modi: con riferimento a necessità reali oppure alla cosa in sé. Questo secondo modo è spesso tralasciato dagli insegnanti. Una «cosa» può avere senso impararla perché «è bella», perché «dà spazio alla fantasia», perché «dà soddisfazione».

Gli ultimi due capitoli sono dedicati alla pratica di classe. Si riprendono i grandi temi della trasposizione didattica, si passano in rassegna vari strumenti metodologici per poi affermare chiaramente che *«non esistono vie regie per l'apprendimento della matematica»*. Non poteva mancare una riflessione sul tema caldo degli errori, pregiudizi, misconcezioni e dubbi, corredata da numerosi esempi presi dalla realtà scolastica.

L'appendice è dedicata al tema delle «due culture» e la risposta degli autori è molto semplice: la cultura è unica.

Come sempre, i libri di questi Autori terminano con una nutrita elencazione bibliografica, testimone del grande e oscuro lavoro di documentazione che sono soliti compiere prima di scrivere. Anche in questo, Bruno e Martha ci indicano la via da seguire. (G. Arrigo, da «ScuolaTicinese», novembre-dicembre 2012)

**Stefano Beccastrini e Maria Paola Nannicini. (2012). Matematica e letteratura. Oltre le due culture. Trento: Erickson. ISBN: 978-88-590-0132-4. Pagg. 310, € 19,50.**

Questa nuova opera si inserisce nell'importante lavoro che i due autori stanno svolgendo da anni e che testimonia, agli insegnanti innanzi tutto, come la matematica è strettamente legata – storicamente, filosoficamente ed epistemologicamente – agli altri grandi assi della cultura. Su questa rivista abbiamo già presentato i libri di Stefano e Paola che trattano di matematica e storia delle civiltà (numero 58, pag. 126) e di matematica e cinema (numero 62, pag. 126). Chi ha avuto modo di leggere quei due saggi potrà ancor meglio apprezzare questa nuova e voluminosa opera, frutto di un enorme lavoro di documentazione e di analisi. C'è molto da imparare leggendo i 14 capitoli e il messaggio pedagogico contenuto nella conclusione. Recensire una tale opera non è cosa facile: lo si dice chiaramente anche nelle dotte prefazioni di Emilio Pasquini, noto letterato e storico della lingua italiana, e di Giorgio Bolondi, collega matematico e didatta che collabora anche con la scuola ticinese. Il presente contributo si delinea come una lettura in ottica ticinese e vuole mettere l'accento sul problema di fondo che pervade tutte le pagine del libro, questione molto sentita anche negli ambienti scientifici del nostro cantone: quella cosiddetta «delle due culture», ossia la separazione filosofica, sociologica e anche antropologica tra umanesimo e scienza. Nel nostro piccolo e variegato lembo di terra, infatti, l'uomo della strada, ma purtroppo anche chi occupa funzioni chiave nella promozione culturale, quando pensa alla cultura, in particolare alle manifestazioni culturali, considera l'arte – nelle sue forme espressive classiche più conosciute – e lo spettacolo, promosso addirittura a «scienza della comunicazione».

Quasi mai si sente parlare di scienza in senso stretto – nei suoi innumerevoli risvolti, che pure hanno segnato in modo preponderante la nostra storia e influenzano il nostro attuale modo di vivere –, ancor meno di matematica. Ciò, nonostante vi siano nel cantone persone e associazioni che si danno da fare per promuovere la cultura scientifica nella popolazione in genere e particolarmente nella scuola. Come si è giunti a una tale deprecabile situazione – che investe tutto il mondo occidentale e che si è acuita nella cultura italiana – lo spiegano bene i due autori: la parola chiave è il neoidealismo, movimento di pensiero promosso in Italia da Benedetto Croce e Giovanni Gentile. Importanti opposizioni a questa filosofia sono dovute a personaggi come Raymond Queneau, matematico e letterato francese del secolo scorso, che insieme allo scienziato umanista François Le Lionnais fonda nel 1960 il movimento *Oulipo*, cioè *Ouvroir de littérature potentielle*.

In questo libro gli Autori hanno messo tutte le energie per mostrare l'inconsistenza e la pericolosità della mentalità neoidealista. Vi si incontrano personaggi noti che mostrano lati non sempre conosciuti, perché colpevolmente celati dalla storia ufficiale. Così, già nel secondo capitolo si ammirano tre grandi matematici che hanno esercitato una forte influenza sulla letteratura mondiale: Archimede di Siracusa (III sec. a.C.), Isaac Newton (XVII e XVIII sec.) e Nikolaj I. Lobacevskij (XIX sec.). Archimede è visto come grande ispiratore della poesia latina del I sec. a. C. e l'attenzione è posta sul trattato *Arenario* che, soprattutto con la riflessione sui numeri grandi, colpì particolarmente l'animo poetico di Virgilio. Newton è strettamente collegato a Niccolò Copernico, Giordano Bruno, Galileo Galilei e Giovanni Keplero. Il Seicento attraverso il razionalismo e l'empirismo e il Settecento, secolo dell'Illuminismo, promossero una grande diffusione della matematica e della scienza in generale: si è configurata la «logica del mondo nuovo». Questi grandi pensatori mettono scompiglio fra le credenze tradizionali che collocano la Terra al centro del mondo. La loro idea che la Terra ruota attorno al Sole, ma ancor di più quella che anche il Sole si muove, creano reazioni disparate: dall'esaltazione per un universo in continua evoluzione allo smarrimento per non sapere più dove stia andando l'umanità. Di fatto Lobacevskij è colui che ha osato mettere in discussione il famoso quinto postulato di Euclide, conosciuto anche come «postulato delle parallele». Egli crea una nuova geometria, chiamata originariamente «Geometria immaginaria», termine letterariamente affascinante, poi sostituito su suggerimento di Felix Klein dalla denominazione «Geometria non-euclidea». Il primo grande scrittore che testimonia la nascita della nuova geometria è Fedor Dostoevskij, nel suo romanzo di grande successo *I fratelli Karamazov*. Non è nostro compito né nostra intenzione continuare nell'esemplificazione delle tante perle che questo libro contiene. Ci limitiamo a segnalare i titoli dei capitoli che seguono il secondo:

- Tre matematici premi Nobel per la letteratura (Bertrand Russell, Aleksandr Solgenitsin, John M. Coetzee)
- La matematica della letteratura
- Numeri in versi
- Leonardo Fibonacci e la poesia
- Poeti appassionati di matematica e matematici poeti (Gianni Rodari, Hans M. Enzensberger, Piet Hein, Eugène Guillevic, Jacques Roubaud)
- La matematica nella narrativa (Hermann Broch, Hermann Hesse, Raymond Queneau, Italo Calvino)

– La matematica e il romanzo
– La matematica in alcuni particolari generi letterari
– Tre camei (Dante Alighieri, Robert Musil, Jorge Luis Borges)
– Pensare, e scrivere, il cosmo (Galileo, Giacomo Leopardi, Emily Dickinson)
– Tre pastori anglicani tra letteratura, matematica e viaggi immaginari: Jonathan Swift, Edwin A. Abbott, Lewis Carroll

Come già accennato, nella conclusione gli Autori si rivolgono in particolare al mondo della scuola, dove si può fare tanto per abbattere la muraglia che in tanti ambienti si erge ancora e separa lo scibile in due mondi disgiunti, cosa che, come abbiamo detto e come appare mirabilmente da queste pagine, è inconsistente e dannosa. Ogni insegnante può dare il contributo a questo compito basilare. Il docente di matematica lo può fare se si stacca con decisione dal tecnicismo oggi imperante e conduce gli allievi verso l'apprendimento di una matematica dai risvolti umani e culturalmente umanistici. (G. Arrigo)

**Emanuele Delucchi, Giovanni Gaiffi e Ludovico Pernazza. (2012). Giochi e percorsi matematici. Milano: Springer. ISBN: 978-88-470-2616-2. Pagg. 198, € 22,95.**

Il libro offre una raccolta di spunti interessanti e situazioni matematiche adatte per il laboratorio matematico della scuola secondaria. Gli Autori lo dedicano a tutti gli appassionati di matematica. I contenuti nascono da esperienze concrete effettuate nella Settimana Matematica organizzata dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, a cura di Rosetta Zan e Pietro Di Martino. Si tratta di «laboratori» rivolti agli studenti degli ultimi anni delle scuole superiori, *«pensati per mettere gli studenti a diretto contatto con l'attività matematica, accompagnandoli nello studio di problemi che chiamano in causa le loro conoscenze, ponendole però sotto prospettive nuove».*

Sullo slancio dei primi successi, questi laboratori sono poi stati realizzati in altre parti d'Italia, in Europa e negli Stati Uniti. Sotto forma di giochi, queste attività appaiono molto ricche didatticamente. La motivazione è forte perché, per vincere, occorre capire e apprendere parecchia matematica «nascosta»; l'esigenza agonistica fa partire il percorso matematico. Per esempio: un gioco con scacchiera e pedine nasconde nel suo meccanismo un importante teorema sulle funzioni continue. I giochi permettono di rompere, di tanto in tanto, gli schemi dei programmi scolastici e di aprire prospettive nuove; per loro natura, pongono spesso problemi non standard che poi conducono agli apprendimenti usuali.

La presentazione degli argomenti permette diversi piani di lettura: ci si può limitare alla descrizione degli esempi più semplici, ma si può anche approfondire grazie alle dimostrazioni dei teoremi che entrano in scena. Il libro è suddiviso in quattro parti, ciascuna legata a un gioco o a una famiglia di giochi.

Nella prima parte si trovano il Chomp, il Nim, il gioco dei divisori, il Chomp sui grafi e una serie di giochi in cui i due concorrenti, a turno, «mangiano» qualcosa.

La seconda parte è dedicata al gioco del 15 e affini.

Nella terza parte ci si occupa dell'Hex, un gioco con pedine su scacchiera inventato da Piet Hein e John Nash.

Nella quarta parte si discutono giochi con carta e penna (Germogli, Cavoletti di Bruxelles, eccetera).

Le parti condividono la stessa struttura, articolata in sei capitoli.

Il libro si fa apprezzare soprattutto per l'accurata presentazione. I vari giochi o, se si preferisce, le diverse situazioni sono accompagnate da vere e proprie lezioni di matematica, ciò che, di solito, non succede. Il canovaccio classico dei libri che trattano di giochi e quiz matematici si limita a una presentazione del problema e, di solito alla fine, mostra le soluzioni, non sempre corredate da spiegazioni. Qui invece il gioco fa da sfondo a una serie di problemi (di «veri problemi») accompagnati da considerazioni teoriche ricche di esempi.

Il tutto fa di questo testo un interessante strumento a disposizione degli insegnanti delle scuole secondarie superiori affinché possano arricchire le proprie lezioni e condurre gli studenti ad appassionarsi al gioco intellettuale della matematica.

**Margherita Barile e Sergio De Nuccio (2011). Lezioni di matematica dagli scritti di Évariste Galois. Vol. 3. Prefazione di Silvio Maracchia. Campobasso: Edizioni Goliardiche. ISBN 978-88-7873-106-6. Pagg. 544, € 45.**

Sul numero 59 di questa rivista sono stati recensiti i primi due volumi di questa interessantissima opera. Già si era detto che le molteplici proposte contenute nei primi due tomi si inseriscono bene nella matematica che si tratta nelle scuole superiori, ma anche che l'insegnante di scuola media può trovarvi utili spunti adattabili a quel livello scolastico. Il terzo volume non è da meno. Anzi, nelle oltre 500 pagine si trovano idee, considerazioni, esempi di documenti (sempre affascinanti le riproduzioni in lingua originale), spunti inediti che costituiscono un vero tesoro per l'insegnante di matematica. Pensando alla realtà ticinese, nei tre volumi si possono trovare stimoli e materiali per numerosi lavori di maturità, ma anche per preparare lezioni vive, nelle quali l'ordito matematico si intreccia perfettamente con le trame storiche ed epistemologiche.

Dalla prefazione di Silvio Maracchia riportiamo il seguente stralcio molto significativo: *«Una grande opera, quindi, per quantità e per qualità nella quale le varie e lunghe citazioni di opere collegate storicamente agli argomenti trattati vengono riportate nella loro lingua originale e successivamente tradotte. Si potrebbe dire, pertanto, che si tratta di una matematica esposta storicamente che ha come punto di partenza le indicazioni di Galois; punto centrale, anzi, poiché spesso l'argomento viene esposto indietreggiando rispetto all'indicazione di Galois per consentirne una maggiore comprensione e, successivamente, completato e sviluppato».*

L'intera opera è suddivisa in otto lezioni e questo volume contiene le ultime tre. Nella sesta lezione, curata da Margherita Barile, prendendo spunto dalla costruzione operata da Galois del lato del pentadecagono regolare, si riprendono dapprima le costruzioni di Euclide e si analizza poi il caso generale della costruibilità con riga e compasso sino al famoso risultato di Gauss e a quello successivo di Pierre Laurent Wantzel.

Le ultime due lezioni sono curate da Sergio De Nuccio. L'argomento centrale della settima è la risoluzione approssimata delle equazioni razionali. È noto che i metodi esatti del tipo radico-razionale sono possibili fino al quarto grado, come ha mostrato Galois, ma in questa lezione ci si occupa dei metodi approssimati. Si accenna ai metodi antichi (della falsa posizione semplice e doppia), si passa dalla regola aurea di Cardano per poi giungere ai vari metodi di approssimazione (Viète, Newton, Raphson, Simpson e Lagrange).

L'ottava lezione è centrata sulla rettificazione delle curve piane e sghembe e invita ad affrontare un altro lavoro di Evariste Galois sul raggio di curvatura di queste curve, scritto quando era ancora allievo della *Ecole Normale* di Parigi. Tutto ciò dà lo spunto all'Autore per presentare i lavori originali di Leibniz, Johann e Jacob Bernoulli, de l'Hospital, Newton, Eulero e Cramer.

Riportiamo infine il piano dell'opera:

– Volume 1
  Lezione Prima: I numeri interi
  Lezione Seconda: Calcolo di aree e volumi
– Volume 2 - parte I
  Lezione Terza: I logaritmi
  Lezione Quinta - parte I: I teoremi fondamentali del calcolo differenziale
– Volume 2 - parte II
  Lezione Quarta: Le frazioni continue
  Lezione Quinta - parte II: I teoremi fondamentali del calcolo differenziale
– Volume 3
  Lezione Sesta: La misura del lato del pentadecagono regolare
  Lezione Settima: Risoluzione approssimata delle equazioni
  Lezione Ottava: Raggio di curvatura delle curve nello spazio

Progetto grafico
Bruno Monguzzi
Prestampa
Taiana
Stampa
Veladini

Redazione
Laboratorio di didattica della matematica
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera

Telefono
091 814 18 21/22/24
Fax
091 814 18 19
gianfranco.arrigo@span.ch

Amministrazione
Ufficio dell'insegnamento medio
Viale Portone 12
CH–6501 Bellinzona
Svizzera
Fax
091 814 18 19

Esce due volte all'anno
a maggio e a dicembre

Abbonamento annuo
SFR 30
€ 16

**Bollettino dei docenti di matematica**
**65**

In questo numero: D. Baggi ricorda A. Turing; S. Beccastrini e P. Nannicini trattano il tema Matematica e Letteratura; S. Sbaragli e G. Santi offrono un saggio di Didattica teorica; A. Frapolli propone il quiz numero 48; B. Mutti suggerisce giochi sulle simmetrie; G. Mainini e F. Locatello presentano saggi sulla storia del calcolo; segnalazioni e recensioni.



ISBN 978-88-86486-87-3
Fr. 18.–

Repubblica e Cantone
Ticino
Dipartimento dell'educazione,
della cultura e dello sport