Fundamentos da Geometria

Fernando Manfio
ICMC – USP

Sumário

Introdução

Caro leitor,

Estas notas foram escritas para servir de texto a um curso de Geometria elementar para alunos iniciantes de graduação, tendo como objetivo apresentar os fundamentos da Geometria sob o ponto de vista axiomático, caracterizando em seguida a Geometria Euclidiana Plana e discutindo alguns problemas interessantes de Geometria Espacial.

O conjunto de axiomas escolhido é aquele apresentado por A. Pogorelov [14]. A vantagem desta escolha é que esta leva o estudante rapidamente aos teoremas mais importantes. O roteiro de apresentação dos axiomas segue os moldes do excelente livro de Lucas Barbosa [3].

A primeira parte do texto corresponde aos fundamentos da Geometria. Todos os resultados obtidos nesta parte são válidos em qualquer geometria, Euclidiana ou não. Mais precisamente, o conjunto de axiomas escolhido pode ser adotado em qualquer geometria, de modo a obter os mesmos resultados iniciais.

A segunda parte aborda a Geometria Euclidiana Plana. O ponto de partida é o quinto postulado, ou o Axioma das Paralelas. Vários teoremas e aplicações são discutidos. Especial atenção é dada aos conceitos de área de polígonos, semelhanças, propriedades da circunferência, culminando com as transformações do plano, onde apresentamos a classificação das isometrias de um ponto de vista totalmente geométrico.

Na terceira e última parte do texto, apresentamos rapidamente as noções primitivas e axiomas da Geometria espacial e, em seguida, discutimos as noções de paralelismo e ortogonalidade entre retas e planos. Por fim, apresentamos alguns problemas acerca dos poliedros, como a noção de volume, o teorema de Euler para poliedros convexos e o terceiro problema de Hilbert.

Linhas históricas da Geometria

Os Elementos de Euclides

Os registros mais antigos que temos de atividades humanas acerca da geometria remontam à época das antigas civilizações da Mesopotâmia. Embora o historiador grego Heródoto atribua aos egípcios o início da geometria, alguns tabletes de argila datados do período 1900 – 1600 a.C., durante o antigo império babilônico, contêm textos e diagramas indicando algum tipo de familiaridade desses povos com a geometria, com instâncias do Teorema de Pitágoras. Os babilônios, os egípcios e outros povos da Antiguidade que desenvolveram formas primitivas de geometria, como os hindus e os chineses, eram motivados por necessidades práticas de medições geométricas como, por exemplo, a demarcação de terras.

O processo de transição, da geometria como um conjunto de regras impíricas e úteis, aplicadas a casos particulares e cujas justificativas eram aparentemente negligenciadas, para uma geometria na concepção de ciência, buscando explicações racionais para seus resultados, deve-se aos gregos. Possivelmente, foi um processo lento e gradual. Vários pensadores gregos visitaram antigos centros de conhecimento, como o Egito e a Babilônia, e lá adquiriram conhecimentos sobre matemática e astronomia. Muito pouco se sabe sobre a vida e a obra desses pioneiros.

Tales de Mileto (624 – 547 a.C.) é considerado como sendo o introdutor da geometria na Grécia e o primeiro homem da história a que foram atribuídas descobertas matemáticas científicas. Com o objetivo de verificar a correção dos resultados estabelecidos, ele desenvolveu a primeira geometria lógica. A sistematização iniciada por Tales foi continuada, nos dois séculos seguintes, por Pitágoras de Samos (569 – 475 a.C.) e seus discípulos. Conta-se que, em suas viagens, Pitágoras teria encontrado Tales e sofrido influência dele e, mais tarde, Pitágoras teria fundado uma irmandade secreta em Croton, uma colônia grega no sul da Itália, cuja importância é avaliada pelas ideias que difundiu. Pitágoras buscava na aritmética e na geometria a chave para a compreensão do universo e, devido às suas convicções, é frequentemente citado como sendo o primeiro matemático puro da história. Foram os pitagóricos, membros da sua irmandade, que descobriram os números racionais. Platão (427 – 347 a.C.) nasceu em Atenas, mas acabou tendo contato com a escola pitagórica em suas viagens. Retornando a Atenas, por volta de 389 a.C., fundou sua famosa *Academia* e dedicou o resto de sua vida a escrever e ensinar. Embora tenha feito poucos trabalhos originais em matemática, deu contribuições profundas na lógica e nos métodos usados em geometria.

A ideia grega de usar a matemática para compreender os mistérios do universo dependia de uma noção de *demostração matemática*. A percepção desse fato é, provavelmente, a primeira descoberta importante na história da ciência. Credita-se a Tales e Pitágoras a introdução dessa noção. Mas é devido a Platão a compreensão da *verdade* nesse contexto. Segundo ele, tanto as noções como as proposições matemáticas não se referem a objetos do mundo físico, mas a certas entidades ideais que habitam um mundo diferente do mundo físico. Por exemplo, uma reta que traçamos em uma folha de papel é apenas uma representação, aproximada, da reta que vive em um *mundo de ideias* ou, como alguns preferem, em um *mundo platônico de entidades ideais*. O mesmo se aplica às proposições matemáticas verdadeiras. Essa abordagem nos alerta para distinguirmos as noções matemáticas precisas das aproximações que encontramos no mundo físico. Além disso, as proposições matemáticas que habitam o mundo platônico, ditas verdadeiras, estão submetidas a um padrão de objetividade externo que não depende de nossas mentes, opiniões ou processos culturais.

Euclides (325 – 265 a.C.) provavelmente foi aluno da Academia de Platão e foi o fundador da forte escola matemática de Alexandria, numa época em que Atenas passava por um momento de declínio político. Sua obra principal, os *Elementos*, consiste de treze volumes que contêm a maior parte da matemática conhecida na época. Trata-se de um texto sistemático, organizado segundo os critérios de rigor lógico-dedutivo, mas também de experiência intuitiva. O volume I trata de geometria plana e sua construção baseia-se em dez proposições, separadas em dois grupos: cinco foram classificadas como *axiomas* e as outras como *postulados*. À época, os axiomas consistiam basicamente em verdades aplicáveis a todas as ciências, enquanto que os postulados eram verdades acerca da particular disciplina em estudo, como a geometria. Os cinco axiomas eram:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.

2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.

3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
5. O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Os postulados eram:

1. Existe uma única reta contendo dois pontos dados.
2. Todo segmento de reta pode ser estendido indefinidamente em todas as direções.
3. Existe uma circunferência com quaisquer centro e raio dados.
4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
5. Se uma reta intercepta outras duas retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se estendidas indefinidamente, interceptam-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Nota-se, à primeira vista, que a natureza do enunciado do quinto postulado é diferente da dos precedentes. Segundo a Definição 23 do volume I dos Elementos, *retas paralelas* são retas contidas num mesmo plano que, se prolongadas indefinidamente, não se interceptam, de modo que ele descreve exatamente uma situação em que duas retas não são paralelas. Ainda na época dos gregos algumas dúvidas foram levantadas quanto à colocação desse enunciado como um postulado e não como uma proposição passível de demonstração. Dentre as tentavias gregas de prová-lo, destacam-se as de Ptolomeu e Proclo. Posteriores a estes, outros famosos matemáticos tentaram demonstrá-lo: Nasiradin (1201 – 1274), John Wallis (1616 – 1703), Gerolamo Sacheri (1667 – 1733), John H. Lambet (1728 – 1777), Adrien M. Legendre (1752 – 1833), Louis Bertrand (1731 – 1812) e Carl F. Gauss (1777 – 1855). Estes deixaram nas suas obras referências relevantes sobre o assunto.

Os primeiros que compreenderam que o quinto postulado de Euclides era indemonstrável e que se poderia, a partir de sua negação, construir geometrias novas e totalmente coerentes foram Gauss, Lobachevski (1792 – 1856) e Bolyai (1802 – 1860), que chegaram às suas conclusões de forma independente um dos outros. Para os gregos, principalmente para os seguidores de Platão, o espaço físico era uma entidade absoluta, a realização direta de um objeto platônico. A geometria Euclidiana era a ciência do espaço físico e, portanto, a única geometria possível e certamente a verdadeira, e constituía-se do estudo de propriedades das figuras geométricas mergulhadas nesse espaço. Com as descobertas de Gauss, Lobachevski e Bolyai, não apenas a geometria Euclidiana deixou de ser a única possível, mas também deixou de ser aquela verdadeira. Finalizou-se assim uma época na história da matemática que fora inaugurada dois milênios antes, originando-se uma transformação profunda não apenas do pensamento matemático, mas também do pensamento teórico em geral, que acabaria por influenciar nossas concepções do universo e do mundo físico.

Os trabalhos de Gauss, Lobachevski e Bolyai mas, principalmente, dos dois últimos, foram levados às suas devidas proporções por Friedrich B. Riemann (1826 – 1866) que deu início a um segundo período no desenvolvimento das geometria Euclidianas e não-Euclidianas, período este caracterizado pelas investigações sob o ponto de vista do Cálculo Diferencial, em contraste com os métodos sintéticos previamente utilizados. A preocupação com a fundamentação da geometria em bases sólidas dominou a pesquisa matemática sobre o assunto culminando com a reconstrução da geometria Euclidiana por Hilbert o que, finalmente, encerrou a longa batalha com o quinto postulado de Euclides.

Os Axiomas de Hilbert

Um *sistema axiomático* consiste num conjunto de *verdades* acerca de uma determinada realidade, organizado de tal forma que todos os conceitos são definidos a partir de alguns poucos conceito básicos, chamados *termos primitivos*, os quais não se define e que são conhecidos intuitivamente. Esses conceitos são então articulados por meio de algumas proposições primitivas, chamados *axiomas*[1], que não se demonstram, pois sua veracidade é evidente pela intuição que temos acerca do domínio em estudo. As demais proposições, os *teoremas*, são então obtidos por demonstração a partir dos axiomas. Além disso, um sistema axiomático deve satisfazer três condições seguintes: ser *consistente*, ou seja, os axiomas não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas consequências; deve ser *completo*, no sentido de serem suficientes para provar verdadeiras ou falsas todas as proposições formuladas no contexo da teoria em questão; por fim, cada axioma deve ser *independente* dos demais, no sentido de que não é consequência deles, sob

[1]Hoje em dia, a distinção entre axioma e postulado não é mais feita, subentendendo que significam a mesma coisa.

pena de ser supérfluo.

A fundamentação da geometria estabelecida por David Hilbert (1862 – 1943) parte de dois termos primitivos que são as noções de *ponto* e *reta*. Entre estes termos primitivos, Hilbert supõe a existência de três relações primitivas que são expressas por *um ponto pertence a uma reta*, *um ponto está entre dois pontos* e a relação de *congruência*. Esses termos e relações primitivas devem satisfazer uma série de axiomas. Hilbert apresenta esses axiomais, em seu trabalho *The Foundations of Geometry* [11], em cinco grupos:

1. Axiomas de Incidência,
2. Axiomas de Ordem,
3. Axiomas de Congruência,
4. Axiomas de Continuidade,
5. Axioma das Paralelas.

Os axiomas de incidência expressam a noção de *estar em*, enquanto os axiomas de ordem expressam a noção de *estar entre*. Os axiomas de continuidade não envolvem uma nova relação primitiva mas tratam de garantir que certas construções, que vão nos permitir medir distâncias entre pontos, são possíveis. O axioma das paralelas abre porta à Geometria Euclidiana. Nesse texto, adotaremos o axioma enunciado por John Playfair (1748 – 1819), ao invés do quinto postulado enunciado por Euclides:

> Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

É interessante notar que esse axioma já havia sido considerado por Proclo, como o próprio Playfair apontou, mas é normalmente associado ao nome de Playfair.

O fundamental dos termos e relações primitivas, bem como dos axiomas, é entender claramente o adjetivo *primitivo*. Com isso, o que se quer dizer é que estes termos e relações não vão ser definidos através de outros, mas cada pessoa deve fazer a sua própria representação do que são pontos, retas, estar em, etc. Não importa a imagem que cada um faça desses objetos e relações, o que é essencial é que as interconexões entre eles, expressas pelos axiomas, sejam reconhecidos como verdadeiras.

Parte I

Fundamentos da Geometria

Capítulo 1

Axiomas de Incidência

Os axiomas de incidência definem a ideia expressa pela noção de *estar em*, além de estabelecer uma conexão entre os termos primitivos do plano: ponto e reta.

1.1 Axiomas

Axioma 1. *Dados quaisquer dois pontos distintos, A e B, existe uma única reta que os contém.*

De acordo com o Axioma 1, uma reta está completamente determinada pela especificação de dois pontos distintos. Assim, denotaremos a única reta que passa pelos pontos distintos A e B por AB, e diremos a reta AB.

Definição 1.1.1. Se um ponto é comum a duas retas, dizemos que este ponto é um ponto de *interseção* dessas retas. Duas retas que se interceptam num único ponto são chamadas de *retas concorrentes*.

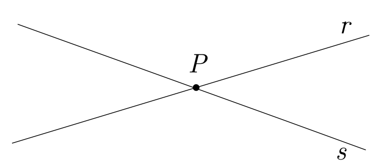

Figura 1.1: Retas r e s concorrentes no ponto P.

Axioma 2. *Em cada reta existem ao menos dois pontos distintos e existem três pontos distintos que não pertencem a uma mesma reta.*

Segue do Axioma 2 que reta é um subconjunto próprio do plano.

Proposição 1.1.2. Duas retas distintas ou não se interceptam ou se interceptam em um único ponto.

Demonstração. Dados duas retas distintas, suponha que elas se interceptam em dois (ou mais) pontos. Pelo Axioma 1, estas retas serão coincidentes, o que é uma contradição pois, por hipótese, elas são distintas. Portanto, a interseção dessas retas ou é vazia ou só contém um ponto. □

Definição 1.1.3. Pontos pertencentes a uma mesma reta são chamados *colineares*; caso contrário, são chamados *não-colineares*.

Observação 1.1.4. Ao estudarmos geometria é comum darmos uma representação gráfica aos termos primitivos. Imaginamos um plano como uma superfície de uma folha de papel que se estende indefinidamente em todas as direções. Nela, a marca da ponta de um lápis representa um ponto e a parte de uma reta é obtida usando-se uma régua. Por exemplo, na Figura 1.1, estão representadadas duas retas, r e s, e um ponto P, que é o ponto de interseção dessas retas. Muitas vezes faremos uso desse artifício. No entanto, os desenhos devem ser considerados apenas como um instrumento de auxílio à intuição e à linguagem e, em momento algum, devem ser utilizados como dados para demonstrações.

1.2 Exercícios

1. Quantos pontos comuns a pelo menos duas retas pode ter um conjunto de três retas distintas do plano? E um conjunto de quatro retas?

2. Prove que três pontos não-colineares determinam três retas. Quantas retas são determinadas por quatro pontos, sendo que estes são três a três não-colineares? E para o caso de seis pontos?

3. Usando apenas os conhecimentos estabelecidos até então, discuta a seguinte questão: Existem retas que não se interceptam?

4. Por que o conjunto de todos os pontos do plano não pode ser uma reta? O conjunto vazio pode ser uma reta do plano?

5. De acordo com os Axiomas 1 e 2, qual o número mínimo de pontos de uma reta?

Capítulo 2

Axiomas de Ordem

Os axiomas de ordem definem a ideia expressa pelo termo *estar entre*, e tornam possível, com base nessa ideia, descrever uma *ordem de sequência* dos pontos sobre uma reta. Os pontos de uma reta têm uma certa relação um com o outro, e a noção de estar entre servirá para descrevê-la.

2.1 Axiomas

Axioma 3. *Para quaisquer três pontos distintos colineares, apenas um deles está entre os outros dois.*

As expressões *um ponto C está entre A e B*, *um ponto C separa os pontos A e B* ou *os pontos A e B estão em lados opostos do ponto C* serão assumidas como equivalentes.

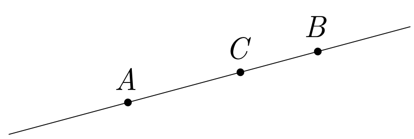

Figura 2.1: O ponto C está entre A e B.

Axioma 4. *Se A, B e C são pontos tais que C está entre A e B então estes três pontos são distintos, colineares e C está entre B e A.*

Definição 2.1.1. Dados dois pontos distintos, A e B, o conjunto dos pontos A, B e todos os pontos que estão entre A e B é chamado de *segmento AB*. Se A e B são coincidentes, dizemos que AB é o *segmento nulo*. Os pontos A e B são chamados as *extremidades* do segmento AB.

Definição 2.1.2. Dados dois pontos distintos, A e B, a *semi-reta de origem A contendo o ponto B* é o conjunto dos pontos do segmento AB unido com todos os pontos C tais que B está entre A e C.

Figura 2.2: Semi-reta S_{AB}.

A semi-reta de origem A contendo o ponto B será denotada por S_{AB}. Dois pontos distintos, A e B, determinam duas semi-retas, S_{AB} e S_{BA}, as quais contêm o segmento AB. Além disso, temos a seguinte:

Proposição 2.1.3. As semi-retas S_{AB} e S_{BA} satisfazem as seguintes propriedades:

(a) $S_{AB} \cup S_{BA}$ é a reta determinada por A e B, i.e., a reta AB.

(b) $S_{AB} \cap S_{BA}$ é o segmento AB.

Demonstração. (a) Como as semi-retas S_{AB} e S_{BA} são constituídas de pontos da reta AB, segue que $S_{AB} \cup S_{BA}$ está contido na reta AB. Por outro lado, se P é um ponto da reta AB, o Axioma 3 garante que apenas uma das seguintes possibilidades ocorre:
(i) P está entre A e B,
(ii) A está entre B e P,
(iii) B está entre A e P.
No caso (i), o ponto P pertence ao segmento AB; no caso (ii), P pertence a S_{BA}; no caso (iii), P pertence a S_{AB}. Portanto, em qualquer caso, P pertence a $S_{AB} \cup S_{BA}$.
(b) Dado um ponto $P \in S_{AB} \cap S_{BA}$ suponha, por absurdo, que P não pertença ao segmento AB. Assim, A está entre P e B ou B está entre A e P. No primeiro caso, concluimos que $P \in S_{BA}$ e $P \notin S_{AB}$, o que é uma contradição. Analogamente para o segundo caso. Reciprocamente, todo ponto P pertencente ao segmento AB pertence, por definição, às semi-retas S_{AB} e S_{BA} logo, P está na interseção $S_{AB} \cap S_{BA}$. □

Axioma 5. *Dados dois pontos distintos, A e B, existem um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D.*

Decorre do Axioma 5 que entre quaisquer dois pontos existe uma infinidade de pontos. Além disso, toda semi-reta S_{AB} contém uma infinidade de pontos além daqueles pertencentes ao segmento AB.

Considere uma reta r e dois pontos distintos, P e Q, não pertencentes a r. Dizemos que os pontos P e Q *estão em um mesmo lado* da reta r se o segmento PQ não a intercepta. Caso contrário, dizemos que P e Q *estão em lados opostos* da reta r.

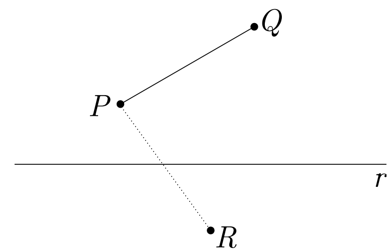

Figura 2.3: P e Q estão do mesmo lado de r; P e R estão em lados opostos.

Definição 2.1.4. Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, o *semi-plano* determinado por r contendo P é o conjunto de todos os pontos Q tais que P e Q estão do mesmo lado de r, unido aos pontos de r.

A reta r é chamada de *origem* do semi-plano.

Axioma 6 (Separação do plano)**.** *Uma reta r determina somente dois semi-planos distintos, cuja interseção é a própria reta r.*

Uma *figura geométrica* é simplesmente um subconjunto próprio do plano. Usando-se segmentos, podemos construir inúmeras figuras geométricas. Uma das mais simples é o *triângulo*, que é formada por três pontos não-colineares e pelos segmentos definidos por esses três pontos. Os três pontos são chamados *vértices* do triângulo e os segmentos são os *lados* do triângulo.

Indicaremos o triângulo determinado pelos pontos A, B e C por ABC, e diremos triângulo ABC.

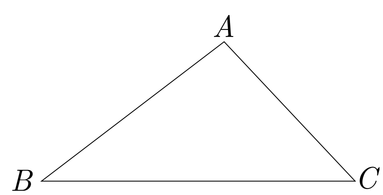

Figura 2.4: Triângulo ABC.

Teorema 2.1.5 (Pash)**.** *Se ABC é um triângulo e r é uma reta que intercepta o lado AB em um ponto entre A e B, então r também intercepta, pelo menos, um dos outros dois lados.*

Demonstração. Se o ponto C pertence a r, o Teorema está provado pois, neste caso, r intercepta os dois lados, AC e BC. Suponha, então, que $C \notin r$ (cf. Figura 2.5). Como A e B não pertencem a r e o segmento AB intercepta r segue, por definição, que A e B estão em lados opostos de r. Como $C \notin r$, segue do Axioma 6 que C está do mesmo lado de A em relação a r ou do mesmo lado de B em relação a r. Se A e C estão do mesmo lado de r, então B e C estão em lados opostos de r. Isso significa que r intercepta o segmento BC e não intercepta AC. Se B e C estão do mesmo lado de r, analogamente se prova que r intercepta o segmento AC e não intercepta BC. $\square$

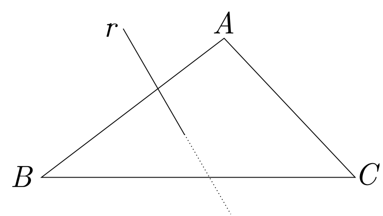

Figura 2.5: Teorema de Pash.

2.2 Exercícios

1. São dados quatro pontos A, B, C e D e uma reta r que não contém nenhum deles. Sabe-se que os segmentos AB e CD interceptam a reta r e que o segmento BC não a intercepta. Mostre que o segmento AD também não a intercepta.

2. Dados quatro pontos A, B, C e D, mostre que se os segmentos AB e CD se interceptam, então os pontos B e D estão em um mesmo semi-plano em relação à reta que passa por A e C.

3. Sejam AB e CD segmentos e E um ponto tais que $AB \cap CD = \{E\}$. Mostre que a reta que contém AB não pode conter CD.

4. Seja C um ponto pertencente à semi-reta S_{AB}, com $C \neq A$. Mostre que $S_{AB} = S_{AC}$, $BC \subset S_{AC}$ e que $A \notin BC$.

5. Podem existir dois segmentos distintos tendo dois pontos em comum? E tendo exatamente dois pontos em comum?

Capítulo 3

Axiomas de Continuidade

Os axiomas de continuidade não envolvem uma terceira relação primitiva mas tratam de garantir que certas construções, que vão nos permitir medir distâncias entre pontos, são possíveis.

3.1 Axiomas sobre medida de segmentos

O conceito de medida de um segmento é introduzido mediante a adoção de uma unidade de comprimento que, neste curso, a faremos axiomaticamente. Uma vez que soubermos medir segmentos estaremos aptos a poder compará-los em tamanho.

Axioma 7. *A cada segmento AB está associado um único número real positivo, e ao segmento nulo está associado o número zero.*

O número associado a um segmento AB, dado pelo Axioma 7, é chamado de *medida* do segmento AB, ou *comprimento* do segmento AB, e será denotado por $\overline{AB}$.

Axioma 8. *Se um ponto C está entre dois pontos A e B então $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$.*

Dados uma reta r e um ponto $O \in r$, o ponto O divide r em duas semiretas opostas. A uma destas chamamos de *parte positiva de* r, a outra de *parte negativa*. Considere um ponto A pertencente à parte positiva de r, com $A \neq O$. Ao ponto A fica associado um único número real positivo $\overline{OA}$, dado pelo Axioma 7. Se A pertence à parte negativa de r, com $A \neq O$, à ele fica associado um único número real negativo $-\overline{OA}$. Se $A \equiv O$, temos $\overline{OA} = 0$. Portanto, à todo ponto da reta r fica associado, de modo único, um número real que será chamado a *coordenada* desse ponto. Note que, pelo Axioma 8, essa correspondência é unívoca, no seguinte sentido. Se A e A' são pontos distintos de r, então $\overline{OA} \neq \overline{OA'}$.

Axioma 9. *A todo número real positivo fica associado um segmento, cuja medida é igual ao número dado, sendo que ao número zero fica associado o segmento nulo.*

Axioma 10 (Transporte de segmento)**.** *Fixado um segmento arbitrário AB, para qualquer segmento CD, existe um único ponto E pertencente à semi-reta S_{CD} tal que $\overline{AB} = \overline{CE}$.*

Os Axiomas 9 e 10 permitem-nos considerar a recíproca da correspondência estabelecida no parágrafo logo após o Axioma 8. De fato, dado uma reta r, fixe um ponto arbitrário O sobre r. Dado um número real positivo x, considere um segmento AB, com $\overline{AB} = x$, dado pelo Axioma 9. Pelo Axioma 10, existe um único ponto P sobre a parte positiva de r tal que $\overline{OP} = \overline{AB}$. Se $x = 0$, tome $P \equiv O$; se x for negativo, considere P na parte negativa de r. Portanto, a cada número real fica associado, de modo único, um ponto da reta r. Além disso, pelo Axioma 9, esta correspondência também é unívoca.

Essas duas correspondências, estabelecidas até agora, podem ser resumidas no seguinte:

Teorema 3.1.1. *Existe uma correspondência biunívoca entre pontos de uma reta e números reais.*

A bijeção do Teorema 3.1.1 é as vezes chamada de *sistema de coordenadas* para a reta considerada. O número real, associado a cada ponto P dessa reta é, como já vimos, a coordenada de P em relação à reta. O ponto da reta associado ao número zero é chamado a *origem* do sistema de coordenadas.

Dado um segmento AB, denotaremos por a e b as coordenadas de suas extremidades A e B, respectivamente. Assim, a medida do segmento AB será a diferença entre o maior e o menor destes números. Isso é equivalente a tomar a diferença entre a e b em qualquer ordem e, em seguida, considerar o seu valor absoluto. Portanto,

$$\overline{AB} = |a - b|. \tag{3.1}$$

A relação (3.1) nos diz como determinar a medida de um segmento a partir das coordenadas de suas extremidades. Como os números reais são ordenados pela relação “menor do que” (ou pela relação “maior do que”), podemos estabelecer uma relação de ordem para os pontos de uma reta.

Lema 3.1.2. Numa semi-reta S_{AB}, se um segmento AC é tal que $\overline{AC} < \overline{AB}$ então C está entre A e B.

Demonstração. Como A é a origem de S_{AB} e $B, C \in S_{AB}$, o ponto A não pode estar entre B e C. Se B estiver entre A e C, segue do Axioma 8 que $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ logo, $\overline{AC} > \overline{AB}$, o que é uma contradição. Portanto, o ponto C deve estar entre A e B. □

Teorema 3.1.3. *Sejam A, B, C três pontos colineares e distintos, cujas coordenadas são a, b e c, respectivamente. Então, o ponto C está entre A e B se, e somente se, c está entre a e b.*

Demonstração. Se o ponto C está entre A e B, decorre do Axioma 8 que $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, ou seja,

$$|b - a| = |c - a| + |b - c|. \tag{3.2}$$

Se $a < b$, decorre da igualdade (3.2) que

$$|c - a| < b - a \quad \text{e} \quad |b - c| < b - a.$$

Isso implica que

$$c - a < b - a \quad \text{e} \quad b - c < b - a$$

logo, $c < b$ e $a < c$, i.e., c entá entre a e b. Conclusão análoga se supormos que $a > b$. Reciprocamente, suponha que c está entre a e b. Assim,

$$|b - a| = |c - a| + |b - c|,$$

ou seja, $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ e isso implica, em particular, que

$$\overline{AC} < \overline{AB} \quad \text{e} \quad \overline{CB} < \overline{AB}. \tag{3.3}$$

Se B e C pertencem a uma mesma semi-reta com origem em A, segue do Lema 3.1.2 que C está entre A e B. Resta provar que A não separa B e C. Se isso ocorre, A está entre B e C e, assim, $\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$. Isso implica que $\overline{BC} > \overline{AB}$, contradizendo (3.3). □

Definição 3.1.4. O *ponto médio* de um segmento AB é um ponto C deste segmento tal que $\overline{AC} = \overline{CB}$.

Teorema 3.1.5. *Todo segmento AB tem um único ponto médio.*

Demonstração. Se a e b são as coordenadas dos pontos A e B, respectivamente, considere o número real $c = \frac{1}{2}(a+b)$. Pelo Teorema 3.1.1, existe um ponto C pertencente à reta AB cuja coordenada é c. Temos

$$\overline{AC} = |c-a| = \left|\frac{1}{2}(a+b) - a\right| = |b-a|$$

e

$$\overline{CB} = |c-b| = \left|\frac{1}{2}(a+b) - b\right| = |a-b|$$

logo, $\overline{AC} = \overline{CB}$. Como c está entre a e b, segue do Teorema 3.1.3 que C está entre A e B. Portanto, o ponto C é ponto médio de AB. Quanto à unicidade, suponha que exista outro ponto C' pertencente ao segmento AB tal que $\overline{AC'} = \overline{C'B}$. Se c' é a coordenada de C', temos

$$c' - a = b - c', \quad \text{se} \quad a < c' < b$$

ou

$$a - c' = c' - b, \quad \text{se} \quad b < c' < a.$$

Em qualquer caso, obtemos

$$c' = \frac{1}{2}(a+b).$$

Assim, $c' = c$ e, pelo Teorema 3.1.1, concluimos que $C = C'$. □

3.2 Axiomas sobre medida de ângulos

Analogamente ao caso de segmentos, introduziremos o conceito de medida de ângulo, o que também nos possibilitará compará-los em tamanho.

Definição 3.2.1. *Ângulo* é uma figura geométrica formada por duas semi-retas com mesma origem.

As semi-retas são chamadas de *lados* do ângulo e a origem comum é o *vértice* do ângulo. Se os lados de um ângulo são semi-retas opostas, esse ângulo é chamado de *ângulo raso*; caso os lados são semi-retas coincidentes, chamamos o ângulo de *ângulo nulo*.

Existem várias formas de representar um ângulo. Por exemplo, se O é o vértice e A, B são pontos distintos de um ângulo, um em cada lado do ângulo, este pode ser representado por $\widehat{AOB}$ ou $\widehat{BOA}$. Quando nenhum

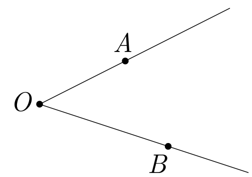

Figura 3.1: Ângulo $\widehat{AOB}$.

outro ângulo tem o mesmo vértice, podemos usar apenas a letra que designa o vértice para representá-lo. Assim, o ângulo da Figura 3.1 pode ser representado simplesmente por $\widehat{O}$. Em algumas ocasiões, é comum utilizar letras minúsculas do alfabeto grego para representar um ângulo. Neste caso, é usual escrever a letra que designa o ângulo próximo do vértice e entre as duas semi-retas.

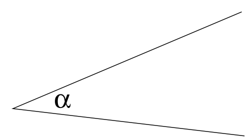

Figura 3.2: Ângulo α.

Semelhantemente aos axiomas sobre medida de segmentos, introduziremos agora os axiomas que nos dirão como medir ângulo.

Axioma 11. *A todo ângulo está associado um único número real positivo. Este número é zero se, e somente se, o ângulo é constituído por duas semi-retas coincidentes.*

O número dado pelo Axioma 11 é chamado de *medida* do ângulo.

Definição 3.2.2. Dizemos que uma semi-reta *divide* um semi-plano se ela estiver contida neste semi-plano e sua origem for um ponto da reta que o determina (cf. Figura 3.3).

Axioma 12. *Dado um número real $r > 0$, é possível colocar em correspondência biunívoca os números reais entre 0 e r e as semi-retas de mesma origem que dividem um dado semi-plano, de modo que a diferença entres estes números seja a medida do ângulo formado pelas semi-retas correspondentes. Aos ângulos raso e nulo ficam associados os números r e zero, respectivamente, e reciprocamente.*

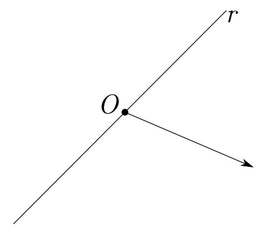

Figura 3.3: Divisão de um semi-plano.

No caso em que $r = 180$, a medida de ângulo dá o resultado em *graus*. Quando $r = 200$, a medida é em *grados* e, quando $r = \pi$, a medida está dada em *radianos*.

O número associado a cada semi-reta, dado pelo Axioma 12, chama-se a *coordenada* da semi-reta. Assim, se a e b forem as coordenadas dos lados do ângulo $\widehat{AOB}$, então $|a - b|$ é a medida deste ângulo, e escreveremos

$$\widehat{AOB} = |a - b|.$$

Sejam S_{OA}, S_{OB}, S_{OC} semi-retas com mesma origem O. Dizemos que S_{OC} *divide* o ângulo $\widehat{AOB}$ se o segmento AB intercepta S_{OC}.

Axioma 13. *Se uma semi-reta S_{OC} divide um ângulo $\widehat{AOB}$ então $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB}$.*

Dois ângulos são chamados *consecutivos* se eles têm um lado em comum. Se os outros lados dos ângulos estão em semi-planos opostos, definidos pelo lado comum, esses ângulos são chamados *adjacentes*. Por exemplo, na Figura 3.4, os ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{AOC}$ são consecutivos e adjacentes; no entanto, $\widehat{AOB}$ e $\widehat{BOC}$ são consecutivos mas não são adjacentes.

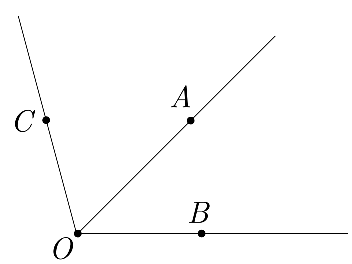

Figura 3.4: Ângulos consecutivos e adjacentes.

Definição 3.2.3. Dois ângulos são chamados *suplementares* se a soma de suas medidas é 180º. O *suplemento* de um ângulo é o ângulo adjacente ao ângulo dado obtido pelo prolongamento de um de seus lados.

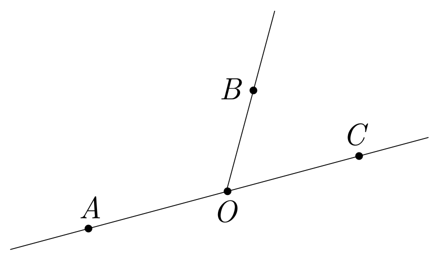

Figura 3.5: Ângulos suplementares.

Decorre diretamente da definição que um ângulo e seu suplemento são ângulos suplementares. Além disso, se dois ângulos têm a mesma medida, então o mesmo ocorre com os seus suplementos.

Definição 3.2.4. Ângulos *opostos pelo vértice* são aqueles em que os lados de um são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro.

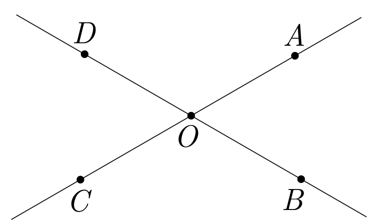

Figura 3.6: Ângulos opostos pelo vértice.

Proposição 3.2.5. Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

Demonstração. Sejam $\widehat{AOB}$ e $\widehat{COD}$ dois ângulos opostos pelo vértice. Como o ângulo $\widehat{AOD}$ é suplementar a ambos, obtemos

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOD} = 180^{\circ} \quad \text{e} \quad \widehat{COD} + \widehat{AOD} = 180^{\circ}. \tag{3.4}$$

Disso decorre que $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. $\square$

Definição 3.2.6. *Ângulo reto* é um ângulo cuja medida é 90°. Duas retas são chamadas *perpendiculares* se elas se interceptam e um dos quatro ângulos formados por elas for reto.

Teorema 3.2.7. *Por qualquer ponto de uma reta passa uma única reta perpendicular a reta dada.*

Demonstração. Dados uma reta r e um ponto $O \in r$, considere as duas semi-retas opostas determinadas por O; elas formam um ângulo raso. Considere um dos semi-planos determinados por r. Pelo Axioma 12, existe uma única semi-reta com origem O, dividindo o semi-plano fixado e cuja coordenada é 90^o. Esta semi-reta forma com as semi-retas determinadas em r, pelo ponto O, ângulos de 90^o. Logo, a semi-reta assim construída está contida numa reta s, que contém o ponto O, e é perpendicular à reta r. Quanto à unicidade, suponha que existam duas retas, s e s', passando pelo ponto O, e perpendiculares a r. Fixemos um dos semi-planos determinados por r. As insterseções de s e s' com este semi-plano são semi-retas que formam um ângulo α entre si, e formam outros dois ângulos β e θ com as semi-retas determinadas pelo ponto $O \in r$. Como s e s' são perpendiculares a r tem-se $\beta = \theta = 90^o$. Por outro lado, como semi-retas opostas definem o ângulo raso, temos $\alpha + \beta + \theta = 180^o$. Isso implica que $\alpha = 0^o$ e, portanto, s e s' são coincidentes. □

3.3 Exercícios

1. Considere três pontos colienares A, B, C, sendo que B está entre A e C, e $\overline{AB} = \overline{BC}$. Se M é o ponto médio de AB e N é o ponto médio de BC, prove que $\overline{MN} = \overline{AB}$.

2. Sejam M, A, B pontos colineares e distintos. Dizemos que M *divide* o segmento AB na *razão a* se $a = \overline{MA}/\overline{MB}$. Dado qualquer número real positivo a, prove que existe um único ponto $M \in AB$ tal que M divide AB na razão a.

3. Sejam A, B e C três pontos no plano tais que a distância de A a B é igual a soma das distâncias de A a C e de C a B. O que podemos afirmar sobre estes pontos?

4. Considere quatro pontos distintos, A, B, C e D, e uma reta r que não contém nenhum dos pontos dados. Suponhas que os segmentos AB e CD interceptam r e que AC não a intercepta. O que podemos afirmar sobre o segmento BD?

5. Um ponto C pertencente a um segmento AB é chamado *seção áurea* de AB se $\overline{AC}/\overline{CB} = \overline{AB}/\overline{AC}$. Prove que se C é seção áurea de AB, então $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ e que $AB = \frac{\sqrt{5}+1}{2}AC$; o número $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ é chamado *número áureo*. Prove também que todo segmento possui uma seção áurea.

6. Prove que duas retas concorrentes são perpendiculares se, e somente se, elas formam ângulos adjacentes suplementares de mesma medida.

7. Prove que se um ângulo e seu suplemento têm a mesma medida então o ângulo é reto.

8. Um ângulo é chamado *agudo* se mede menos de 90^o, e é chamado *obtuso* se mede mais de 90^o. Prove que o suplemento de um ângulo agudo é sempre um ângulo obtuso.

9. Se duas retas se interceptam formando quatro ângulos e um deles é reto, prove que os outros também o são.

10. Dois ângulos são chamados *complementares* se sua soma é um ângulo reto. Considere dois ângulos complementares tais que o suplemento de um deles mede tanto quanto o suplemento do segundo mais 30^o. Quanto medem os dois ângulos?

11. Por que o complemento de um ângulo é sempre menor do que o seu suplemento?

12. Qual a medida da diferença entre o suplemento de um ângulo e seu complemento?

13. Dado um ângulo $\widehat{AOB}$, prove que existe uma única semi-reta S_{OC} tal que $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$. A semi-reta S_{OC} é chamada de *bissetriz* do ângulo $\widehat{AOB}$.

14. Prove que as bissetrizes de um ângulo e do seu suplemento são perpendiculares.

15. Prove que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semi-retas opostas.

Capítulo 4

Axiomas de Congruência

Os axiomas deste capítulo expressam a ideia de congruência ou de superposição. A ideia intuitiva que se procura precisar com a noção de congruência é a de que dois segmentos ou ângulos congruentes têm a mesma medida ou podem ser superpostos por um movimento rígido do plano, ou seja, por uma aplicação que não distorça as figuras. Essa noção de congruência de segmentos e ângulos será naturalmente estendida aos triângulos, onde obteremos teoremas que nos dão condições suficientes para a congruência de triângulos.

4.1 Congruência de segmentos e ângulos

Definição 4.1.1. Dois segmentos AB e CD são chamados *congruentes* se eles têm a mesma medida, ou seja, se $\overline{AB} = \overline{CD}$. Diremos que dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são *congruentes* se eles têm a mesma medida.

Denotaremos a congruência entre os segmentos AB e CD utilizando o símbolo $\equiv$ e escreveremos $AB \equiv CD$. Assim, $AB \equiv CD$ se, e somente se, $\overline{AB} = \overline{CD}$. Da mesma forma para a congruência de ângulos, diremos que os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes denotando por $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$.

Neste texto usamos o termo congruente, e não igual, para distinguir do termo *igual*, que significa, matematicamente, o mesmo objeto matemático.

Com esta definição de congruência, as propriedades que envolvem igualdade de números reais passam a valer para a congruência de segmentos e de ângulos. Como consequência disso, a relação $\equiv$ é uma relação de equivalência, ou seja, satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva de congruência.

4.2 Congruência de triângulos

A fim de simplificar a notação, denotaremos um triângulo, definido por três pontos não-colineares A, B e C, por $\triangle ABC$ ou, simplesmente, por ABC.

Definição 4.2.1. Dois triângulos são chamados de *congruentes* se existe uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Isso significa que se ABC e XYZ são dois triângulos congruentes e se

$$\varphi : \{A, B, C\} \to \{X, Y, Z\}$$

é a bijeção que define a congruência, com

$$\begin{aligned} A &\mapsto X, \\ B &\mapsto Y, \\ C &\mapsto Z, \end{aligned}$$

então valem as seguintes relações:

$$\begin{array}{ll} \widehat{A} \equiv \widehat{X}, & AB \equiv XY, \\ \widehat{B} \equiv \widehat{Y}, & AC \equiv XZ, \\ \widehat{C} \equiv \widehat{Z}, & BC \equiv YZ. \end{array}$$

Os vértices A e X, B e Y, C e Z são chamados *correspondentes*. *Ângulos correspondentes* são aqueles cujos vértices são correspondentes, e *lados correspondentes* são os lados cujas extremidades são vértices correspondentes.

Se ABC e XYZ são triângulos congruentes, escreveremos $ABC \equiv XYZ$, significando que a congruência leva A em X, B em Y e C em Z.

Axioma 14. *Se dois triângulos ABC e XYZ são tais que $AB \equiv XY$, $AC \equiv XZ$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{X}$ então $ABC \equiv XYZ$.*

Pelo Axioma 14, a fim de verificar a congruência entre dois triângulos, basta verificar apenas três relações, ao invés das seis relações exigidas na Definição 4.2.1. Este axioma é chamado *primeiro caso de congruência de triângulos* ou, simplesmente, *caso LAL*.

Teorema 4.2.2 (caso ALA)**.** *Dois triângulos ABC e XYZ são congruentes se $AB \equiv XY$, $\widehat{A} \equiv \widehat{X}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{Y}$.*

Demonstração. Dados dois triângulos ABC e XYZ, com $AB \equiv XY$, $\widehat{A} \equiv \widehat{X}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{Y}$, conside o ponto D sobre a semi-reta S_{AC} tal que $AD \equiv XZ$. Considere o triângulo ABD. Como $AB \equiv XY$, $AD \equiv XZ$ e $\widehat{A} \equiv \widehat{X}$, segue do Axioma 14 que $ABD \equiv XYZ$. Disso decorre, em particular, que $\widehat{ABD} \equiv \widehat{Y}$. Como, por hipótese, temos $\widehat{ABC} \equiv \widehat{Y}$, concluimos que $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ABC}$. Decorre daí que as semi-retas S_{BD} e S_{BC} coincidem e, assim, os pontos B e C são coincidentes. Portanto, os triângulos ABC e ABD são congruentes e, pela transitividade da relação $\equiv$, concluimos que $ABC \equiv XYZ$. $\square$

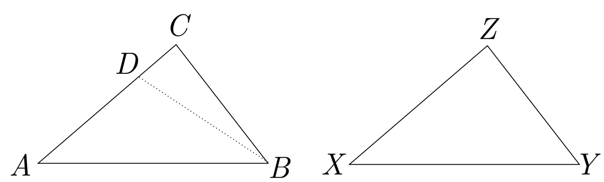

Figura 4.1: Caso ALA.

Definição 4.2.3. Um triângulo que tem dois lados congruentes é chamado *isósceles*; os lados congruentes são as *laterais* e o terceiro lado é a *base* do triângulo. Um triângulo que tem os três lados congruentes chama-se *equilátero*.

Proposição 4.2.4. Em qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração. Seja ABC um triângulo isósceles, com $AB \equiv AC$. Provemos que $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$. De fato, considere a aplicação $\varphi : \{A, B, C\} \to \{A, C, B\}$ definida por

$$\begin{array}{rcl} A & \mapsto & A, \\ B & \mapsto & C, \\ C & \mapsto & B. \end{array}$$

Por hipótese, temos que $AB \equiv AC$ e $AC \equiv AB$. Como $\widehat{A} \equiv \widehat{A}$, segue do Axioma 14 que $ABC \equiv ACB$. Decorre, em particular, que $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$. $\square$

A Proposição seguinte é a recíproca da Proposição 4.2.4.

Proposição 4.2.5. Se um triângulo tem dois ângulos congruentes, então ele é iscósceles.

Demonstração. Seja ABC um triângulo, com $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$. Provemos que $AB \equiv AC$. De fato, considere a aplicação $\varphi : \{A, B, C\} \to \{A, C, B\}$ definida por

$$\begin{aligned} A &\mapsto A, \\ B &\mapsto C, \\ C &\mapsto B. \end{aligned}$$

Como $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{B}$ e $BC \equiv CB$, segue do Teorema 4.2.2 que $ABC \equiv ACB$. Disso decorre, em particular, que $AB \equiv AC$. □

Das Proposições 4.2.4 e 4.2.5 concluimos que um triângulo é isósceles se, e somente se, os ângulos da base são congruentes.

Dado um triângulo ABC, considere um ponto D sobre a reta determinada por B e C. Se D é ponto médio do segmento BC, o segmento AD chama-se *mediana* do triângulo ABC relativo ao vértice A. Se D é tal que $\widehat{CAD} \equiv \widehat{DAB}$, AD chama-se a *bissetriz* do ângulo $\widehat{A}$. Se D é tal que a reta AD é perpendicular à reta BC, AD é chamada *altura* do triângulo ABC relativo ao vértice A.

Proposição 4.2.6. Em qualquer triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também altura e bissetriz.

Demonstração. Dado um triângulo isósceles ABC, de base BC, seja AD sua mediana relativo a BC. Provemos que $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$ e $\widehat{BDA} = 90^o$. De fato, como $BD \equiv DC$, $AB \equiv AC$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$, segue do Axioma 14 que $ABD \equiv ACD$. Assim, $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$ e $\widehat{ADB} \equiv \widehat{ADC}$. Como

$$\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = \widehat{BDC} = 180^o,$$

concluimos que $\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = 90^o$ logo, AD é perpendicular a BC. □

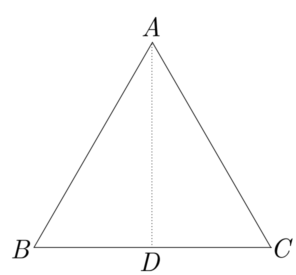

Figura 4.2: Proposição 4.2.6.

Teorema 4.2.7 (Teorema LLL)**.** *Dois triângulos são congruentes se possuem os lados correspondentes congruentes.*

Demonstração. Sejam ABC e XYZ dois triângulos tais que $AX \equiv XY$, $AC \equiv XZ$ e $BC \equiv YZ$. Considere o semi-plano determinado pela semi-reta S_{AB} e oposto ao vértice C. Neste semi-plano, considere o ângulo com vértice A, congruente ao ângulo $\widehat{X}$, tendo por lado S_{AB}. No outro lado deste ângulo, considere o ponto D tal que $AD \equiv XZ$. Como $AB \equiv XY$, $AD \equiv XZ$ e $\widehat{DAB} \equiv \widehat{X}$, segue do Axioma 14 que $ABD \equiv XYZ$. Provemos que $ABD \equiv ABC$. De fato, como

$$AD \equiv XZ \equiv AC \quad \text{e} \quad DB \equiv YZ \equiv BC,$$

os triângulos ACD e BCD são isósceles. Assim,

$$\widehat{ACD} \equiv \widehat{ADC} \quad \text{e} \quad \widehat{BCD} \equiv \widehat{BDC}$$

logo, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}$. Assim, pelo Axioma 14, tem-se $ADB \equiv ACB$. Portanto, pela equivalência da relação $\equiv$, concluimos que $ABC \equiv XYZ$. □

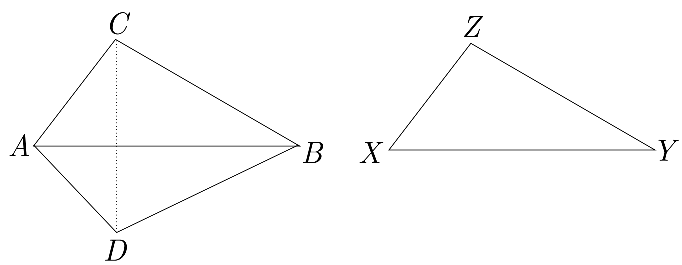

Figura 4.3: Caso LLL.

4.3 Exercícios

1. Um ângulo raso é dividido por duas semi-retas em três ângulos adjacentes congruentes. Prove que a bissetriz do ângulo do meio é perpendicular aos lados do ângulo raso.

2. Dois segmentos AB e CD se interceptam em um ponto M, o qual é ponto médio dos dois segmentos. Prove que $AC \equiv BD$.

3. Em um triângulo ABC, a altura do vértice A é perpendicular ao lado BC e o divide em dois segmentos congruentes. Prove que $AB \equiv AC$.

4. Prove que os pontos médios de um triângulo isósceles formam um triângulo que também é isósceles.

5. Prove que um triângulo equilátero também é *equiangular*, ou seja, os três ângulos internos são congruentes.

6. Na Figura 4.4, o ponto A é o ponto médio dos segmentos CB e DE. Prove que os triângulos ABD e ACE são congruentes.

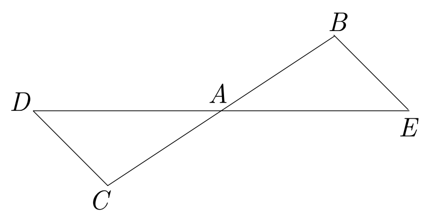

Figura 4.4

7. Na Figura 4.5, ABD e BCD são triângulos isósceles com base BD. Prove que $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ADC}$ e que AC é bissetriz do ângulo $\widehat{BCD}$.

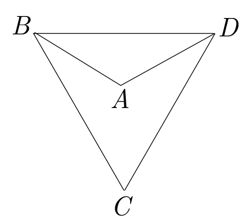

Figura 4.5

8. A *mediatriz* de um segmento AB é a reta perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio. Prove que todo ponto pertencente à mediatriz de AB é equidistante de A e B. Reciprocamente, prove que o conjunto dos pontos que satisfaz a propriedade de serem equidistantes dos extremos A e B é a mediatriz do segmento AB.

9. Prove que em qualquer triângulo equilátero as três medianas são congruentes.

10. Prove que todo triângulo, no qual uma altura e uma bissetriz são coincidentes, é isósceles.

Capítulo 5

O Teorema do Ângulo Externo

Neste capítulo estudaremos vários resultados envolvendo propriedades de triângulos; nenhum axioma novo é introduzido aqui. O resultado central é o teorema do ângulo externo e a partir dele obteremos inúmeras aplicações, dentre elas a existência de retas paralelas e a desigualdade triangular.

5.1 O teorema do ângulo externo

Dado um triângulo ABC, é comum chamarmos os ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ de *ângulos internos* do triângulo. Os suplementos destes ângulos são chamados de *ângulos externos* do triângulo. Por exemplo, na Figura 5.1, o ângulo $\widehat{CBD}$ é um ângulo externo do triângulo ABC, adjacente ao ângulo interno $\widehat{CBA}$.

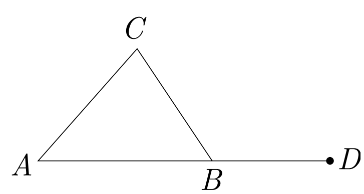

Figura 5.1: Ângulo externo $\widehat{CBD}$.

Teorema 5.1.1 (Ângulo externo)**.** *A medida de um ângulo externo de qualquer triângulo é maior que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC, considere um ponto D sobre a semi-reta S_{AB} tal que B esteja entre A e D. Provaremos que $\widehat{CBD} > \widehat{A}$ e

$\widehat{CBD} > \widehat{C}$. De fato, sejam M o ponto médio do segmento BC e N o ponto na semi-reta S_{AM} tal que M esteja entre A e N e $AM \equiv MN$. Temos:

$$CM \equiv BM, \quad AM \equiv MN \quad \text{e} \quad \widehat{AMC} \equiv \widehat{BMN}.$$

Assim, pelo Axioma 14, os triângulos AMC e BMN são congruentes e, portanto, $\widehat{C} \equiv \widehat{MBN}$. Como $\widehat{MBD} = \widehat{MBN} + \widehat{NDB}$, concluimos que $\widehat{CBD} > \widehat{C}$. De forma inteiramente análoga se prova que $\widehat{CBD} > \widehat{A}$. □

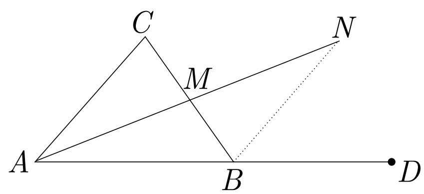

Figura 5.2: Teorema do ângulo externo.

Corolário 5.1.2. A soma das medidas de quaisquer dois ângulos internos de um triângulo é menor que 180º.

Demonstração. Dado um triângulo ABC, mostremos, por exemplo, que $\widehat{A} + \widehat{B} < 180^o$. De fato, seja θ a medida do ângulo externo do triângulo ABC, adjacente ao ângulo $\widehat{B}$. Pelo Teorema 5.1.1, temos $\widehat{A} < \theta$. Como θ e $\widehat{B}$ são suplementares, temos $\theta + \widehat{B} = 180^o$ logo, $\widehat{A} + \widehat{B} < \theta + \widehat{B} = 180^o$, como queríamos. □

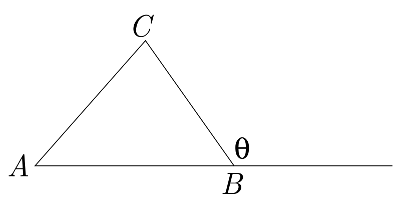

Figura 5.3: Corolário 5.1.2.

Corolário 5.1.3. Em todo triângulo existem, pelo menos, dois ângulos internos agudos.

Demonstração. Se um triângulo possuir dois ângulos internos não agudos, a soma deles é maior ou igual a 180º, contradizendo o Corolário 5.1.2. □

Corolário 5.1.4. Se duas retas distintas, r e s, são perpendiculares a uma terceira, então elas não se interceptam.

Demonstração. Se r e s se interceptam, temos definido um triângulo com dois ângulos retos, contradizendo o Corolário 5.1.3. □

O Corolário 5.1.4 motiva a seguinte

Definição 5.1.5. Duas retas que não se interceptam são chamadas *paralelas*.

Corolário 5.1.6 (Caso LAA)**.** Dois triângulos ABC e XYZ são congruentes se $AB \equiv XY$, $\widehat{B} \equiv Y$ e $\widehat{C} \equiv Z$.

Demonstração. Sejam ABC e XYZ dois triângulos tais que

$$AB \equiv XY, \quad \widehat{B} \equiv Y \quad \text{e} \quad \widehat{C} \equiv Z.$$

Na semi-reta S_{YZ}, considere o ponto W tal que $\overline{BC} = \overline{YW}$. Queremos

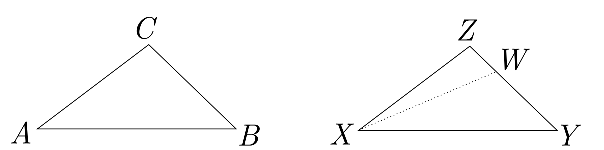

Figura 5.4

provar que os pontos W e Z são coincidentes. De fato, se $W \neq Z$, então W está entre Z e Y ou Z está entre W e Y. No primeiro caso, considere o triângulo XYW. Pelo Axioma 14 (caso LAL), os triângulos ABC e XYW são congruentes e, em particular, tem-se $\widehat{XWY} \equiv \widehat{C}$. No triângulo XZW temos, em virtude do Corolário 5.1.2, que

$$\widehat{Z} + \widehat{XWZ} < 180^{\circ}.$$

Por outro lado, como $\widehat{XWZ}$ é o suplemento de $\widehat{XWY}$ e $\widehat{XWY} \equiv \widehat{Z}$, obtemos

$$\widehat{Z} + \widehat{XWZ} = 180^{\circ},$$

o que é uma contradição. Portanto, W não está entre Y e Z. Analogamente se prova que Z não pode estar entre Y e W. Portanto, W deve coincidir com Z e, assim, $ABC \equiv XYZ$. □

Proposição 5.1.7. Por um ponto não pertencente a uma reta passa uma única reta perpendicular à reta dada.

Demonstração. Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, considere um ponto $A \in r$. Se a reta AP já é perpendicular à reta r, então a proposição está provada. Caso contrário, seja $B \in r$, com $B \neq A$, tal que $\widehat{PAB}$ seja um ângulo agudo. No semi-plano determinado por r, oposto ao ponto P, considere a semi-reta com origem A formando com S_{AB} um ângulo congruente a $\widehat{PAB}$. Nesta semi-reta, conside o ponto P' tal que $AP \equiv AP'$. Por construção, o triângulo PAP' é isósceles logo, $\widehat{P} \equiv \widehat{P'}$. Se O denota o ponto de interseção das retas r e PP', concluimos, pelo Teorema 4.2.2 (caso ALA), que os triângulos PAO e $P'AO$ são congruentes. Em particular, segue que $\widehat{POA} \equiv \widehat{P'OA}$. Como tais ângulos são suplementares, $\widehat{POA} = 90^{\circ}$. Portanto, a reta PP' é perpendicular à reta r. Quanto à unicidade, se existissem duas retas distintas, passando por P, ambas perpendiculares à reta r, isso contradiria o Corolário 5.1.4. $\square$

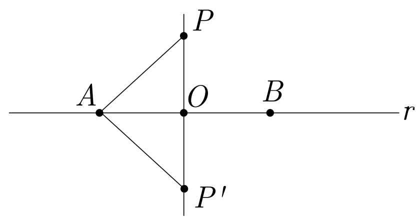

Figura 5.5: Proposição 5.1.7.

Dados uma reta r e um ponto $P \notin r$, a reta perpendicular a r passando por P intercepta r em um ponto O, chamado o *pé da perpendicular* baixada do ponto P à reta r. Se $A \in r$, com $A \neq O$, o segmento AP é chamado *oblíquio* em relação a r; o segmento AO é chamado *projeção* de AP sobre r.

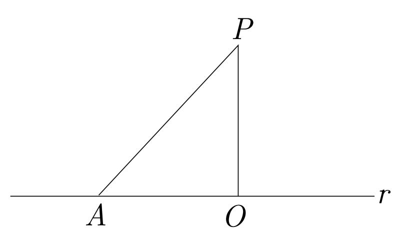

Figura 5.6

Dado um triângulo ABC, dizemos que o ângulo $\widehat{A}$ é *oposto* ao lado BC, $\widehat{B}$ é oposto ao lado AC e $\widehat{C}$ é oposto ao lado AB.

Proposição 5.1.8. Se dois lados de um triângulo não são congruentes então seus ângulos opostos não são congruentes e o maior ângulo é oposto ao maior lado.

Demonstração. Seja ABC um triângulo, com $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Queremos provar que $\widehat{B} \neq \widehat{C}$. Se $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$ então o triângulo ABC é isósceles com base BC e, em particular, tem-se $\overline{AB} = \overline{AC}$, o que é uma contradição. Para a segunda parte, suponha que $\overline{AB} > \overline{AC}$, e provemos que $\widehat{C} > \widehat{B}$. De fato, seja D o ponto na semi-reta S_{AB} tal que $AD \equiv AC$. Como $\overline{AC} < \overline{AB}$, o ponto D pertence ao segmento AB e, assim, a semi-reta S_{CD} divide o ângulo $\widehat{C}$. Logo,

$$\widehat{C} > \widehat{ACD}.$$

Por outro lado, como o triângulo ACD é isósceles, temos

$$\widehat{ACD} = \widehat{ADC}.$$

Ainda, como $\widehat{ADC}$ é ângulo externo do triângulo CBD, tem-se

$$\widehat{ADC} > \widehat{B}.$$

Portanto, $\widehat{C} > \widehat{B}$, como queríamos. □

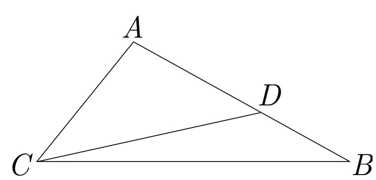

Figura 5.7: Proposição 5.1.8.

A Proposição seguinte é a recíproca da Proposição 5.1.8.

Proposição 5.1.9. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes então os lados que se opõem a estes ângulos têm medidas distintas e o maior lado opõe-se ao maior ângulo.

Demonstração. Seja ABC um triângulo, com $\widehat{B} \neq \widehat{C}$. Provemos que $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. De fato, se tivéssemos $AB \equiv AC$, então o triângulo ABC seria isósceles com base BC; em particular, teríamos $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$, o que é uma contradição. Para a segunda parte, suponha que $\widehat{B} > \widehat{C}$ e provemos que $\overline{AC} > \overline{AB}$. Pela primeira parte, existem duas possibilidades: $\overline{AC} > \overline{AB}$ ou $\overline{AC} < \overline{AB}$. Se $\overline{AC} < \overline{AB}$, segue da Proposição 5.1.8 que $\widehat{C} > \widehat{B}$, o que é uma contradição. Portanto, devemos ter $\widehat{B} > \widehat{C}$, como queríamos. □

Teorema 5.1.10. *Em qualquer triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC, provemos, por exemplo, que $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$. De fato, na semi-reta S_{CB}, considere o ponto D tal que $\overline{CD} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Como $\overline{BD} = \overline{BA}$, o triângulo ABD é isósceles, com base AD. Logo, $\widehat{D} \equiv \widehat{BAD}$. Como B está entre C e D, tem-se $\widehat{CAD} > \widehat{BAD}$ logo, no triângulo ACD, tem-se $\widehat{CAD} > \widehat{ADC}$ e, pela Proposição 5.1.9, concluimos que $\overline{CD} > \overline{AC}$, ou seja, $\overline{BC} + \overline{AB} > \overline{AC}$. □

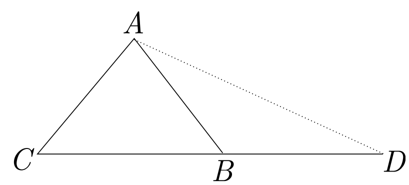

Figura 5.8: Teorema 5.1.10.

Teorema 5.1.11 (Desigualdade triangular)**.** *Para quaisquer três pontos do plano, A, B e C, tem-se $\overline{AB} + \overline{BC} \geq \overline{AC}$ e vale a igualdade se, e somente se, B pertecente ao segmento AC.*

Demonstração. Se A, B e C não são colineares, eles determinam um triângulo ABC, e o resultado segue do Teorema 5.1.10. Suponha, agora, que $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Se a, b, c denotam as coordenadas de A, B e C, respectivamente, a igualdade acima significa que

$$|a - b| + |b - c| = |a - c|,$$

ou seja, b está entre a e c. Logo, pelo Teorema 3.1.3, B está entre A e C. Reciprocamente, se B está entre A e C, a igualdade segue do Axioma 8. □

Observação 5.1.12. Em linguagem mais moderna, o Axioma 7, juntamente com o Teorema 5.1.11, afirmam que o plano está munido de uma *métrica*, i.e., uma aplicação d que a cada par (A, B) de pontos do plano, associa um único número real $d(A, B)$ que satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer pontos A, B, C:

1. $d(A, B) \geq 0$,
2. $d(A, B) = 0$ se, e somente se, $A = B$,

3. $d(A, B) = d(B, A)$,

4. $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

O Exemplo a seguir é uma aplicação simples da desigualdade triangular.

Exemplo 5.1.13. Dados uma reta r e dois pontos A e B não pertencentes a r, determinemos um ponto $P \in r$ tal que $\overline{AP} + \overline{BP}$ seja o menor possível. Para solucionar este problema, consideremos dois casos:
(i) A e B estão em semi-planos opostos em relação a r. Neste caso, o ponto P, interseção das retas r e AB, é a solução do problema. De fato, seja P' outro ponto de r. Pela desigualdade triangular, tem-se $\overline{AP'} + \overline{P'B} \geq \overline{AB}$, ocorrendo a igualdade se, e somente se, P' coincide com P.

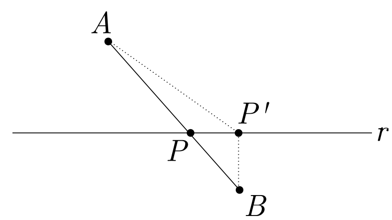

Figura 5.9: Exemplo 5.1.13, caso (i).

(ii) Se A e B estão em um mesmo semi-plano, seja O o ponto de interseção de r com sua perpendicular passando pelo ponto B. Na semi-reta oposta a S_{OB}, seja B' o ponto tal que $\overline{OB} = \overline{OB'}$. Para qualquer $P' \in r$, tem-se $\overline{P'B} = \overline{P'B'}$, assim $\overline{AP'} + \overline{P'B} = \overline{AP'} + \overline{P'B'}$. Portanto, o problema reduz-se ao caso (i) e a solução é o ponto P obtido como interseção de r com a reta AB'.

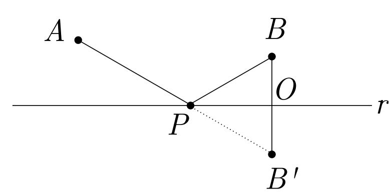

Figura 5.10: Exemplo 5.1.13, caso (ii).

5.2 Exercícios

1. Prove que, se um triângulo tem dois ângulos externos congruentes, então ele é isósceles.

2. Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado *triângulo retângulo*. O lado oposto ao ângulo reto chama-se *hipotenusa*, e os outros dois lados são chamados *catetos*. Prove que um triângulo retângulo tem dois ângulos externos obtusos.

3. Na Figura 5.11, o ponto P satisfaz $BP \equiv BC$. Prove que $\widehat{APB} > \widehat{BPC}$.

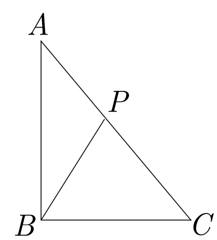

Figura 5.11: Exercício 3.

4. Se um triângulo ABC é equilátero e D é um ponto entre B e C, prove que $\overline{AD} > \overline{DB}$.

5. Prove que, qualquer triângulo tem pelo menos um ângulo externo obtuso.

6. Dado um triângulo ABC, marca-se um ponto D sobre o lado AB. Prove que o comprimento de CD é menor que o comprimento de um dos lados AC ou BC.

7. Sejam ABC e XYZ dois triângulos não retângulos tais que $AB \equiv XY$, $BC \equiv YZ$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{Z}$. Dê um exemplo para provar que essas hipóteses não acarretam que os triângulos devam ser congruentes.

8. Prove que, por um ponto não pertencente a uma reta sempre passa uma outra reta que não intercepta a reta dada.

9. Prove que, se duas retas têm uma perpendicular em comum então elas não se interceptam.

10. A soma dos comprimentos dos lados de um triângulo é chamada de *perímetro* do triângulo, e a metade do perímetro é chamada *semiperímetro*. Prove que o comprimento de qualquer lado de um triângulo é menor do que seu semiperímetro.

11. Prove que o lugar geométrico dos pontos equidistantes das semi-retas S_{OA} e S_{OB} é a bissetriz do ângulo $\widehat{AOB}$.

12. Prove que, num triângulo retângulo cujos ângulos agudos medem 30^o e 60^o, o menor cateto mede metade do comprimento da hipotenusa e, reciprocamente.

13. Prove que todo triângulo retângulo tem dois ângulos externos obtusos.

14. Prove que em qualquer triângulo a soma dos comprimentos das medianas está compreendida entre o perímetro e o semiperímetro.

15. Se ABC é um triângulo e P um ponto de seu interior, prove que a soma das distâncias de P aos três vértices está compreendida entre o perímetro e o semiperímetro do triângulo.

Parte II

Geometria Euclidiana Plana

Capítulo 6

Axioma das Paralelas

A consistência da geometria apresentada por Hilbert estabeleceu o quinto postulado de Euclides como um axioma, independente dos demais. Este axioma caracteriza o que hoje chamamos de Geometria Euclidiana Plana. Adotaremos aqui, como já mencionado, o enunciado devido a Playfair. Nesta forma equivalente, o axioma afirma a unicidade da reta passando por um ponto e paralela a uma reta dada. Observe que, auxiliados pelos Teorema 3.2.7 e Proposição 5.1.7, o Corolário 5.1.4 garante a existência de retas paralelas e, também, fornece um método de construí-las.

6.1 O axioma das paralelas

Axioma 15. *Por um ponto não pertencente a uma reta r passa uma única reta paralela à reta r.*

Uma consequência direta do Axioma 15 é que o paralelismo de retas satisfaz a propriedade de transitividade, como mostra a Proposição seguinte.

Proposição 6.1.1. Considere três retas, r, s e t, duas a duas não coincidentes. Se r é paralela a s e s é paralela a t, então r é paralela a t.

Demonstração. Se r e t não são paralelas, ela se interceptam em um ponto P. Assim, temos duas retas passando por um mesmo ponto e ambas paralelas à reta s, contradizendo o Axioma 15. □

Proposição 6.1.2. Se uma reta intercepta uma de duas retas paralelas, então ela intercepta também a outra.

Demonstração. Sejam r e s duas retas paralelas e t uma reta que intercepta r num ponto P. Se a reta t não intercepta s, então t e s são paralelas. Temos, assim, duas retas, r e t, passando por P, e ambas paralelas a s, contradizendo o Axioma 15. □

Observe que a Proposição 6.1.2 pode ser vista como um corolário direto da Proposição 6.1.1. De fato, sejam r e s retas paralelas e t uma reta que intercepta r. Se t não intercepta s, então t e s são paralelas. Assim, como r é paralelas a s e s é paralela a t, segue da Proposição 6.1.1 que r é paralela a t, o que é uma contradição.

Dados duas retas, r e s, interceptadas por uma transversal t, ficam determinados oito ângulos, como mostra a Figura 6.1. Os pares $\widehat{A}$ e $\widehat{E}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{F}$,

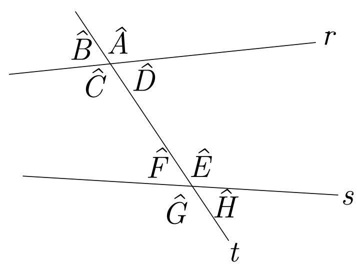

Figura 6.1: Ângulos correspondentes.

$\widehat{C}$ e $\widehat{G}$, $\widehat{D}$ e $\widehat{H}$ são chamados *ângulos correspondentes.*

Proposição 6.1.3. Se r e s são retas interceptadas por uma transversal t, de modo que um par de ângulos correspondentes sejam congruentes, então r e s são retas paralelas.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que r e s se interceptam em um ponto P. Sejam A o ponto de interseção de r com t, e B o ponto de interseção de s com t. Assim, os pontos A, B e P definem um triângulo ABP. Suponha que α e β seja o par de ângulos correspondentes congruentes. No triângulo ABP (cf. Figura 6.2), β é um ângulo externo e α é um ângulo interno não adjacente a β. Pelo Teorema 5.1.1, temos $\beta > \alpha$, contradizendo a hipótese de termos $\alpha = \beta$. Portanto, r e s são retas paralelas. □

O Axioma 15 garante que a recíproca da Proposição 6.1.3 também é verdadeira.

Proposição 6.1.4. Duas retas paralelas interceptadas por uma reta transversal determinam ângulos correspondentes congruentes.

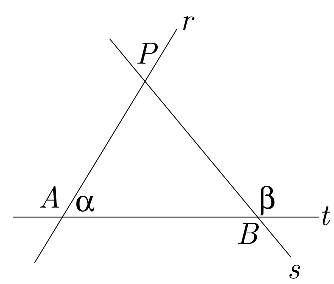

Figura 6.2: Proposição 6.1.3.

Demonstração. Sejam r e s duas retas paralelas e t uma reta que intercepta r e s nos pontos A e B, respectivamente. Considere uma reta r' passando por A formando com t quatro ângulos congruentes aos ângulos correspondentes formados por s e t. Pela Proposição 6.1.3, r' e s são retas paralelas e, pelo

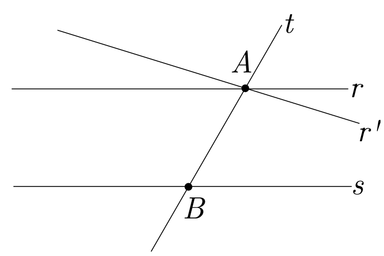

Figura 6.3

Axioma 15, r e r' são coincidentes. Portanto, a reta r forma com t ângulos congruentes aos correspondentes formados por s e t. □

O teorema seguinte é uma consequência importante do Axioma 15. Mais do que isso, é possível provar que ele é equivalente ao quinto postulado de Euclides e, portanto, é equivalente ao Axioma 15.

Teorema 6.1.5. *Em qualquer triângulo, a soma das medidas do ângulos internos é* 180^o*.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC, considere a reta r que passa pelo vértice C e paralela à reta determinada por A e B. O ponto C determina sobre r duas semi-retas. Sejam X e Y dois pontos, um em cada uma destas semi-retas. Temos:

$$\widehat{XCA} + \widehat{C} + \widehat{BCY} = 180^{\text{o}}.$$

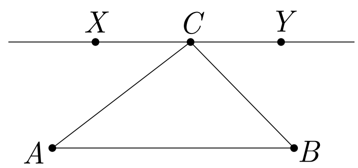

Figura 6.4

Como a reta AC é transversal às paralelas r e AB, segue da Proposição 6.1.4 que $\widehat{XCA} \equiv \widehat{A}$. Analogamente concluimos que $\widehat{BCY} \equiv \widehat{B}$. Portanto,

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{XCA} + \widehat{BCY} + \widehat{C} = 180^o,$$

como queríamos. $\square$

Corolário 6.1.6. Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração. Dado um triângulo ABC, seja α o ângulo externo adjacente, por exemplo, ao ângulo C. Queremos provar que $\alpha = \widehat{A} + \widehat{B}$. Do Teorema 6.1.5, temos

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o.$$

Como $\alpha + \widehat{C} = 180^o$, segue que $\widehat{A} + \widehat{B} = \alpha$. $\square$

Definição 6.1.7. Dados uma reta r e um ponto P não pertencente a r, a *distância* de P a r é o comprimento do segmento AP, onde A é o pé da perpendicular de P a r.

Gostaríamos agora de falar em distância entre duas retas. Diremos que a *distância* entre duas retas concorrentes é zero. Para o caso de retas paralelas, consideremos inicialmente a seguinte

Proposição 6.1.8. Retas paralelas são equidistantes, ou seja, se r e s são retas paralelas, então qualquer ponto de r dista igualmente de s.

Demonstração. Sejam r e s duas retas paralelas. Dados dois pontos $A, B \in r$, considere as retas perpendiculares a r por estes pontos. Sejam $A', B' \in s$ os pés destas perpendiculares (cf. Figura 6.5). Queremos provar que $AA' \equiv BB'$. De fato, considere o segmento $A'B$. Temos:

$$\widehat{ABA'} \equiv \widehat{BA'B'} \quad \text{e} \quad \widehat{AA'B} \equiv \widehat{A'BB'}.$$

Assim, pelo Teorema 4.2.2, os triângulos $A'AB$ e $BB'A'$ são congruentes. Em particular, concluimos que $AA' \equiv BB'$. $\square$

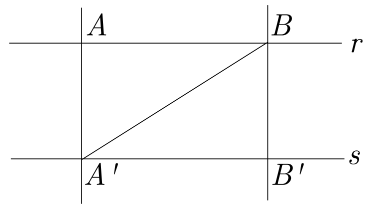

Figura 6.5: Proposição 6.1.8.

A partir da Proposição 6.1.8, temos a seguinte

Definição 6.1.9. A *distância* entre duas retas paralelas é a distância de um ponto qualquer de uma delas a outra.

6.2 Exercícios

1. Seja ABC um triângulo isósceles com base AB. Sejam M e N os pontos médios dos lados AC e BC, respectivamente. Prove que o reflexo do ponto C, em relação à reta determinada por M e N, é exatamente o ponto médio do segmento AB.

2. Determine a soma dos ângulos externos de um triângulo.

3. Um triângulo têm dois ângulos que medem 20^o e 80^o. Determine a medida de todos os seus ângulos externos.

4. Pode existir um triângulo ABC em que a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ e a bissetriz do ângulo externo no vértice B sejam paralelas?

5. Determine os ângulos de um triângulo retângulo isósceles.

6. Por que um triângulo não pode ter dois ângulos externos agudos?

7. Na Figura 6.6, $AB \equiv BC$, AD é uma altura, AE é uma bissetriz e $\widehat{B} = 80^o$. Determine o ângulo $\widehat{DAE}$.

8. Pode um ângulo externo de um triângulo ser menor do que o ângulo interno que lhe é adjacente?

9. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Prove que a bissetriz do seu ângulo externo no vértice A é paralela à sua base.

10. Seja ABC um triângulo, P um ponto de AC e Q um ponto de AB. Além disso, sabe-se que $BC \equiv BP \equiv PQ \equiv AQ$. Supondo que o ângulo $\widehat{C}$ mede 60^o, determine a medida do ângulo $\widehat{A}$.

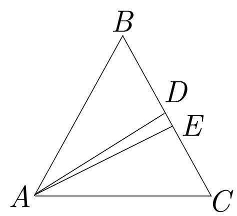

Figura 6.6

11. Prove que a bissetriz de um ângulo externo, relativo ao vértice de um triângulo isósceles, é paralela à base desse triângulo.

12. Sejam ABC um triângulo isósceles e P um ponto qualquer da base BC. Sejam PM e PN os segmentos perpendiculares às laterais desse triângulo. Prove que $\overline{PM} + \overline{PN}$ é um valor constante, que é a medida da altura relativa a uma das laterais.

13. Prove que se P é um ponto interior de um triângulo equilátero, então a soma das distâncias de P aos lados do triângulo é igual à altura do mesmo.

14. Prove a recíproca da Proposição 6.1.8, ou seja, se r é uma reta cujos pontos são equidistantes de uma reta s, então r e s são retas coincidentes ou paralelas.

15. Prove a equivalência entre o Axioma 15 e o Teorema 6.1.5.

Capítulo 7

Polígonos

Neste Capítulo estudaremos alguns resultados básicos sobre polígonos, dando especial atenção aos polígonos convexos. Os resultados são, em geral, consequências de resultados anteriores, principalmente daqueles sobre congruência e paralelismo.

7.1 Introdução

Um *polígono* é uma figura geométrica formada por um número finito de pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_{n-1}A_n$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $A_n = A_1$;
2. Os segmentos $A_{i-1}A_i$, chamados *lados* do polígono, interceptam-se somente em suas extremidades;
3. Dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

Os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são os *vértices* do polígono. Uma *diagonal* de um polígono é um segmento que tem por extremidades dois de seus vértices que não pertencem a um mesmo lado. Por exemplo, na Figura 7.1, o segmento CE é uma diagonal do polígono.

Uma classificação para os polígonos pode ser realizada segundo o número

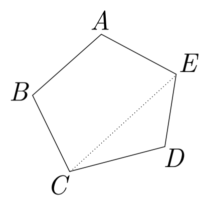

Figura 7.1: Polígono com diagonal CE.

de lados. Listamos a seguir alguns polígonos conhecidos.

Número de lados	Nome do polígono
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octágono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
12	dodecágono
15	pentadecágono
20	icoságono

7.2 Polígonos regulares

Um polígono é chamado *convexo* se ele está sempre contido em um dos semi-planos determinados pelas retas que contêm seus lados. Dois lados consecutivos de um polígono determinam dois ângulos onde, em virtude da condição (3), um deles mede menos de dois retos e o outro mais que dois retos. Um ângulo de um polígono convexo, cuja medida é menor que dois retos, chama-se *ângulo interno* do polígono.

Definição 7.2.1. Um *polígono regular* é um polígono convexo no qual todos os lados são congruentes entre si e, também, todos os ângulos internos são congruentes entre si.

Um *quadrilátero* é um polígono que possui quatro lados. Os vértices não consecutivos de um quadrilátero são chamados *opostos*, assim como dois ângulos e dois lados não consecutivos são chamados *opostos*. Assim, as dia-

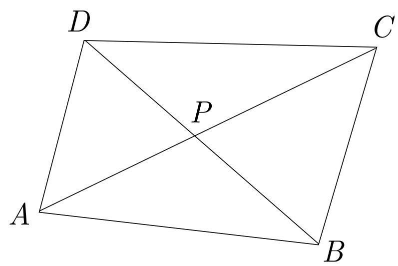

Figura 7.2: Quadrilátero $ABCD$.

gonais de um quadrilátero são segmentos cujas extremidades são os vértices opostos.

Proposição 7.2.2. As diagonais de um quadrilátero convexo se interceptam em um único ponto.

Demonstração. Dado um quadrilátero convexo $ABCD$, provemos que AC e BD se interceptam em um ponto P. De fato, considere as semi-retas S_{AB}, S_{AC} e S_{AD}. Afirmamos que S_{AC} divide o ângulo $\widehat{BAD}$. Se isso não ocorre, então S_{AB} está entre S_{AC} e S_{AD}, ou S_{AD} está entre S_{AB} e S_{AC}. No primeiro caso, o segmento CD intecepta S_{AB}, ou seja, C e D estão em semi-planos opostos determinados pela reta AB. Isso contradiz o fato de que $ABCD$ é convexo. Contradição análoga obtemos se supormos que S_{AD} está entre S_{AB} e S_{AC}. Assim, S_{AC} divide o ângulo $\widehat{BAD}$ logo, BD intercepta a semi-reta S_{AC}. Porém, de forma inteiramente análoga, se prova que o segmento BD intercepta S_{CA}. Isso implica que os segmentos AC e BD interceptam-se em um ponto P. Se existissem dois pontos, P e P', pertencentes à interseção de AC e BD, então eles estariam sobre a mesma reta, o que é uma contradição. □

Definição 7.2.3. Um *paralelogramo* é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos.

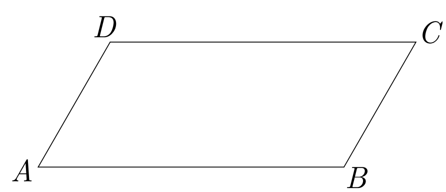

Figura 7.3: Paralelogramo $ABCD$.

Todo paralelogramo $ABCD$ é convexo. De fato, suponha, por exemplo, que C e D estão em semi-planos opostos em relação à reta AB. Assim, as retas AB e CD interceptam-se em, pelo menos, um ponto. Disso decorre, em particular, que AB e CD não são paralelos (a menos que estejam contidos em uma mesma reta), o que é uma contradição.

Proposição 7.2.4. Todo paralelogramo satisfaz as seguintes propriedades:

(a) lados e ângulos opostos são congruentes;

(b) o ponto de interseção de suas diagonais é o ponto médio delas.

Demonstração. (a) Dado um paralelogramo $ABCD$, considere a diagonal AC. Como AB é paralelo a DC, temos $\widehat{BAC} \equiv \widehat{ACD}$, e como AD é paralelo a BC, temos $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB}$. Assim, os triângulos ABC e CAD são congruentes e, portanto, concluimos que $\widehat{B} \equiv \widehat{D}$, $AB \equiv CD$ e $AD \equiv BC$. Disso também decorre que $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$.
(b) Seja P o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Do item (a), temos:

$$AD \equiv BC, \quad \widehat{ADB} \equiv \widehat{CBD} \quad \text{e} \quad \widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB}.$$

Assim, os triângulos APD e CPB são congruentes e, portanto, $AP \equiv PC$ e $DP \equiv PB$. □

Proposição 7.2.5. Um quadrilátero é um paralelogramo se:

(a) os lados ou ângulos opostos são congruentes;

(b) dois lados opostos são congruentes e paralelos;

(c) as diagonais interceptam-se mutuamente em seus pontos médios.

Demonstração. (a) Seja $ABCD$ um quadrilátero e suponha que $AB \equiv CD$ e $BC \equiv AD$. Considere a diagonal AC. Pelo Teorema 4.2.7, os triângulos

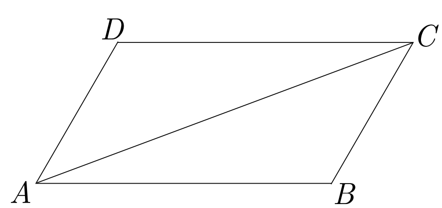

Figura 7.4: Quadrilátero $ABCD$.

ABC e CAD são congruentes logo,

$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{ACD} \quad \text{e} \quad \widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB}.$$

A primeira congruência garante que AB é paralelo a CD, enquanto a segunda congruência garante que AD e BC são paralelos. Portanto, $ABCD$ é um paralelogramo. Suponha agora que o quadrilátero $ABCD$ tenha os ângulos opostos congruentes, ou seja, $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{D}$. A fim de simplificar a notação, denotemos por $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{ACB}$, $\theta = \widehat{ACD}$ e $\gamma = \widehat{CAD}$ (cf. Figura 7.5). Temos:

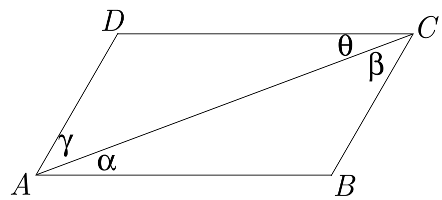

Figura 7.5: Quadrilátero $ABCD$.

$$\widehat{D} + \gamma + \theta = 180^{\text{o}} = \widehat{B} + \alpha + \beta.$$

Isso implica que

$$\theta + \gamma = \alpha + \beta. \tag{7.1}$$

Por outro lado, temos $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$, ou seja, $\alpha + \gamma = \theta + \beta$. Temos, assim, duas equações:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \theta + \gamma, \\ \alpha + \gamma &= \theta + \beta. \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos $\theta + \gamma - \beta = \theta + \beta - \gamma$, ou seja, $\beta = \gamma$. Assim, de (7.1), concluimos que $\alpha = \theta$. Isso implica que AB é paralelo a CD e AD é paralelo a BC, ou seja, $ABCD$ é um paralelogramo.
(b) Suponha, por exemplo, que AB e CD sejam congruentes e paralelos, e considere a diagonal AC (cf. Figura 7.4). Como AB e CD são paralelos, tem-se que $\widehat{ACD} \equiv \widehat{BAC}$. Assim, os triângulos ABC e ACD são congruentes. Segue, em particular, que $\widehat{ACB} \equiv \widehat{CAD}$. Isso implica que AD e BC são paralelos.

(c) Suponha que as diagonais AC e BD interceptam-se em seus pontos médios, M. Como $\widehat{CMD} \equiv \widehat{AMD}$, pois são opostos pelo vértice, concluimos que os triângulos ABM e CDM são congruentes. Segue, em particular, que

$$\widehat{BAM} \equiv \widehat{DCM} \quad \text{e} \quad \widehat{CDM} \equiv \widehat{ABM}.$$

Isso implica que AB é paralelo a CD e AD é paralelo a BC. □

Teorema 7.2.6. *O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.*

Demonstração. Dado um triângulo ABC, sejam D o ponto médio do lado AB e E o ponto médio do lado AC. Queremos provar que DE é paralelo a BC e que $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Na semi-reta S_{ED}, seja F o ponto tal que D esteja entre E e F e $FD \equiv DE$. Temos:

$$AD \equiv BD, \quad \widehat{ADE} \equiv \widehat{BDF} \quad \text{e} \quad FD \equiv DE.$$

Assim, os triângulos ADE e BDE são congruentes. Segue, em particular, que $\widehat{DFB} \equiv \widehat{AED}$ e $BF \equiv CE$. Isso implica que BF e EC são congruentes e paralelos. Pela Proposição 7.2.5, item (b), segue que $BFEC$ é um paralelogramo. Portanto, EF e BC são paralelos e congruentes. Como D é ponto médio de EF, tem-se que $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, como queríamos. □

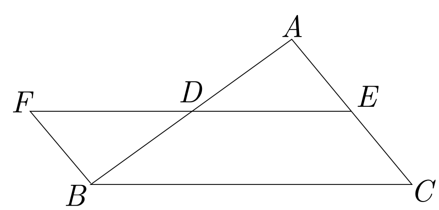

Figura 7.6: Teorema 7.2.6.

7.3 Polígonos congruentes por cortes

Discutiremos agora o problema de saber se dois polígonos dados são sempre congruentes por cortes.

Definição 7.3.1. Uma *decomposição poligonal* de um polígono $\mathcal{P}$ é uma coleção finita de polígonos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$, cuja união é $\mathcal{P}$, de modo que a interseção de dois tais polígonos ou é vazia, ou é um vértice comum ou um lado comum a ambos.

Definição 7.3.2. Dois polígonos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são ditos *congruentes por cortes* se existem decomposições poligonais $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ e $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots, \mathcal{Q}_n$ de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, respectivamente, tais que $\mathcal{P}_k$ é congruente a $\mathcal{Q}_k$, para todo $1 \leq k \leq n$.

Uma decomposição poligonal para um polígono $\mathcal{P}$ será denotada por $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \ldots + \mathcal{P}_n$, e quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ forem congruentes por cortes, denotaremos por $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$. Fica a cargo do leitor provar que esta relação é, de fato, uma relação de equivalência. Além disso, dois polígonos congruentes por cortes têm sempre mesma área.

Consideremos agora a recíproca do fato acima. Mais precisamente, dois polígonos com mesma área são sempre congruentes por cortes? Este problema foi proposto por Bolyai e Gerwien, em 1833. Apresentaremos aqui sua demonstração numa sequência de lemas.

Lema 7.3.3. Todo polígono admite uma decomposição poligonal formada por triângulos.

Demonstração. Dado um polígono $\mathcal{P}$, fixe uma reta r que não seja paralela a nenhum dos lados de $\mathcal{P}$. As retas paralelas a r, que passam através dos vértices de $\mathcal{P}$, decompõem o polígono em triângulos e trapézios, e estes podem agora ser decompostos em triângulos; basta considerar uma diagonal do trapézio. □

Lema 7.3.4. Quaisquer dois triângulos com mesmas base e altura são congruentes por cortes.

Demonstração. Dado um triângulo ABC, considere a altura h relativa ao vértice A. Pelo ponto médio de h, trace uma paralela ao lado BC, interceptando os lados AB e AC nos pontos M e N, respectivamente. Pelos vértices BPM e CAN, como na Figura **??**. Pelo caso ALA, temos:

$$BPM \equiv AOM \quad \text{e} \quad CQN \equiv AON.$$

Assim, o triângulo ABC e o retângulo $BCQP$, assim construído, são congruentes por cortes. Finalmente, se dois triângulos ABC e XYZ, possuem mesmas base e altura, então eles são congruentes por cortes a um mesmo retângulo, e o resultado segue pela transitividade. □

Lema 7.3.5. Quaisquer dois triângulos com mesma área são congruentes por cortes.

Demonstração. Em virtude do Lema 7.3.4, podemos supor que os triângulos dados, ABC e XYZ, são retângulos em $\widehat{B}$ e $\widehat{Y}$, respectivamente. Além disso, a menos de um movimento rígido do plano, suponha que $B \equiv Y$, como na Figura **??**. Temos:

$$\frac{d(A,B)\cdot d(B,C)}{2} = \text{Área}(ABC) = \text{Área}(XYZ) = \frac{d(B,Z)\cdot d(B,X)}{2}.$$

Disso decorre que

$$\frac{d(A,B)}{d(B,X)} = \frac{d(B,Z)}{d(B,C)},$$

logo os triângulos ABZ e XBC são semelhantes. Em particular, tem-se XC paralelo a AZ. Assim, os triângulos CXA e CXZ têm mesmas base e altura, logo têm mesma área. Portanto, usando o Lema 7.3.4, obtemos:

$$ABC \sim AXC + XBC \sim XCZ + XBC \sim XYZ,$$

como queríamos. □

Lema 7.3.6. Dados um retângulo R e um número $b > 0$, existe um retângulo S, de base b e altura h, tais que $R \sim S$.

Demonstração. Considere o retângulo S, de base b e altura $h = \text{Área(R)/b}$. As diagonais de R e S determinam triângulos T_1, T_2 e U_1, U_2, respectivamente (cf. Figura **??**). Como $\text{Área}(R) = \text{Área}(S)$, tem-se $\text{Área}(T_1) = \text{Área}(U_1)$ e $\text{Área}(T_2) = \text{Área}(U_2)$. Assim, segue do Lema 7.3.5 que $T_1 \sim U_1$ e $T_2 \sim U_2$. Logo,

$$R \sim T_1 + T_2 \sim U_1 + U_2 \sim S,$$

como queríamos. □

Lema 7.3.7. Se $\mathcal{P}$ é um polígono formado por dois retângulos R_1 e R_2, então existe um retângulo S tal que $S \sim \mathcal{P}$.

Demonstração. Pelo Lema 7.3.6, existe um retângulo R_3, com mesma base de R_2, tal que $R_1 \sim R_3$. Considere, então, $S = R_2 + R_3$. Temos:

$$\mathcal{P} \sim R_1 + R_2 \sim R_2 + R_3 \sim S,$$

e isso prova o lema. □

Observação 7.3.8. Se $\mathcal{P}$ é um polígono constituído por n retângulos $R_1, \ldots, R_n$, podemos usar indução para determinar, também neste caso, um retângulo S tal que $S \sim \mathcal{P}$.

Teorema 7.3.9 (Bolyai-Gerwien). *Quaisquer dois polígonos, com mesma área, são congruentes por cortes.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ dois polígonos de mesma área. Note, inicialmente, que todo triângulo T é congruente por cortes a um triângulo retângulo com altura igual a 2 e base igual a área de T, e este é congruente por cortes a um retângulo com altura igual a 1 e base igual a área de T. Denote este retângulo por R_x, onde x é a sua área. Assim, para o polígono $\mathcal{P}$, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &\sim T_1 + \ldots + T_n \\
&\sim R_{\text{Área}(T_1)} + \ldots + R_{\text{Área}(T_n)} \\
&\sim R_{\text{Área}(T_1)+\ldots+\text{Área}(T_n)} \\
&\sim R_{\text{Área}(\mathcal{P})}.
\end{aligned}$$

Analogamente tem-se $\mathcal{Q} \sim R_{\text{Área}(\mathcal{Q})}$. Como $R_{\text{Área}(\mathcal{P})}$ e $R_{\text{Área}(\mathcal{Q})}$ são congruentes por cortes (cf. Exercício 17), concluimos que $\mathcal{P} \sim \mathcal{Q}$. $\square$

7.4 Exercícios

1. Um *retângulo* é um quadrilátero que tem todos os seus ângulos retos. Prove que todo retângulo é um paralelogramo.

2. Prove que as diagonais de um retângulo são congruentes.

3. Um *losango* é um paralelogramo que tem todos os lados congruentes. Prove que as diagonais de um losango interceptam-se em ângulo reto e são bissetrizes dos seus ângulos.

4. Um *quadrado* é um retângulo que também é um losango. Prove que se as diagonais de um quadrilátero são congruentes e se interceptam em um ponto que é ponto médio de ambas, então o quadrilátero é um retângulo. Além disso, se as diagonais são perpendiculares uma a outra, então o quadrilátero é um quadrado.

5. Um *trapézio* é um quadrilátero em que dois lados opostos são paralelos. Os lados paralelos de um trapézio são chamados *bases* e os outros dois são chamados de *laterais*. Um trapézio é chamado isósceles se suas lateriais são congruentes. Seja $ABCD$ um trapézio em que AB é uma base. Se ele é isósceles, prove que $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{D}$.

6. Prove que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

7. Determine a soma dos ângulos internos de um pentágono.

8. Na Figura 7.7, $ABCD$ é um quadrado e BCE é um triângulo equilátero. Determine o ângulo $\widehat{BDE}$.

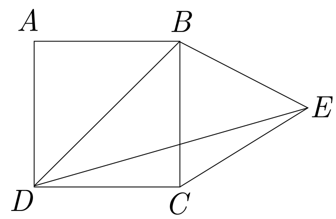

Figura 7.7

9. Na Figura 7.8, $ABCD$ é um quadrado e CDE é um triângulo equilátero. Determine a medida do ângulo $\widehat{AED}$.

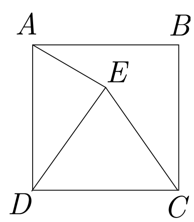

Figura 7.8

10. Prove que num trapézio isósceles a mediatriz de uma de suas bases é mediatriz da outra base, e reciprocamente.

11. Prove que o segmento que liga os pontos médios das laterais de um trapézio é paralelo às bases e que seu comprimento é a média aritmética dos comprimentos das bases.

12. Prove que ligando-se os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer obtém-se um paralelogramo.

13. A partir de cada vértice de um quadrado $ABCD$, cujos lados são percorridos em um mesmo sentido, marcam-se pontos X, Y, Z, W tais que $AX \equiv BY \equiv CZ \equiv DW$. Prove que o quadrilátero $XYZW$ também é um quadrado.

14. Qual é a figura geométrica obtida quando ligamos os pontos médios dos lados de um retângulo?

15. Dado um paralelogramo $ABCD$, considere os triângulos equiláteros ABF e ADE construídos exteriormente ao paralelogramo. Prove que FCE também é equilátero.

16. Prove que dois paralelogramos com mesmas base e altura são congruentes por cortes.

17. Prove que dois retângulos com mesma área são sempre congruentes por cortes.

Capítulo 8

Área

Neste capítulo discutiremos o conceito de área de regiões poligonais, que será feito mediante alguns axiomas, os quais permitirão introduzir as fórmulas usuais para a área de triângulos, retângulos e demais polígonos. Como aplicações do conceito de área, veremos os famosos Teorema de Pitágoras e o Teorema de Tales.

8.1 A unidade de medida

Nosso objetivo inicial é estabelecer um método de medir a região do plano delimitada por uma figura geométrica F. Isso será feito pela comparação da figura F com uma unidade de medida. O resultado dessa comparação será um número, que deverá exprimir quantas vezes a figura F contém a unidade de medida.

Lembremos que o quadrado é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos internos retos. Uma *região quadrangular* é o conjunto dos pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um quadrado. O quadrado chama-se a *fronteira* da região quadrangular e o conjunto dos pontos de uma região quadrangular que não pertencem à sua fronteira é chamado de *interior* da região.

Adotaremos como unidade de medida uma região quadrangular cujo lado da fronteira mede uma unidade de comprimento. Esta região será chamada de *região quadrangular unitária* ou, simplemente, de *região unitária*. Mais precisamente, estabeleceremos o seguinte axioma.

Axioma 16. *Qualquer região unitária terá como medida o número real* 1.

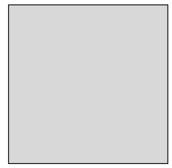

Figura 8.1: Região quadrangular.

Este número real (igual a 1), associado a cada região unitária, é chamado de *área* da região unitária. Portanto, qualquer região unitária tem área igual a 1. Além disso, o número real obtido da comparação de uma figura geométrica F com a região unitária será chamado a *área* da figura F, e será denotado por Área(F).

Observação 8.1.1. Na discussão acima, estamos admitindo que seja possível realizar essa comparação. Ou seja, estamos supondo que as figuras geométricas não sejam segmentos ou retas, por exemplo. Neste caso, não faz sentido falar em quantas vezes a figura F contém a região unitária.

Seja Q uma região quadrangular cuja medida do lado do quadrado é um número inteiro n. A região Q pode ser decomposta, através de retas paralelas aos lados do quadrado, em n^2 regiões unitárias justapostas. Assim, deve-se ter $\text{Área}(Q) = n^2$.

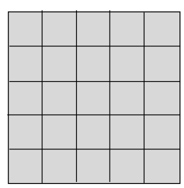

Figura 8.2: Região quadrangular Q.

Considere agora uma região quadrangular Q cuja medida do lado do quadrado é $1/n$, onde n é um número inteiro. Decompomos a região unitária em n^2 regiões quadrangulares, todas congruentes a Q. Então, como estas n^2 regiões compõem a região unitária, a área de Q deve satisfazer à condição

$$n^2 \cdot \text{Área}(Q) = 1$$

e, portanto, $\text{Área}(Q) = 1/n^2$.

De forma mais geral, considere uma região quadrangular Q cuja medida do lado do quadrado é um número racional m/n. Decompomos cada lado do quadrado em m segmentos, cada um dos quais com medida $1/n$. Traçando paralelas ao lados do quadrado a partir dos pontos de divisão, obtemos uma decomposição de Q em m^2 regiões quadrangulares, onde a medida do lado do quadrado de cada uma delas é $1/n$. Assim, a área de cada uma destas regiões é $1/n^2$. Portanto, deve-se ter Área$(Q) = m^2 \cdot (1/n^2) = m^2/n^2$.

Analisemos agora o caso em que o lado do quadrado de uma região quadrangular tem por medida um número irracional.

Proposição 8.1.2. Seja Q uma região quadrangular cuja medida do lado do quadrado é um número irracional a. Então, ainda neste caso, tem-se Área$(Q) = a^2$.

Demonstração. Provaremos que a área de Q não pode ser um número b menor nem um número c maior do que a^2. Assim, concluiremos que Área$(Q) = a^2$. Seja, então, b um número real tal que $b < a^2$. Seja r um número racional tal que $b < r^2 < a^2$. No interior da região Q, considere uma região quadrangular Q', cuja medida do lado do quadrado é r. Como r é racional, tem-se Área$(Q') = r^2$. Como Q' está contida no interior de Q, devemos ter

$$\text{Área}(Q') < \text{Área}(Q),$$

ou seja, $r^2 <$ Área(Q). Portanto, como $b < r^2$, segue que $b <$ Área(Q). Assim, todo número real b, menor que a^2, é também menor que a área de Q. Analogamente se prova que todo número real c, maior do que a^2, é maior do que a área de Q. Portanto, a área de Q não pode ser menor nem maior do que a^2. Por exclusão, deve-se ter Área$(Q) = a^2$. □

A Proposição 8.1.2, juntamente com a discussão acima, pode então ser resumida na seguinte

Proposição 8.1.3. A área de uma região quadrandular, cuja medida do lado do quadrado é um número real positivo a, é dada por Área$(Q) = a^2$.

8.2 Área de regiões poligonais

Nosso objetivo agora é calcular a área de algumas regiões poligonais. Neste texto usaremos, frequentemente, expressões do tipo *a área de um polígono*, quando queremos dizer *a área da região poligonal cuja fronteira é o dado polígono.*

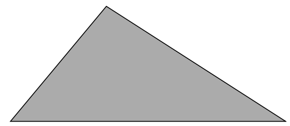

Figura 8.3: Região triangular.

Analogamente ao quadrado, chamamos de *região triangular* o conjunto dos pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo.

Uma *região poligonal* é a união de um número finito de regiões triangulares que, duas a duas, não têm pontos interiores em comum. Dizemos que um ponto é *interior* a uma região poligonal se existe alguma região triangular contida na região poligonal e contendo o ponto em seu interior. A *fronteira* de uma região poligonal é constituída pelos pontos da região que não pertencem ao seu interior.

Proposição 8.2.1. A área de um retângulo $ABCD$ é o produto $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$.

Demonstração. Lembremos que um retângulo é um quadrilátero que tem os quatro ângulos internos retos. A fim de simplificar a notação, denotemos por $a = \overline{AD}$ e $b = \overline{AB}$. A partir do retângulo $ABCD$, construimos o quadrado Q, de lado $a+b$, o qual contém duas cópias de $ABCD$ e mais dois quadrados, um de lado a e outro de lado b. Pela Proposição 8.1.3, temos

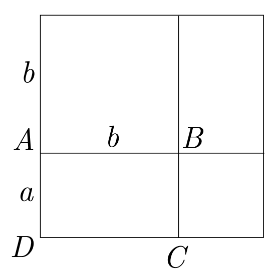

Figura 8.4: Área do retângulo $ABCD$.

$$\text{Área}(Q) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Por outro lado, como os quadrados menores têm áreas iguais a a^2 e b^2, respectivamente, temos

$$\text{Área}(Q) = a^2 + b^2 + 2 \cdot \text{Área}(ABCD).$$

Portanto, tem-se $\text{Área}(ABCD) = a \cdot b = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$. $\square$

Outra região poligonal simples é aquela delimitada por um paralelogramo. Dado um paralelogramo $ABCD$, um segmento ligando as retas que contêm os segmentos AB e CD, e perpendicular a ambas, chama-se a *altura* do paralelogramo $ABCD$ relativo ao lado AB.

Proposição 8.2.2. A área de um paralelogramo $ABCD$ é o produto da medida de um de seus lados pela medida da altura relativa a este lado.

Demonstração. Dado um paralelogramo $ABCD$, denotemos por $b = \overline{AB}$ e por a a medida da altura de $ABCD$ relativa ao lado AB. Construimos o retângulo $AFCE$, de lados $b + c$ e a, de modo que $ABCD$ esteja contido neste retângulo (cf. Figura 8.5). A área desse retângulo é dada por

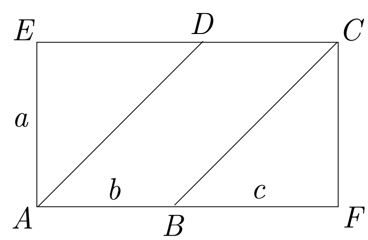

Figura 8.5: Área do paralelogramo $ABCD$.

$$\text{Área}(AFCE) = a(b + c) = ab + ac.$$

Por outro lado, o retângulo $AFCE$ é formado pelo paralelogramo $ABCD$ mais dois triângulos que, juntos, formam um retângulo de área ac. Portanto,

$$\text{Área}(ABCD) + ac = ab + ac,$$

donde Área$(ABCD) = ab$. □

Corolário 8.2.3. A área de um triângulo é a metade do produto da medida de qualquer um de seus lados pela altura relativa a este lado.

Demonstração. Dado um triângulo ABC, pelo vértice C trace uma paralela a AB, e por B trace uma paralela a AC. Estas retas definem o polígono $ABDC$, que é um paralelogramo, onde os triângulo ACB e DBC são congruentes. Assim,

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\text{Área}(ABDC).$$

Como a altura relativa ao vértice C do triângulo ABC coincide com a altura do paralelogramo $ABDC$ relativo ao lado AB, o resultado segue da Proposição 8.2.2. □

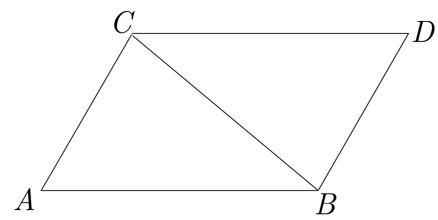

Figura 8.6: Área do triângulo ABC.

Observação 8.2.4. Dado um triângulo ABC, considere a reta r paralela à reta BC, passando pelo ponto A. Sejam A' outro ponto de r, com $A' \neq A$, e D um ponto na semi-reta S_{BC}. Tem-se $\overline{BD} = r \cdot \overline{BC}$, para algum número real $r > 0$. Considere a algura AE do triângulo ABC, relativa ao vértice A, e a altura $A'E'$ do triângulo $A'BD$, relativa ao vértice A' (cf. Figura 8.7). Observe que, pela Proposição 6.1.8, estas alturas são congruentes, ou seja, $\overline{AE} = \overline{A'E'}$. Pelo Corolário 8.2.3, temos:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AE}.$$

Por outro lado, temos

$$\text{Área}(A'BD) = \frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{A'E'} = \frac{1}{2}r \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AD},$$

logo

$$\text{Área}(A'BD) = r \cdot \text{Área}(ABC).$$

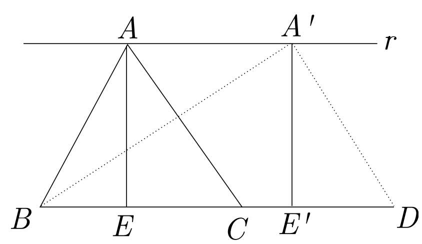

Figura 8.7

Finalizaremos esta seção calculando a área de um trapézio.

Proposição 8.2.5. A área de um trapézio é metade do produto da medida de sua altura pela soma das medidas de suas bases.

Demonstração. Dado um trapézio $ABCD$, cujas bases são AB e CD, considere a diagonal AC. Considere também as alturas CE e AF dos triângulos ACB e ACD, respectivamente. Como AB e CD são paralelos, tem-se $CE \equiv AF$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Área}(ABCD) &= \text{Área}(ACB) + \text{Área}(ADC) \\ &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CE}}{2} + \frac{\overline{DC} \cdot \overline{AF}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\overline{CE}(\overline{AB} + \overline{CD}), \end{aligned}$$

como queríamos provar. □

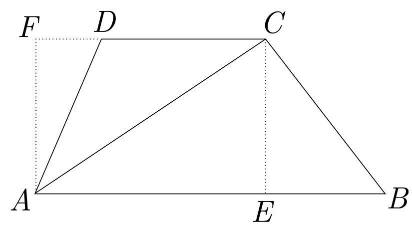

Figura 8.8: Área do trapézio $ABCD$.

8.3 Definição geral de área

Até agora obtemos uma fórmula para o cálculo da área de algumas regiões poligonais. Entretanto, não demos ainda uma definição geral para a área de uma figura geométrica arbitrária F.

A área de uma figura geométrica F, que estamos denotando por Área(F), ficará bem determinada se conhecermos seus valores aproximados, por falta ou por excesso. Os valores de Área(F) aproximados por falta são, por definição, as áreas das regiões poligonais P contidas em F. Os valores de Área(F) aproximados por excesso são as áreas das regiões poligonais Q que contêm F. Assim, quaisquer que sejam as regiões poligonais P e Q, o número Área(F) satisfaz

$$\text{Área}(P) \leq \text{Área}(F) \leq \text{Área}(Q).$$

Por simplicidade, ao invés de considerarmos regiões poligonais quaisquer, limitaremos nossa atenção às regiões poligonais *retangulares*, que consistem de uma união de várias regiões retangulares justapostas. A área de uma região poligonal retangular ou, abreviadamente, de um polígono retangular, é a soma das áreas dos retângulos que o compõem.

Para maior simplicidade ainda, limitaremos nossa atenção à polígonos retangulares contidos na figura F, cuja área desejamos calcular. Definimos, então, a *área* da figura F como o número real positivo cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F. Isso significa que, para todo polígono retangular P, contido em F, tem-se

$$\text{Área}(P) \leq \text{Área}(F).$$

Além disso, dado qualquer número $b < \text{Área}(F)$, existe um polígono retangular P, contido em F, tal que

$$b < \text{Área}(P) \leq \text{Área}(F).$$

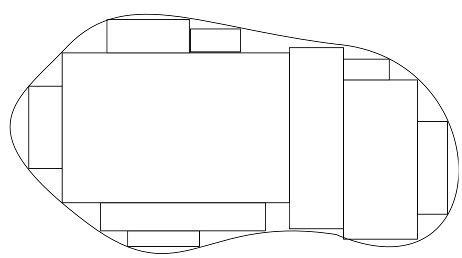

Figura 8.9: Polígono retangular P contido na figura F.

Observe que poderíamos ter definido a área de F como o número real positivo cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos retangulares que contêm F.

8.4 Aplicações

Nesta seção obteremos o Teorema de Tales, à respeito de retas paralelas, e o famoso Teorema de Pitágoras acerca de triângulos retângulos.

Teorema 8.4.1 (Tales)**.** *Dado um triângulo ABC, considere uma reta paralela ao lado BC, interceptando os lados AB e AC nos pontos B' e C', respectivamente. Então,*

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}. \tag{8.1}$$

Demonstração. Como $B'C'$ é paralelo a BC, segue da Observação 8.2.4 que

$$\text{Área}(BB'C') = \text{Área}(CB'C'). \tag{8.2}$$

Além disso, os triângulos $C'AB$ e $B'AC$ têm, em comum, o triângulo $AB'C'$. Assim, em virtude de (8.2),tem-se

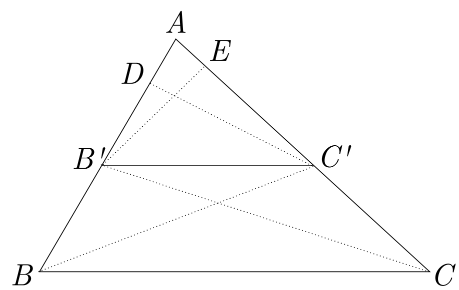

Figura 8.10: Teorema de Tales.

$$\text{Área}(C'AB) = \text{Área}(B'AC). \tag{8.3}$$

Por outro lado, os triângulos $C'AB$ e $C'AB'$ têm mesma altura $C'D$ relativa ao vértice C'. Assim, pelo Corolário 8.2.3, obtemos:

$$\text{Área}(C'AB) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{C'D} \quad \text{e} \quad \text{Área}(C'AB') = \frac{1}{2}\overline{AB'} \cdot \overline{C'D}. \tag{8.4}$$

Analogamente, os triângulos $B'AC$ e $B'AC'$ têm mesma altura $B'E$ relativa ao vértice B'. Logo,

$$\text{Área}(B'AC) = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{B'E} \quad \text{e} \quad \text{Área}(B'AC') = \frac{1}{2}\overline{AC'} \cdot \overline{B'E}. \tag{8.5}$$

Portanto, de (8.3), (8.4) e (8.5), obtemos:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\text{Área}(C'AB')}{\text{Área}(C'AB)} = \frac{\text{Área}(C'AB')}{\text{Área}(B'AC)} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}},$$

provando a relação (8.1). □

O Teorema de Tales pode ser enunciado de uma forma mais geral.

Teorema 8.4.2 (Tales)**.** *Três retas paralelas, interceptadas por duas retas transversais, determinam segmentos proporcionais.*

Demonstração. Considere três retas paralelas, r, s e t, que interceptam duas retas, m e n, nos pontos A, B, C e A', B', C', respectivamente (cf. Figura 8.11). Queremos provar que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}. \tag{8.6}$$

Pelo ponto A, considere a reta n', paralela à reta n, interceptando as retas s e t nos pontos D e E, respectivamente. Pelo Teorema 8.4.1, tem-se

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}. \tag{8.7}$$

Agora, como $ADB'A'$ e $DEC'B'$ são paralelogramos, segue que

$$AD \equiv A'B' \quad \text{e} \quad DE \equiv B'C'. \tag{8.8}$$

Portanto, de (8.7) e (8.8), obtemos a relação (8.6). □

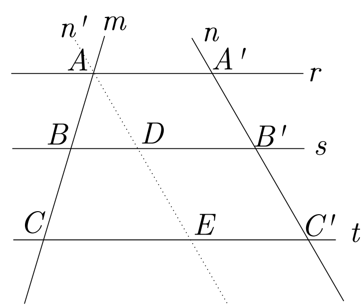

Figura 8.11: Teorema de Tales.

Teorema 8.4.3 (Pitágoras)**.** *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Demonstração. Seja ABC um triângulo retângulo, cujo ângulo reto é $\widehat{C}$. A fim de simplificar a notação, escrevamos $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ e $c = \overline{AB}$. Na semi-reta S_{CB}, considere o ponto D tal que B esteja entre C e D e $\overline{BD} = b$. Considere agora a reta perpendicular à reta BC, passando por D. Sobre esta reta, considere o ponto E, situado no mesmo semi-plano que A em relação à reta BC, e tal que $\overline{DE} = a$. Obtemos, assim, o triângulo retângulo BED. Observe que, pelo caso LAL, os triângulos ABC e BED são congruentes. De forma inteiramente análoga, construimos os triângulos retângulos EGF

e GAH, ambos congruentes ao triângulo ABC, como mostra a Figura 8.12. Por construção, os quadriláteros $CDFH$ e $ABEG$ são quadrados. Temos:

$$\text{Área}(CDFH) = \text{Área}(ABEG) + 4 \cdot \text{Área}(ABC). \tag{8.9}$$

Pela Proposição 8.2.2 e pelo Corolário 8.2.3, a igualdade (8.9) torna-se:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b. \tag{8.10}$$

Elevando ao quadrado e simplificando os termos, a relação (8.10) torna-se

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

como queríamos. □

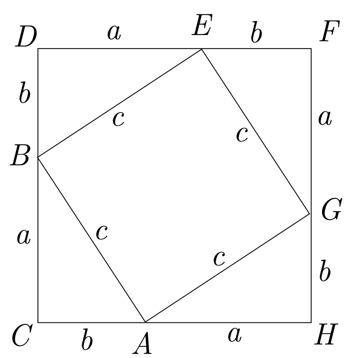

Figura 8.12: Teorema de Pitágoras.

A recíproca do Teorema de Pitágoras também é verdadeira.

Teorema 8.4.4. *Se num triângulo ABC vale a relação*

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2,$$

então o triângulo é retângulo e sua hipotenusa é o lado BC.

Demonstração. A partir do triângulo ABC, construimos um triângulo retângulo XYZ, cuja hipotenusa é o lado ZY e os catetos XY e XZ satisfazem $XY \equiv AB$ e $XZ \equiv AC$. Pelo Teorema de Pitágoras, a hipotenusa YZ mede

$$\overline{YZ} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}.$$

Portanto, o triângulo XYZ tem lados medindo AB, AC e BC logo, pelo Teorema 4.2.7, os triângulos XYZ e ABC são congruentes. Isso implica que ABC é retângulo e sua hipotenusa é o lado BC. □

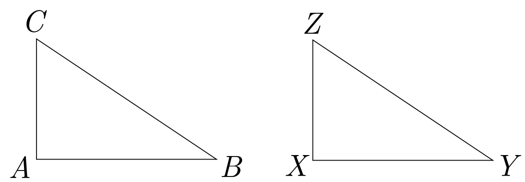

Figura 8.13: Recíproca do Teorema de Pitágoras.

8.5 Exercícios

1. Dois hexágonos regulares têm lados medindo $2cm$ e $3cm$. Qual é a relação entre as suas áreas?

2. Dado um quadrado $ABCD$, de lado a, sejam O o ponto de interseção das diagonais AC e BD. Se P e A denotam os pontos médios dos segmentos AO e BO, respectivamente, calcule a área do quadrilátero $ABQP$.

3. Prove que os pontos médios de um quadrilátero convexo qualquer são vértices de um paralelogramo cuja área é a metade da área do quadrilátero dado.

4. Na Figura 8.14, $ABCD$ é um quadrado e MNC é um triângulo equilátero. Determine a área deste triângulo.

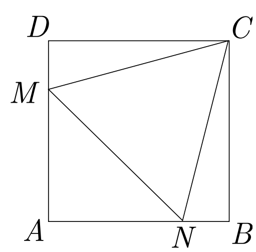

Figura 8.14: Triângulo equilátero MNC.

5. Prove que a área de um losango é igual à metade da medida do produto das diagonais.

6. Prove que as três medianas de um triângulo o decompõem em seis triângulos de mesma área.

7. Usando a Figura 8.15, dê uma nova prova para o Teorema de Pitágoras.

8. Usando a Figura 8.16, dê uma nova prova para o Teorema de Pitágoras.

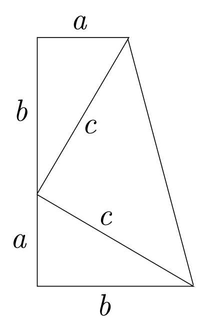

Figura 8.15: Teorema de Pitágoras.

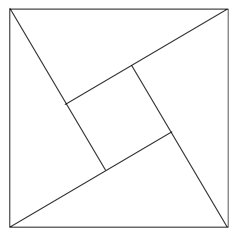

Figura 8.16: Teorema de Pitágoras, provado por Bhaskara.

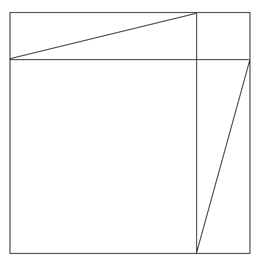

Figura 8.17: Teorema de Pitágoras.

9. Usando a Figura 8.17, dê uma nova prova para o Teorema de Pitágoras.

10. Prove que a área A de um triângulo de semiperímetro p e lados de medida a, b, c é dada por

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Esta é chamada a *fórmula de Heron* para a área de um triângulo (cf. [7]).

Capítulo 9

Semelhança

Neste capítulo discutiremos, de forma simples, o conceito geral de semelhança, permitindo que se desenvolva toda a teoria de forma elementar. Obteremos, em particular, a teoria de semelhança de triângulos. Além disso, apresentaremos uma nova demonstração dos teoremas de Tales e Pitágoras, agora sob o ponto de vista de semelhança.

9.1 A definição de semelhança

Sejam F e F' duas figuras geométricas e r um número real positivo.

Definição 9.1.1. Dizemos que F e F' são *semelhantes*, com *razão de semelhança* r, se existe uma bijeção $\varphi : F \to F'$, entre os pontos de F e os pontos de F', satisfazendo

$$\overline{\varphi(X)\varphi(Y)} = r \cdot \overline{XY},$$

para quaisquer pontos X, Y pertencentes à figura F.

A bijeção $\varphi : F \to F'$ chama-se uma *semelhança de razão* r entre as figuras geométricas F e F'. A fim de simplificar a notação, denotaremos por $X' = \varphi(X)$ e $Y' = \varphi(Y)$ as imagens dos pontos X e Y pela bijeção φ.

Observação 9.1.2. Toda figura geométrica F é semelhante a si própria, pois a aplicação identidade $\varphi : F \to F$ é uma semelhança de razão 1. Além disso, se F é semelhante a F' então F' é semelhante a F pois, se $\varphi : F \to F'$ é uma semelhança de razão r, então a inversa $\varphi^{-1} : F' \to F$ é uma semelhança de razão $1/r$. Finalmente, se F é semelhante a F' e F' é semelhante a F'', então F é semelhante a F''. De fato, se $\varphi : F \to F'$ e $\psi : F' \to F''$ são semelhanças de razões r e r', respectivamente, então a composta $\psi \circ \varphi : F \to F''$ é

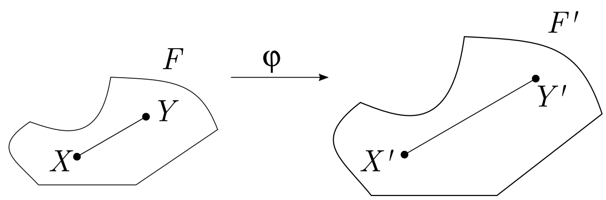

Figura 9.1: Semelhança de razão r.

uma semelhança de razão $r \cdot r'$. Isso mostra que a semelhança de figuras geométricas é uma relação de equivalência.

Definição 9.1.3. Uma semelhança de razão 1 é chamada de *isometria*. Neste caso, quando existe uma isometria entre as figuras F e F', dizemos que estas são *congruentes*.

Exemplo 9.1.4. Se dois segmentos AB e CD satisfazem $\overline{CD} = r \cdot \overline{AB}$, para algum número real $r > 0$, definimos uma semelhança $\varphi : AB \to CD$, de razão r, fazendo corresponder a cada ponto X do segmento AB o ponto X' de CD tal que

$$\overline{CX'} = r \cdot \overline{AX}.$$

A fim de provar que φ é de fato uma semelhança, sejam $X, Y \in AB$. Se X está entre A e Y então, pela definição de φ, o ponto X' está entre C e Y'. Assim,

$$\begin{aligned} \overline{X'Y'} &= \overline{CY'} - \overline{CX'} = r \cdot \overline{AY} - r \cdot \overline{AX} \\ &= r(\overline{AY} - \overline{AX}) = r \cdot \overline{XY}. \end{aligned}$$

Analogamente se Y está entre A e X, Portanto, os segmentos AB e CD são semelhantes.

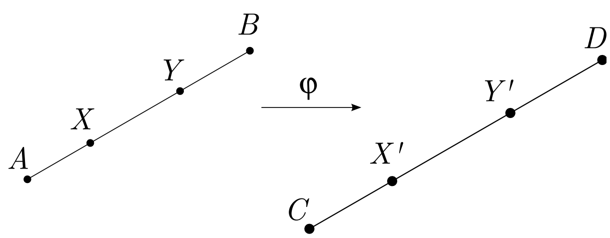

Figura 9.2: Semelhança de segmentos.

Exemplo 9.1.5. Duas semi-retas S_{AB} e S_{CD} são figuras semelhantes. De fato, dado qualquer número real $r > 0$, definimos uma semelhança $\varphi : S_{AB} \to S_{CD}$, de razão r, fazendo corresponder a cada ponto X em S_{AB} o ponto $X' = \varphi(X)$ em S_{CD} tal que

$$\overline{CX'} = r \cdot \overline{AX}.$$

A prova de que φ é uma semelhança se faz como no Exemplo 9.1.4. De forma análoga se prova que duas retas quaisquer são semelhantes.

Veremos a seguir algumas propriedades das semelhanças.

Lema 9.1.6. Toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.

Demonstração. Sejam $\varphi : F \to F'$ uma semelhança de razão r e três pontos A, B, C em F tais que C pertence ao segmento AB. Provemos que C' pertence ao segmento $A'B'$. De fato, como $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, temos:

$$\begin{aligned} \overline{A'C'} + \overline{C'B'} &= r\overline{AC} + r\overline{CB} = r(\overline{AC} + \overline{CB}) \\ &= r\overline{AB} = \overline{A'B'}, \end{aligned}$$

provando que C' pertence ao segmento $A'B'$. □

A proposição seguinte fará uso do conceito do círculo. A fim de defini-lo, considere um ponto O do plano e a um número real positivo. O *círculo* de centro O e raio a é o conjunto de todos os pontos P do plano tais que $\overline{OP} \leq a$. No Capítulo 10, ao tratarmos da circunferência, voltaremos a falar do círculo com mais detalhes.

Proposição 9.1.7. Toda semelhança $\varphi : F \to F'$ de razão r transforma:

(a) Todo segmento contido em F num segmento contido em F'.

(b) Um círculo de raio a contido em F num círculo de raio $r \cdot a$ em F'.

(c) Pontos interiores a F em pontos interiores a F'.

(d) Pontos da fronteira de F em pontos da fronteira de F'.

(e) Vértices de F em vértices de F' (se F e F' forem polígonos).

Demonstração. (a) Dados um segmento AB contido em F e um ponto $C \in AB$, o ponto C' pertence ao segmento $A'B'$ em virtude do Lema 9.1.6. Reciprocamente, dado um ponto C' em $A'B'$, tem-se $C' = \varphi(C)$, onde $C = \varphi^{-1}(C')$. Como φ^{-1} é uma semelhança, segue do Lema 9.1.6 que o ponto C pertence ao segmento AB. Portanto, φ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos dos segmentos AB e $A'B'$.

(b) Um círculo de centro O e raio a, contido em F, é a união de todos os segmentos OX tais que $\overline{OX} = a$. Sua imagem por φ é a união dos segmentos $O'X'$ tais que $\overline{O'X'} = r \cdot \overline{OX}$, ou seja, é o círculo de centro O' e raio $r \cdot a$.

(c) Dizemos que um ponto X está no *interior* de uma figura F se é centro de algum círculo inteiramente contido em F. Sua imagem X' é, pelo item (b), o centro de um círculo de raio $r \cdot a$, contido em F'. Portanto, X' é ponto interior de F'.

(d) Dizemos que um ponto X pertence à *fronteira* de uma figura F se $X \in F$ mas não é interior a F. Neste caso, o ponto X' deve pertencer à fronteira de F' pois, se X' estivesse no interior de F' então, em virtude do item (c), $X = \varphi^{-1}(\varphi(X))$ também estaria no interior de F.

(e) Suponha que F e F' sejam polígonos e que X seja um vértice de F. Em particular, X está na fronteira de F e, pelo item (d), sua imagem X' está na fronteira de F'. Se X' não fosse vértice, X' pertenceria a um lado $A'B'$ de F', sendo diferente de A' e B'. Mas isso implicaria que X pertence ao lado AB de F, com $X \neq A$ e $X \neq B$, logo X não seria vértice de F. $\square$

9.2 Homotetias

Fixemos um ponto arbitrário O do plano e seja r um número real positivo.

Definição 9.2.1. Uma *homotetia* de centro O e razão r é a aplicação do plano φ tal que $\varphi(O) = O$ e, para todo $X \neq O$, $X' = \varphi(X)$ é o ponto da semi-reta S_{OX} tal que $\overline{OX'} = r \cdot \overline{OX}$.

Uma homotetia de razão 1 é simplesmente a aplicação identidade. Uma homotetia de centro O transforma toda reta que passa por O em si mesma. Além disso, toda homotetia é uma correspondência biunívoca, cuja inversa é a homotetia de mesmo centro e razão $1/r$.

Teorema 9.2.2. *Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou numa reta paralela.*

Demonstração. Seja φ uma homotetia de centro O e razão r. Note que o caso $r = 1$ é trivial, pois φ é a identidade. Supondo então $r \neq 1$, considere dois pontos quaisquer X, Y. Se X, Y e O são colineares então, da Definição 9.2.1, tem-se $X'Y' = r \cdot \overline{XY}$. Suponha então que X, Y e O não sejam colineares. Da hipótese

$$\overline{OX'} = r \cdot \overline{OX} \quad \text{e} \quad \overline{OY'} = r \cdot \overline{OY},$$

e da Observação 8.2.4 concluimos (cf. Figura 9.3) que

$$\text{Área}(OXY') = r \cdot \text{Área}(OXY) \quad \text{e} \quad \text{Área}(OYX') = r \cdot \text{Área}(OXY),$$

logo

$$\text{Área}(OXY') = \text{Área}(OYX'). \tag{9.1}$$

Subtraindo de ambos os membros de (9.1) a área do triângulo comum OXY, resulta

$$\text{Área}(XYX') = \text{Área}(XYY').$$

Como estes dois triângulos têm a mesma base XY, da igualdade de suas áreas segue-se que suas alturas são congruentes. Logo, pelo Exercício 6.14, XY é paralelo a $X'Y'$. Provemos que $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$. De fato, usando novamente a Observação 8.2.4, temos:

$$\text{Área}(YOX) + \text{Área}(YXX') = r \cdot \text{Área}(YOX) \tag{9.2}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Área}(YOX) + \text{Área}(YXX') + \text{Área}(X'YY') &= r\text{Área}(OYX') \\ &= r\left(\text{Área}(YOX) + \text{Área}(YXX')\right). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Subtraindo (9.2) de (9.3), obtemos

$$\text{Área}(X'YY') = r \cdot \text{Área}(YXX').$$

Como XY e $X'Y'$ são paralelos, os triângulos $X'YY'$ e YXX' têm a mesma altura. Assim, a razão

$$r = \frac{\text{Área}(X'YY')}{\text{Área}(YXX')}$$

é igual à razão entre suas bases, ou seja,

$$\frac{\overline{X'Y'}}{\overline{XY}} = r,$$

como queríamos provar. $\square$

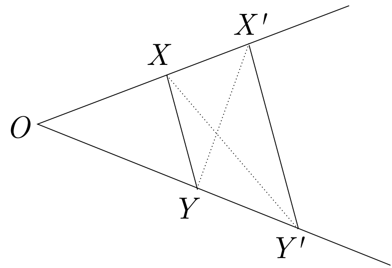

Figura 9.3

Usando o Teorema 9.2.2, podemos obter novamente o Teorema de Tales, agora sob o ponto de vista de semelhança.

Corolário 9.2.3 (Tales)**.** Toda reta paralela a um dos lados de um triângulo, que intercepta os outros dois lados, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

Demonstração. Dado um triângulo ABC, considere uma reta paralela ao lado BC, interceptando os lados AB e AC nos pontos D e E, respectivamente. Afirmamos que os triângulos ABC e ADE são semelhantes. De fato, considere a homotetia φ de centro A e razão $r = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$. Observe que φ transforma D em B e E num ponto C' sobre a semi-reta S_{AC}. A imagem de DE por φ é o segmento BC', paralelo a DE. Assim, C' pertence às retas BC e AC, isto é, $C' \equiv C$. Portanto, $\varphi(A) = A$, $\varphi(D) = B$ e $\varphi(E) = C$, ou seja, φ é uma semelhança entre os triângulos ADE e ABC. Em particular, obtemos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}},$$

como queríamos. □

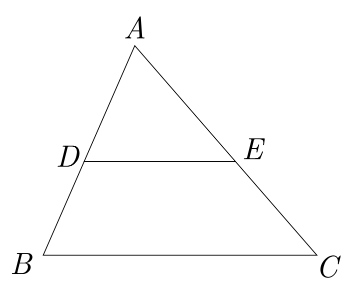

Figura 9.4: Teorema de Tales.

A recíproca do Corolário 9.2.3 também é verdadeira.

Proposição 9.2.4. Num triângulo ABC, considere um ponto D sobre o lado AB e um ponto E sobre AC tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$. Então, DE é paralelo a BC.

Demonstração. Considere a homotetia φ de centro A e razão

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}.$$

Como $B = \varphi(D)$ e $C = \varphi(E)$, segue do Teorema 9.2.2 que DE e BC são paralelos. □

9.3 Semelhança de triângulos

Na literatura a semelhança de triângulos é definida de modo que dois triângulos são semelhantes se existe uma bijeção entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais. Provaremos agora que a definição de semelhança, dada na Seção 9.1, quando aplicada a triângulos, reduz-se à definição tradicional.

Teorema 9.3.1. *Dois triângulos semelhantes têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais. Reciprocamente, se dois triângulos têm ângulos correspondentes congruentes ou lados correspondentes proporcionais, eles são semelhantes.*

Demonstração. Seja $\varphi : ABC \to A'B'C'$ uma semelhança de razão r entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, com $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ e $C' = \varphi(C)$. Então, pela definição de semelhança, temos:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = r,$$

ou seja, os triângulos têm os lados correspondentes proporcionais. A fim de provar que os ângulos correspondentes são congruentes, considere a homotetia φ de centro A e razão r; φ transforma o triângulo ABC no triângulo parcial $AB''C''$, com $B''C''$ paralelo a BC. Assim,

$$\widehat{B''} \equiv \widehat{B} \quad \text{e} \quad \widehat{C''} \equiv \widehat{C}.$$

No entanto, como

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'} = r \cdot \overline{AB},$$

$$\overline{AC''} = \overline{A'C'} = r \cdot \overline{AC}$$

e

$$\overline{B''C''} = \overline{B'C'} = r \cdot \overline{BC},$$

os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, portanto

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \quad \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \quad \text{e} \quad \widehat{C} \equiv \widehat{C'}.$$

Reciprocamente, sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos tais que

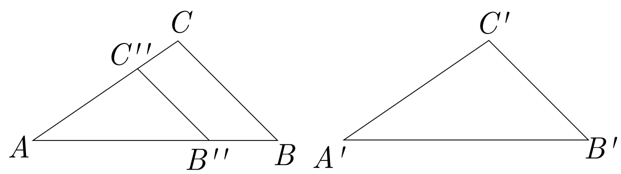

Figura 9.5

$$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \quad \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \quad \text{e} \quad \widehat{C} \equiv \widehat{C'}.$$

Nas retas AB e AC, considere os pontos B'' e C'', respectivamente, tais que $AB'' \equiv A'B'$ e $AC'' \equiv A'C'$. Como $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes. Isso implica que $\widehat{B''} \equiv \widehat{B'}$, donde $\widehat{B} \equiv \widehat{B''}$. Portanto, as retas $B''C''$ e BC são paralelas e, pelo Corolário 9.2.3, os triângulos $AB''C''$ e ABC são semelhantes. Como $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes segue, pela transitividade, que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. Sejam agora dois triângulos ABC e $A'B'C'$ tais que

$$\overline{A'B'} = r \cdot \overline{AB}, \quad \overline{A'C'} = r \cdot \overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{B'C'} = r \cdot \overline{BC},$$

para algum número real $r > 0$. A homotetia de centro A e razão r transforma o triângulo ABC no triângulo $AB''C''$ cujos lados medem

$$\overline{AB''} = r \cdot \overline{AB}, \quad \overline{AC''} = r \cdot \overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{B''C''} = r \cdot \overline{BC}.$$

Os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes pois têm os lados correspondentes congruentes. Como $AB''C''$ é semelhantes a ABC, pela transitividade, segue-se que ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. $\square$

Veremos a seguir condições suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Corolário 9.3.2. Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos correspondentes são congruentes.

Demonstração. Sejam ABC e XYZ dois triângulos, com $\widehat{A} \equiv \widehat{X}$ e $\widehat{B} \equiv \widehat{Y}$. Do Teorema 6.1.5, temos

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{\text{o}} = \widehat{X} + \widehat{Y} + \widehat{Z}$$

logo, $\widehat{C} \equiv \widehat{Z}$, e o resultado segue do Teorema 9.3.1. □

Teorema 9.3.3. *Dois triângulos ABC e XYZ são semelhantes se $\widehat{A} \equiv \widehat{X}$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{XZ}}$.*

Demonstração. A partir dos triângulos dados, construimos um triângulo HIJ tal que

$$HI \equiv XY, \quad \widehat{H} \equiv \widehat{A} \quad \text{e} \quad \widehat{I} \equiv \widehat{B}.$$

Pelo Corolário 9.3.2, os triângulos ABC e XIJ são semelhantes, assim

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{HJ}}.$$

Como $HI \equiv XY$, a hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{XZ}}$ e a igualdade acima implicam que $HJ \equiv XZ$. Como $XY \equiv HI$ e $\widehat{X} \equiv \widehat{H}$, pelo Axioma 14, segue que os triângulos XYZ e HIJ são conguentes. Como ABC e HIJ são semelhantes, segue por transitividade que ABC e XYZ são semelhantes. □

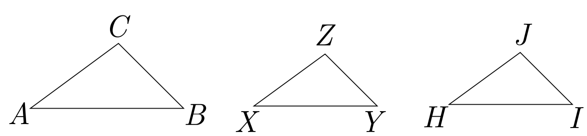

Figura 9.6

A proposição seguinte fornece uma relação interessante entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Proposição 9.3.4. Em qualquer triângulo retângulo, a altura relativa ao vértice do ângulo reto é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Demonstração. Dado um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto no vértice A, trace a altura AD relativa ao lado BC (cf. Figura 9.7). Provemos que

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC}.$$

Como AD é perpendicular a BC, os triângulos ADC e ADB são retângulos. Como $\widehat{B} + \widehat{BAD} = 90^o$ e $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^o$, temos:

$$\widehat{C} \equiv \widehat{BAD}.$$

Assim, pelo Corolário 9.3.2, os triângulos ADC e BDA são semelhantes. Desta semelhança, decorre que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}},$$

ou seja,

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC},$$

como queríamos. $\square$

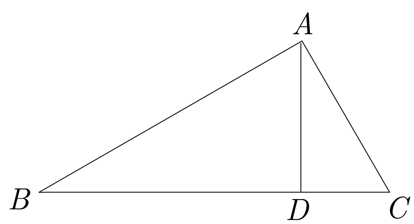

Figura 9.7: Triângulo retângulo ABC.

Corolário 9.3.5 (Teorema de Pitágoras)**.** Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração. Dado um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto no vértice A, trace a altura AD do vértice A ao lado BC. Pela Proposição 9.3.4, os triângulos ABC, ADC e BDA são semelhantes. Da semelhança de ADC e BAC, temos:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}},$$

e da semelhança entre BDA e BAC, temos:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Assim,

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CD} \quad \text{e} \quad \overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}.$$

Portanto,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}(\overline{BD} + \overline{CD}) = \overline{BC}^2,$$

como queríamos provar. □

9.4 Exercícios

1. Se $\varphi : F \to F'$ e $\varphi' : F' \to F''$ são semelhanças de razões r e r'', respectivamente, prove que a composta $\varphi' \circ \varphi : F \to F''$ é uma semelhança de razão rr', e a inversa $\varphi^{-1} : F'' \to F$ é uma semelhança de razão $1/r$.

2. Seja r uma reta do plano. A *reflexão* em torno de r é a aplicação φ que associa a cada ponto X do plano o ponto X' tal que r é a mediatriz do segmento XX'. Prove que toda reflexão é uma isometria.

3. A *simetria* em torno de um ponto O é a aplicação φ que faz corresponder a cada ponto X o ponto $\varphi(X) = X'$ tal que O é o ponto médio do segmento XX'. Prove que toda simetria em torno de um ponto é uma isometria.

4. Prove que dois triângulos equiláteros são sempre semelhantes.

5. Se dois triângulos isósceles têm os ângulos opostos à base congruentes entre si, prove que os triângulos são semelhantes.

6. Dado um triângulo ABC, considere o triângulo XYZ formado pelos pontos médios dos lados de ABC. Qual é a relação entre os perímetros dos triângulos?

7. Prove que alturas correspondentes em triângulos semelhantes estão na mesma razão que os lados correspondentes.

8. Prove que se em um triângulo retângulo o menor cateto mede metade da medida da hipotenusa, então seus ângulos agudos são de 30º e 60º.

9. Dado um triângulo retângulo ABC, sendo $\widehat{C}$ o ângulo reto, trace a altura a partir do vértice C. Se a e b são as medidas dos catetos e h é a medida da altura, prove que

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

10. Sejam p e q inteiros positivos, com $p > q$. Prove que todo triângulo cujos lados medem $p^2 - q^2$, $2pq$ e $p^2 + q^2$, é um triângulo retângulo.

11. Prove que em todo triângulo ABC, a medida h_a da altura relativa ao vértice A é dada por

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ e p é o semi-perímetro do triângulo.

Capítulo 10

Circunferência

Este capítulo será dedicado ao estudo da circunferência. A primeira parte aborda propriedades básicas sobre a geometria na circunferência, em especial aquelas relacionadas a arcos e ângulos e, em seguida, problemas relacionados a polígonos inscritos e circunscritos a uma dada circunferência. Na terceira parte discutimos o conceito de potência de um ponto em relação a uma circunferência e finalizamos com a questão da semelhança no círculo.

10.1 A circunferência

Definição 10.1.1. Dados um ponto O do plano e um número real $r > 0$, a *circunferência* de centro O e raio r, denotada por $C(O; r)$, é o conjunto

$$C(O; r) = \{P : \overline{OP} = r\}.$$

Um *raio* de uma circunferência é um segmento que une o centro a qualquer um de seus pontos. *Corda* é um segmento determinado por dois pontos da circunferência; *diâmetro* é uma corda que passa pelo seu centro.

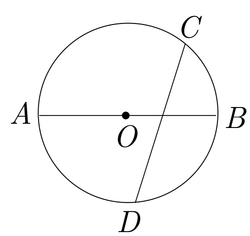

Figura 10.1: Diâmetro AB e cordas AB e CD.

Proposição 10.1.2. Um raio é perpendicular a uma corda, que não é um diâmetro, se, e somente se, a divide em dois segmentos congruentes.

Demonstração. Dado uma circunferência $C(O;r)$, seja OP o raio perpendicular à corda AB. Sejam M o ponto de interseção de OP e AB. Como $\overline{OA} = \overline{OB} = r$, o triângulo OAB é isósceles, com base AB. Assim, $\widehat{A} \equiv \widehat{B}$. Como OP e AB são perpendiculares, os ângulos $\widehat{AMO}$ e $\widehat{BMO}$ são retos logo, $\widehat{AMO} \equiv \widehat{BMO}$. Pelo caso LAL, os triângulos AOM e BOM são congruentes. Segue, em particular, que $AM \equiv MB$. Reciprocamente, se $AM \equiv MB$, os triângulos AMO e BMO são congruentes logo, $\widehat{AMO} \equiv \widehat{BMO}$. Como $\widehat{AMO} + \widehat{BMO} = 180^o$, concluimos que cada um deles mede 90^o, ou seja, o raio OP é perpendicular à corda AB. □

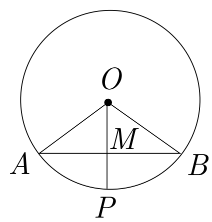

Figura 10.2

Uma reta *tangente* a uma circunferência é uma reta que tem um único ponto em comum com ela; este ponto comum chama-se *ponto de tangência*.

Proposição 10.1.3. Uma reta é tangente a uma circunferência se, e somente se, ela é perpendicular ao raio determinado pelo ponto de tangência.

Demonstração. Sejam t uma reta tangente a uma circunferência $C(O;r)$ e T o ponto de tangência. Seja P o pé da perpendicular baixada de O à reta t. Provemos que $P \equiv T$. De fato, se $P \neq T$, então os pontos O, P e T determinam um triângulo retângulo OPT, cuja hipotenusa é OT. Seja $T' \in t$ tal que P esteja entre T e T' e $PT \equiv PT'$ (cf. Figura 10.3) Pelo caso LAL, os triângulos OPT e OPT' são congruentes. Disso decorre, em particular, que $\overline{OT'} = \overline{OT} = r$, ou seja, T' é outro ponto da reta t que também pertence a $C(O;r)$, o que é uma contradição. Portanto, P e T são coincidentes. Reciprocamente, sejam OT um raio de $C(O;r)$ e t uma reta que passa por T e perpendicular a OT. Considere um ponto $P \in t$, com $P \neq T$. Fica, assim, determinado o triângulo OPT, cuja hipotenusa é o lado OP. Disso decorre que $r = \overline{OT} < \overline{OP}$, ou seja, $P \notin C(O;r)$. Portanto, T é o único ponto comum a t e a $C(O;r)$, isto é, t é a reta tangente a $C(O;r)$ no ponto T. □

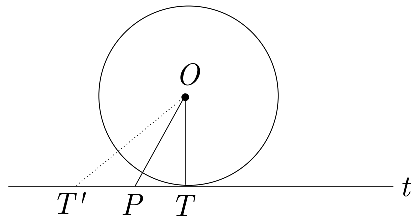

Figura 10.3: Proposição 10.1.3

Dados dois pontos A e B pertencentes a uma circunferência $C(O;r)$, a reta AB separa o plano em dois semi-planos, cada um destes contendo uma parte da circunferência. Estas partes são chamadas de *arcos* determinados pelos pontos A e B. Quando A e B são extremidades de um diâmetro, estes arcos são chamados de *semi-círculos*.

Quando a corda AB não é um diâmetro, o centro O situa-se em um dos semi-planos determinados pela reta AB; o arco que fica no mesmo semi-plano que O chama-se *arco maior*, e o outro de *arco menor*.

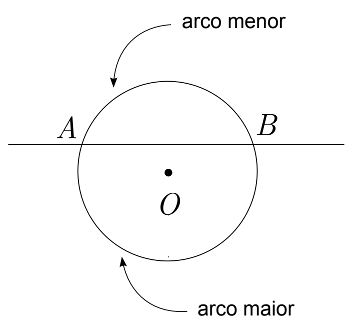

Figura 10.4: Arcos maior e menor.

Definição 10.1.4. Dois pontos $A, B \in C(O;r)$ determinam um ângulo $\widehat{AOB}$, chamado de *ângulo central*. A *medida* em graus do arco menor, determinado por A e B, é a medida do ângulo central $\widehat{AOB}$. A medida em graus do arco maior é 360^o menos a medida do arco menor; se AB é um diâmetro, a medida dos arcos é 180^o (cf. Figura 10.5).

Definição 10.1.5. Um ângulo é *inscrito* numa circunferência se o seu vértice é um ponto da circunferência e seus lados interceptam a circunferência em dois pontos distintos do vértice.

O arco determinado pelos dois pontos distintos e que não contém o vértice

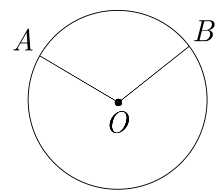

Figura 10.5: Ângulo central $\widehat{AOB}$.

do ângulo inscrito é chamado arco *subentendido* pelo ângulo (cf. Figura 10.6).

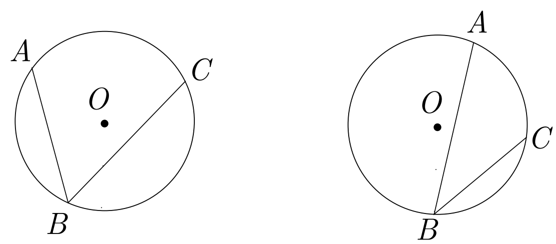

Figura 10.6: Arco subentendido pelo ângulo inscrito $\widehat{ABC}$.

Teorema 10.1.6. *A medida de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da medida do arco subentendido por esse ângulo.*

Demonstração. Temos três casos a considerar:

1. Um dos lados do ângulo inscrito é um diâmetro.

2. O ângulo inscrito é dividido pelo diâmetro com extremidade em seu vértice.

3. O ângulo inscrito não é dividido pelo diâmetro com extremidade em seu vértice.

Caso 1. Seja $\widehat{BAC}$ o ângulo inscrito com vértice A e suponha que $O \in AC$. Assim, a medida do arco BC é $\widehat{BOC}$. Como $OA \equiv OB$, o triângulo AOB é isósceles com base AB assim, $\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA}$. Como BOC é ângulo externo ao triângulo AOB, temos:

$$\widehat{BOC} = \widehat{OAB} + \widehat{OBA} = 2\widehat{OAB}.$$

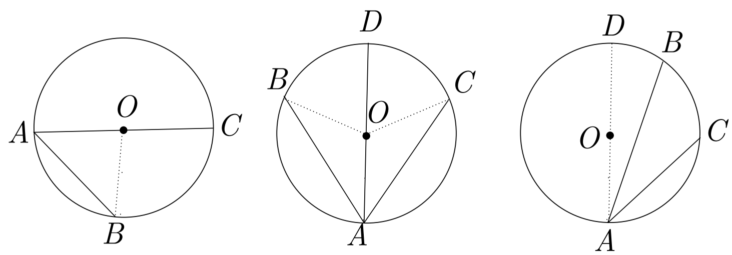

Figura 10.7: Arcos subentendidos.

Caso 2. Seja AD o diâmetro com extremidade no vértice A do ângulo inscrito. Pelo Caso 1, temos:

$$\frac{1}{2}\widehat{BOD} = \widehat{BAD} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\widehat{DOC} = \widehat{DAC}.$$

Como $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} + \widehat{DAC}$, temos:

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOD} + \frac{1}{2}\widehat{DOC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}.$$

Caso 3. Considere o diâmetro AD. Se AB divide o ângulo $\widehat{CAD}$, temos $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC}$. Assim,

$$\widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DOC} - \frac{1}{2}\widehat{DOB} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}.$$

Se AC divide o ângulo $\widehat{BAD}$, o argumento é inteiramente análogo. $\square$

Corolário 10.1.7. Ângulos inscritos que subentendem um mesmo arco são congruentes.

Demonstração. Basta observar que a cada ângulo inscrito, nesta situação, está associado ao mesmo ângulo central. $\square$

Corolário 10.1.8. Sejam AB e CD cordas distintas de uma mesma circunferência que se interceptam num ponto P. Então,

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}.$$

Demonstração. Considere os triângulos BPD e APC. Temos:

$$\widehat{BPD} \equiv \widehat{APC} \quad \text{e} \quad \widehat{CAP} \equiv \widehat{BDP}.$$

Assim, BPD e CAP são triângulos semelhantes logo,

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{BP}},$$

ou seja, $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$, como queríamos. $\square$

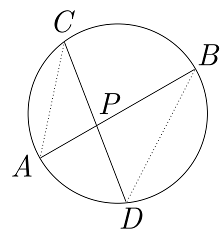

Figura 10.8: Corolário 10.1.8.

10.2 Polígonos inscritos numa circunferência

Definição 10.2.1. Dizemos que um polígono está *inscrito* numa circunferência se os seus vértices pertencem à circunferência. Neste caso, dizemos que a circunferência é *circunscrita* ao polígono.

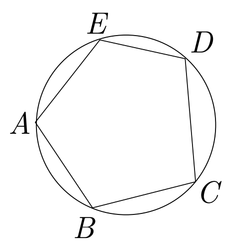

Figura 10.9: Polígono $ABCDE$ inscrito numa circunferência.

Proposição 10.2.2. Todo triângulo está inscrito em uma única circunferência.

Demonstração. Dado um triângulo ABC, denotemos por r e s as mediatrizes de AB e AC, respectivamente, e seja O o ponto de interseção de r e s. Como todo ponto de r é equidistante de A e B, e todo ponto de s é equidistante de A e C (cf. Exercício 4.8), o ponto O é equidistante de A, B e C. Considere, então, a circunferência $C(O; r)$, onde $r = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Seja, agora, outra circunferência $C(O'; r')$ circunscrita ao triângulo ABC. Sejam M e N os pontos médios de AB e AC, respectivamente. Pela Proposição 10.1.2, o raio que passa por M é perpendicular a AB e, assim, O' pertence à mediatriz de AB. Da mesma forma, O' pertence à mediatriz de AC. Isso implica que $O' \equiv O$. Além disso,

$$r' = \overline{O'A} = \overline{OA} = r.$$

Portanto, as circunferências $C(O; r)$ e $C(O'; r')$ são coincidentes. $\square$

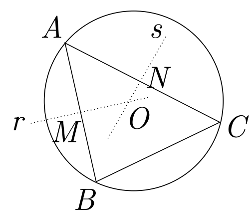

Figura 10.10: Triângulo ABC inscrito numa circunferência.

A Proposição 10.2.2 pode ser enunciada da seguinte forma equivalente:

Proposição 10.2.3. Três pontos não colineares determinam uma única circunferência.

O centro O da circunferência circunscrita a um dado triângulo ABC, dado pela Proposição 10.2.2, tem a propriedade de ser equidistante de A, B e C. Assim, pelo Exercício 4.8, o ponto O pertence às três mediatrizes do triângulo ABC. Podemos então enunciar o seguinte corolário da Proposição 10.2.2.

Corolário 10.2.4. As mediatrizes de um triângulo interceptam-se num único ponto, e este é chamado o *circuncentro* do triângulo.

Proposição 10.2.5. Um quadrilátero pode ser inscrito em uma circunferência se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares.

Demonstração. Seja $ABCD$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência. Os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ subentendem os dois arcos determinados por B e D.

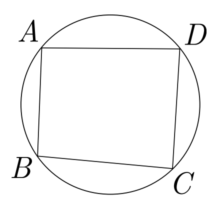

Figura 10.11: Quadrilátero $ABCD$ inscrito numa circunferência.

Como estes dois arcos somam 360^o, a soma dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ é 180^o, isto é, são suplementares. Reciprocamente, suponha que um quadrilátero $ABCD$ tem um par de ângulos opostos suplementares. Pelos vértices A, B e C, considere a circunferência determinada por esses pontos. Em relação ao ponto D, temos três possibilidades: ele está sobre, fora ou dentro da circunferência. Suponha que D esteja fora da circunferência. Considere o segmento

BD e seja D o ponto de interseção de BD com a circunferência. O quadrilátero $ABCE$ está inscrito na circunferência logo, seus ângulos opostos são suplementares. Em particular, tem-se

$$\widehat{ABC} + \widehat{AEC} = 180^o.$$

Por hipótese, temos

$$\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^o.$$

Assim, $\widehat{ADC} = \widehat{AEC}$. Por outro lado, temos

$$\widehat{AEB} > \widehat{ADB} \quad \text{e} \quad \widehat{BEC} > \widehat{BDC},$$

pois são ângulos externos. Assim,

$$\widehat{AEC} = \widehat{AEB} + \widehat{BEC} > \widehat{ADB} + \widehat{BDC} = \widehat{ADC},$$

o que é uma contradição. Portanto, D não pode estar fora da circunferência. Analogamente se prova que D não pode estar dentro da circunferência. □

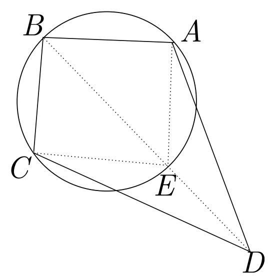

Figura 10.12: Quadrilátero $ABCD$.

Proposição 10.2.6. Todo polígono regular está inscrito em uma circunferência.

Demonstração. Dado um polígono regular $A_1A_2\ldots A_n$, considere a circunferência que passa pelos pontos A_1, A_2 e A_3. Seja O o centro da circunferência. Como $\overline{OA_2} = \overline{OA_3}$, o triângulo OA_2A_3 é isósceles logo, $\widehat{OA_2A_3} \equiv \widehat{OA_3A_2}$. Como o polígono é regular, tem-se

$$\widehat{A_1A_2A_3} \equiv \widehat{A_2A_3A_4}.$$

Assim, $\widehat{A_1A_2O} \equiv \widehat{OA_3A_4}$. Além disso, como

$$A_1A_2 \equiv A_3A_4 \quad \text{e} \quad OA_2 \equiv OA_3,$$

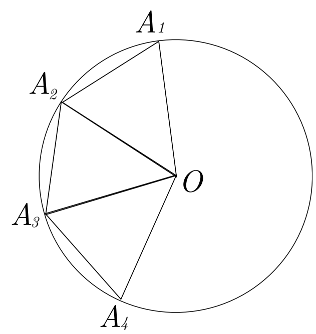

Figura 10.13: Polígono regular $A_1A_2\ldots A_n$ inscrito numa circunferência.

os triângulos OA_1A_2 e OA_3A_4 são congruentes. Em particular, $OA_4 \equiv OA_1$, isto é, A_4 também é um ponto da circunferência. Analogamente se prova que $A_5, A_6, \ldots, A_n$ pertencem à circunferência. □

Definição 10.2.7. Uma circunferência está *inscrita* em um polígono se todos os lados do polígono são tangentes à circunferência. Neste caso, dizemos que o polígono *circunscreve* a circunferência.

Proposição 10.2.8. Todo triângulo possuiu uma única circunferência inscrita.

Demonstração. Dado um triângulo ABC, trace as bissetrizes dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, que se interceptam em um ponto O. Denotemos por E, F, G os pés das perpendiculares baixadas de O aos lados AB, AC e BC, respectivamente. Provemos que $OE \equiv OF \equiv OG$. De fato, pelo caso ALA, os triângulos OAE e OAF são congruentes, logo $OE \equiv OF$. Analogamente, tem-se $OF \equiv OG$. Assim, pela Proposição 10.2.3, O é o centro de uma circunferência que passa por E, F e G. Como os lados do triângulo ABC são perpendiculares aos raios OE, OF e OG, eles são tangentes à circunferência. Portanto, a circunferência de centro O e raio $r = \overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OG}$ está inscrita no triângulo. Quanto à unicidade, seja $C(O'; r')$ outra circunferência inscrita no triângulo ABC. Denotemos por E', F', G' os pés das perpendiculares de O' baixadas aos lados AB, AC e BC, respectivamente. Como os triângulos retângulos $O'E'A$ e $O'F'A$ possuem hipotenusa comum e um par de catetos congruentes, eles são congruentes. Disso decorre que $O'A$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$. Analogamente se prova que $O'B$ é a bissetriz de $\widehat{B}$. Assim, O' é o ponto de interseção das bissetrizes de $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ logo, deve-se ter $O' \equiv O$. Devido à unicidade da perpendicular a uma reta passando por um ponto, tem-se $E' \equiv E$, $F' \equiv F$

e $G' \equiv G$. Portanto, as circunferências $C(O';r')$ e $C(O;r)$ têm o mesmo centro e raios iguais logo, são coincidentes. $\square$

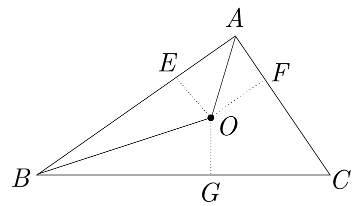

Figura 10.14: Triângulo ABC inscrito numa circunferência.

Analogamente ao Corolário 10.2.4, temos o seguinte

Corolário 10.2.9. As bissetrizes de um triângulo interceptam-se num único ponto, e este é chamado o *incentro* do triângulo.

Demonstração. Dado um triângulo ABC, denotemos por O o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$. Queremos provar que OC é a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$. Sejam E, F, G os pés das perpendiculares de O baixadas aos lados AB, AC e BC, respectivamente. Como vimos na prova da Proposição 10.2.8, temos que $OE \equiv OF \equiv OG$. Assim, os triângulos retângulos OFC e OGC têm a hipotenusa comum e um par de catetos congruentes, logo são congruentes (cf. Figura 10.14). Disso decorre, em particular, que OC é a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$. $\square$

10.3 Potência de um ponto em relação a uma circunferência

Nesta seção discutiremos o conceito de potência de um ponto em relação a uma circunferência, e veremos que através deste conceito podemos obter aplicações em problemas que tratam de relações métricas entre secantes e tangentes a uma dada circunferência.

Definição 10.3.1. Dados uma circunferência $C(O;r)$ e um ponto P, definimos a *potência* de P em relação a $C(O;r)$, denotada por $\mathrm{Pot}(P)$, pondo

$$\mathrm{Pot}(P) = d^2 - r^2,$$

onde $d = \overline{OP}$.

Decorre da definição que se P é um ponto exterior à circunferência, sua potência é um número positivo; se $P \in C(O;r)$, sua potência é zero e, se P é interior à circunferência, sua potência é negativa.

Se P é um ponto exterior à circunferência $C(O;r)$ e se PT é tangente à circunferência em T, decorre diretamente da Definição 10.3.1 e do Teorema de Pitágoras que

$$\text{Pot}(P) = \overline{PT}^2.$$

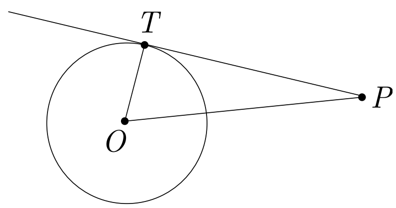

Figura 10.15: Tangente a $C(O;r)$ passando por P.

Proposição 10.3.2. Dados uma circunferência $C(O;r)$ e um ponto P, considere uma reta que passa por P e intercepta $C(O;r)$ em dois pontos distintos, A e B. Então, o produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ é constante.

Demonstração. Denotando por M o ponto médio da corda AB, façamos $m = \overline{MA} = \overline{MB}$ e $d = \overline{OP}$. Se $P \in C(O;r)$, então $A \equiv P$ ou $B \equiv P$ e, neste caso, tem-se $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 0$. Se P é exterior à circunferência e lembrando que OM é perpendicular à corda AB (cf. Proposição 10.1.2), temos:

$$\begin{aligned}
\overline{PA} \cdot \overline{PB} &= (\overline{PM} - m)(\overline{PM} + m) = \overline{PM}^2 - m^2 \\
&= \overline{PM}^2 + \overline{OM}^2 - \overline{OM}^2 - m^2 \\
&= d^2 - r^2 \\
&= \text{Pot}(P).
\end{aligned}$$

Se P é interior à circunferência, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{PA} \cdot \overline{PB} &= (m - \overline{PM})(m + \overline{PM}) = -(\overline{PM}^2 - m^2) \\
&= -(\overline{PM}^2 + \overline{OM}^2 - \overline{OM}^2 - m^2) \\
&= -(d^2 - r^2) \\
&= -\text{Pot}(P),
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Observação 10.3.3. O fato que o produto $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ é constante para qualquer secante passando por P já era conhecido pelos gregos. Para maiores detalhes, cf. Proposições 35 e 36 do livro III dos Elementos [10]. O termo *potência* foi utilizado pela primeira vez por Jacob Steiner (1796 – 1863), matemático suíço que deu contribuições relavantes ao desenvolvimento da Geometria.

O conjunto dos pontos que possuem potência igual à potência de um ponto P, em relação a uma circunferência $C(O;r)$, é outra circunferência, contendo P, e concêntrica com $C(O;r)$. Um problema interessante é investigar o conjunto dos pontos que possuem mesma potência em relação a duas circunferências dadas (cf. Exercício 10.14).

Finalizaremos esta seção provando que em qualquer triângulo, o raio da circunferência circunscrita não é menor que o dobro do raio da circunferência inscrita. Esse resultado decorre diretamente da fórmula que dá a distância entre o incentro e o circuncentro de um triângulo.

Proposição 10.3.4. Dado um triângulo XYZ, a distância d entre o incentro I e o circuncentro C é dada por

$$d = \sqrt{R^2 - 2rR}, \tag{10.1}$$

onde r e R denotam os raios das circunferências inscrita e circunscrita, respectivamente, ao triângulo XYZ.

Demonstração. Como na Figura 10.16, considere as bissetrizes XD, YI dos ângulos $\widehat{X}$ e $\widehat{Y}$, respectivamente, o diâmetro DE à circunferência circunscrita e F o pé da perpendicular de I a XZ. Como os ângulos $\widehat{DXZ}$ e $\widehat{DYZ}$ subentendem o mesmo arco, temos

$$\widehat{DYC} \equiv \widehat{DXZ} \equiv \widehat{DXY}.$$

Assim, como YI é bissetriz de $\widehat{Y}$, temos:

$$\widehat{DYI} = \widehat{DYZ} + \widehat{ZYI} = \widehat{YXD} + \widehat{XYI} = \widehat{DIY},$$

ou seja, o triângulo DYI é isósceles, logo

$$DY \equiv DI. \tag{10.2}$$

Por outro lado, denotemos por M o ponto de interseção de YZ e DE. Como D é ponto médio do arco YZ e DE é diâmetro, DM é perpendicular a YZ. Assim, os triângulos YDM e XIF são semelhantes. Disso decorre que

$$\frac{\overline{DM}}{DY} = \frac{\overline{IF}}{\overline{XI}} = \frac{r}{\overline{XI}}. \tag{10.3}$$

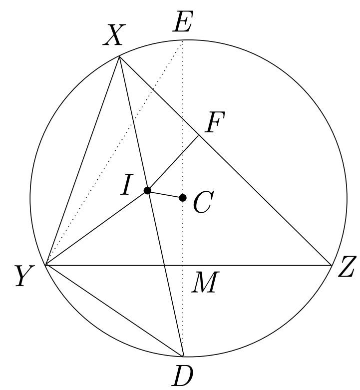

Figura 10.16: Distância entre o incentro e o circuncentro.

Como DE é diâmetro, o triângulo YDE é retângulo em $\widehat{Y}$. Além disso, como $\widehat{DYZ} \equiv \widehat{DEY}$, os triângulos YDE e MDY são semelhantes. Disso decorre que

$$\frac{\overline{DY}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DY}},$$

ou seja,

$$\overline{DY}^2 = 2R\overline{DM}.$$

Assim, usando (10.2) e (10.3), temos:

$$\overline{DI} = 2R\frac{\overline{DM}}{\overline{DY}} = 2R\frac{r}{\overline{XI}}.$$

Portanto,

$$\overline{DI} \cdot \overline{XI} = 2rR.$$

Fazendo $d = \overline{IC}$ e calculando a potência do ponto I em relação à circunferência circunscrita $C(O; R)$, obtemos:

$$\mathrm{Pot}(I) = d^2 - R^2 = -\overline{DI} \cdot \overline{XI} = -2rR,$$

ou seja,

$$d = \sqrt{R^2 - 2rR},$$

como queríamos. □

10.4 Semelhança no círculo

No Capítulo 9 definimos o círculo de centro O e raio r como sendo o conjunto de todos os pontos do plano que estão a uma distância $\leq r$ do ponto O. Nosso objetivo agora é estabalecer uma relação entre área e semelhança no círculo.

Lema 10.4.1. Quaisquer dois círculos, de mesmo raio, são figuras congruentes.

Demonstração. Dados dois círculos $C(O;r)$ e $C(O';r)$, de raios congruentes, considere a reta OO'. Esta reta determina os diâmetros AB e CD nos círculos $C(O;r)$ e $C(O';r)$, respectivamente, tais que B está entre A e C, e C está entre B e D. Definimos uma aplicação $\varphi : C(O;r) \to C(O';r)$ do seguinte modo. Para cada ponto X no segmento AB, seja $X' = \varphi(X)$ o ponto no segmento CD tal que $CX' \equiv AX$. Em particular, tem-se $\varphi(O) = O'$. Qualquer outro ponto $X \in C(O;r)$, não pertencente ao diâmetro AB, está em um dos semi-planos determinados pela reta OO'. Consideremos, então, o ponto $X' = \varphi(X) \in C(O';r)$, neste mesmo semi-plano, de modo que $O'X'$ e OX sejam congruentes e paralelos. Disso decorre, em particular, que $OXX'O'$ é um paralelogramo. Se Y é outro ponto do círculo $C(O;r)$, não pertencente à reta OX, obtemos o triângulo OXY que, pela definição de φ, é congruente ao triângulo $O'X'Y'$. Tem-se, assim, que $X'Y' \equiv XY$. Se $Y \in C(O;r)$ está sobre a reta OX então, claramente, tem-se $X'Y' \equiv XY$. Portanto, φ é uma isometria entre os círculos $C(O;r)$ e $C(O';r)$, como queríamos. □

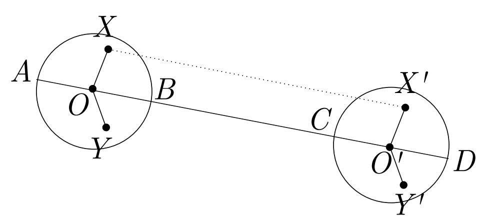

Figura 10.17: Isometria entre os círculos $C(O;r)$ e $C(O';r)$.

Proposição 10.4.2. Quaisquer dois círculos são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios.

Demonstração. Em virtude do Lema 10.4.1, podemos supor que os círculos $C(O;a)$ e $C(O';a')$ sejam concêntricos, i.e., têm o mesmo centro $O \equiv O'$. A homotetia φ de centro O e razão $r = a'/a$ transforma cada segmento OX, de medida a, no segmento OX', de medida a', sobre a mesma reta. Portanto, essa homotetia define uma semelhança entre $C(O; a)$ e $C(O; a')$. □

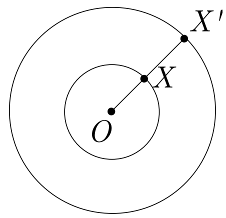

Figura 10.18

Da fórmula obtida para a área de um retângulo (cf. Proposição 8.2.1), segue que se multiplicarmos a base e a altura de um retângulo pelo mesmo número positivo r, a área desse retângulo fica multiplicada por r^2. O teorema seguinte usa este caso particular para provar que essa é uma situação geral.

Teorema 10.4.3. *A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração. Seja $\varphi : F \to F'$ uma semelhança de razão r entre duas figuras geométricas F e F'. Provemos que a área de F' é igual a r^2 vezes a área de F. Se F e F' são polígonos retangulares, o teorema é verdadeiro. Assim, todo polígono retangular P, contido em F, é transformado por φ num polígono retangular P', contido em F', tal que a área de P' é igual a r^2 vezes a área de P. Reciprocamente, todo polígono retangular Q', contido em F', é transformado por φ^{-1} num polígono retangular Q cuja área é $1/r^2$ vezes a área de Q', logo a área de Q' é r^2 vezes a área de Q. Assim, a área de F' é o número real cujas aproximações por falta são r^2 vezes as aproximações por falta da área de F. Portanto, tem-se

$$\text{Área}(F') = r^2 \cdot \text{Área}(F),$$

como queríamos. □

Da Proposição 10.4.2 e do Teorema 10.4.3 segue que a área de um círculo de raio r é r^2 vezes a área do círculo de raio 1. Denotando, como de costume, com a letra grega π a área do círculo de raio 1, segue que a área A de um círculo de raio r é dada pela fórmula

$$A = \pi \cdot r^2,$$

onde o número π é, por definição, a área de um círculo de raio 1.

O teorema seguinte permite-nos caracterizar a área de um círculo como o limite das áreas dos polígonos regulares nele inscritos (ou circunscritos) quando o número de lados cresce indefinidamente.

Teorema 10.4.4. *A área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares nele inscritos e cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos regulares a ele circunscritos.*

Demonstração. Denotemos por P_n e Q_n os polígonos regulares de n lados, respectivamente inscrito no, e circunscrito ao, círculo $C(O;r)$. Temos que

$$\text{Área}(P_n) < \pi r^2 < \text{Área}(Q_n).$$

Provemos que, tomando n suficientemente grande, as áreas de P_n e Q_n podem tornar-se tão próximas de πr^2 quanto se queira. Ou seja, dados $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, com $\alpha < \pi r^2 < \beta$, provaremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha < \text{Área}(P_n) < \pi r^2 < \text{Área}(Q_n) < \beta.$$

De fato, observe que o raio r é a hipotenusa de um triângulo retângulo, cujos catetos medem $l_n/2$ e a_n, onde l_n denota a medida do lado de P_n e a_n denota o apótema de P_n. Assim,

$$r < a_n + l_n/2.$$

Dado um número real $\alpha > 0$, com $\alpha < \pi r^2$, seja $s = \sqrt{\alpha/\pi}$. Então, $\alpha = \pi s^2$

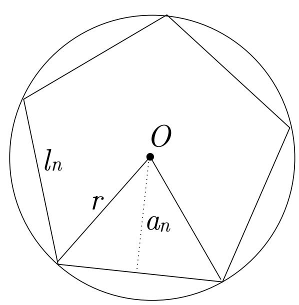

Figura 10.19: Polígono regular P_n inscrito na circunferência $C(O;r)$.

e $s < r$. Assim, o círculo $C(O;s)$ tem área α e está contido em $C(O;r)$. Tomemos n suficientemente grande tal que $l_n/2 < r - s$. Assim,

$$r < a_n + l_n/2 < a_n + r - s,$$

donde $a_n > s$. De $s < a_n$ resulta que o círculo $C(O;s)$ está contido no polígono P_n e, portanto,

$$\alpha = \text{Área}(C(O;s))) < \text{Área}(P_n).$$

Isto completa a prova de que as áreas dos polígonos regulares inscritos em $C(O;r)$ são aproximações por falta da área de $C(O;r)$. Analogamente se prova para as áreas dos polígonos regulares circunscritos Q_n. Para maiores detalhes, cf. Teorema 3.7 de [13]. □

A fim de estabelecer uma fórmula para o comprimento da circunferência, denotaremos por ∂P_n (respectivamente ∂Q_n) o perímetro do polígono regular de n lados, inscrito (respectivamente circunscrito) na circunferência $C(O;r)$.

Definição 10.4.5. O *comprimento* da circunferência $C(O;r)$ é o número real ∂C cujas aproximações por falta são os perímetros ∂P_n e cujas aproximações por excesso são os perímetros ∂Q_n.

Em virtude da Definição 10.4.5, tem-se

$$\partial P_n < \partial C < \partial Q_n,$$

para todo natural $n \geq 3$.

Teorema 10.4.6. *O comprimento da circunferência $C(O;r)$ é igual a $2\pi r$.*

Demonstração. Provemos inicialmente que ∂C não pode ser menor do que $2\pi r$. De fato, se fosse $\partial C < 2\pi r$, teríamos $(\partial C/2) \cdot r < \pi r^2$. Pelo Teorema 10.4.4, podemos obter um polígono regular P_n, de n lados, inscrito em $C(O;r)$ tal que $(\partial C/2) \cdot r < \text{Área}(P_n)$. A área do polígono P_n é a soma das áreas dos triângulos que o compõem, os quais têm o centro O como vértice e os lados de P_n como base (cf. Figura 10.19). Assim, essa área é igual a $\partial P_n \cdot a_n/2$, onde a_n é o apótema de P_n (altura dos triângulos). Assim,

$$\frac{\partial C \cdot r}{2} < \frac{\partial P_n \cdot a_n}{2}$$

e daí, $\partial C < \partial P_n(a_n/r)$. Como $a_n/r < 1$, concluimos que $\partial C < \partial P_n$, o que é uma contradição. Portanto, não se pode ter $\partial C < 2\pi r$. Analogamente, usando polígonos regulares circunscritos, concluiremos que não se pode ter $\partial C > 2\pi r$. □

Observação 10.4.7. O número π, definido inicialmente como a área de um círculo de raio 1, satisfaz também a igualdade $\pi = \partial C/2r$, ou seja, é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. O primeiro a designar a razão $\partial C/2r$ por π foi W. Jones (1675 – 1749) sendo que este só passou a símbolo standard após sua utilização por Euler. E foi só em 1767 que J. H. Lambert (1728 – 1777) demonstrou que π não é racional.

10.5 Exercícios

1. Dado uma circunferência $C(O; r)$, ao conjunto dos pontos P tais que $\overline{OP} < r$ chamamos de *interior* da circunferência; ao conjunto dos pontos P tais que $\overline{OP} > r$ chamamos de *exterior* da circunferência. Prove que o segmento de reta, ligando um ponto do interior com um ponto do exterior da circunferência, intercepta a circunferência num único ponto.

2. Dado uma circunferência $C(O; r)$, prove que a distância entre quaisquer dois pontos do interior da circunferência é menor do que $2r$.

3. Considere duas circunferências de raio r que não se interceptam. Prove que a medida do segmento ligando seus centros é maior do que $2r$.

4. Duas circunferências $C(O; r)$ e $C(O'; r')$ se interceptam em dois pontos. O que podemos afirmar sobre a medida do segmento OO'?

5. Considere dois pontos A e B de uma circunferência $C(O; r)$. O que podemos afirmar sobre o triângulo OAB?

6. Dizemos que duas circunferências são *tangentes* se são tangentes a uma mesma reta em um mesmo ponto; este ponto é chamado de *ponto de tangência.* Prove que, quando duas circunferências são tangentes, os dois centros e o ponto de tangência são colineares.

7. Prove que a mediatriz de uma corda passa pelo centro da circunferência.

8. Em um triângulo equilátero, prove que as circunferências inscrita e circunscrita têm o mesmo centro.

9. Em uma circunferência, são traçadas duas cordas paralelas à partir das extremidades de um diâmetro. Prove que as duas cordas são congruentes.

10. Na Figura 10.20, PR é tangente à circunferência no ponto P e $PQ \equiv OP$. Prove que $OQ \equiv QR$.

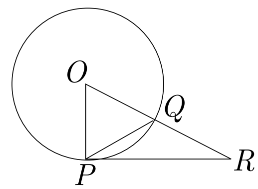

Figura 10.20

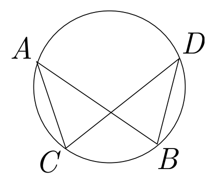

Figura 10.21

11. Na Figura 10.21, tem-se $AC \equiv BD$. Prove que $AB \equiv CD$ e que AD é paralelo a BC.

12. Prove que todo paralelogramo inscrito numa circunferência é retângulo.

13. Na Figura 10.22, P é um ponto pertencente ao exterior da circunferência. Prove que $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$.

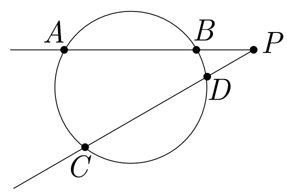

Figura 10.22

14. Considere um ponto P que tenha mesma potência em relação a duas circunferências $C(O_1; r_1)$ e $C(O_2; r_2)$, ou seja, $\overline{O_1P}^2 - r_1^2 = \overline{O_2P}^2 - r_2^2$. Prove que o conjunto dos pontos que possuem mesma potência que P em relação às duas cinrcunferências é a reta que passa por P e é perpendicular a O_1O_2. Analise este problema para o caso de três circunferências (cf. [16]).

15. Sejam PT e PU duas tangentes, contendo P, à duas circunferências concêntricas, com P pertencente à circunferência menor. Se PT intercepta a circunferência maior num ponto Q, prove que $\overline{PT}^2 - \overline{PU}^2 = \overline{QT}^2$.

16. Na Figura 10.23, as retas são tangentes comuns às duas circunferências. Prove que m e n se interceptam na reta que passa pelo centro das circunferências. Além disso, se os raios das circunferências são diferentes, prove que as retas r e s também se interceptam na reta dos centros.

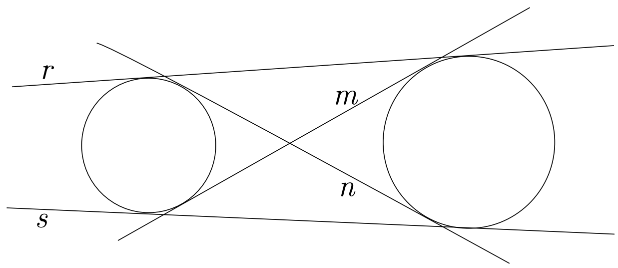

Figura 10.23

17. Dado um triângulo retângulo ABC, constrói-se um semicírculo sobre cada um de seus lados, tendo os lados como diâmetros. Prove que a soma das áreas dos semicírculos, situados sobre os catetos, é igual a área do semicírculo situado sobre a hipotenusa. Prove que, se ao invés de construirmos semicírculos, construirmos triângulos equiláteros, obtemos o mesmo resultado. O resultado continua válido se construirmos polígonos regulares?

18 (Lúnulas de Hipócrates)**.** Uma *lúnula* é uma figura geométrica limitada por dois arcos de circunferência de raios distintos. Dado um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto em C, sejam O, P, Q os pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Com centro em O, traça-se um semicírculo de raio $\overline{OA}$. Com centro em P, traça-se um semicírculo de raio $\overline{PB}$, e com centro em Q traça-se um semicírculo de raio $\overline{AQ}$. Essa construção delimita duas lúnulas, L_1 e L_2, como na Figura 10.24. Prove que a soma das áreas das lúnulas é igual a área do triângulo ABC.

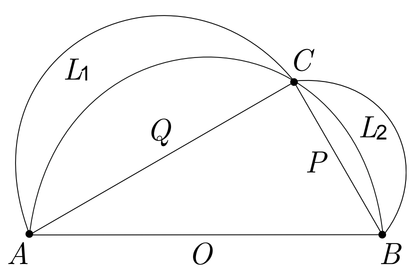

Figura 10.24

19. A região limitada por dois raios e um arco de uma circunferência é chamada de *setor circular*. Prove que a área de um setor circular é $\frac{1}{2}rs$, onde r é o raio da circunferência e s é a medida do arco.

20 (Teorema da borboleta)**.** Dado uma circunferência $C(O;r)$, considere uma corda PQ de $C(O;r)$ e seja M o ponto médio de PQ. Considere também duas cordas AB e CD de $C(O;r)$ passando por M. Se AD e BC interceptam PQ em X e Y, respectivamente, prove que M é também ponto médio do segmento XY.

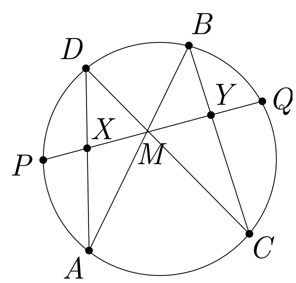

Figura 10.25: Teorema da borboleta.

Referências Bibliográficas

[1] A. Aaboe, *Episódios da História Antiga da Matemática*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

[2] G. Ávila, *Euclides, Geometria e Fundamentos*, Revista do Professor de Matemática, SBM, **45**, 2001.

[3] J. L. M. Barbosa, *Geometria Euclidiana Plana*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[4] M. P. do Carmo, *Geometrias não-Euclidianas*, Matemática Universitária, SBM, **6**, 25 – 48, 1987.

[5] P. C. P. Carvalho, *Introdução à Geometria Espacial*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

[6] H. S. M. Coxeter, *Geometry Revisited*, New Mathematical Livrary, The L. W. Singer Company, 1967.

[7] M. Dalcin, *A demonstração feita por Heron*, Revista do Professor de Matemática, **36**, 3 – 5, 1998.

[8] C. Gorodski, *Um panorama histórico da Geometria*, Matemática Universitária, SBM, **44**, 14 – 29, 2008.

[9] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol. 1, Dover Publications, 1956.

[10] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol. 2, Dover Publications, 1956.

[11] D. Hilbert, *The Foundations of Geometry*, The Open Court Publishing Company, 1950.

[12] E. L. Lima, *Isometrias*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

[13] E. L. Lima, *Medida e Forma em Geometria*, Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

[14] A. Pogorelov, *Geometry*, Mir Publishers, 1987.

[15] D. J. Struik, *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications, 1987.

[16] E. Wagner, *Potência de um ponto em relação a uma circunferência*, Revista do Professor de Matemática, **45**, 29 – 34, 2001.