جامعة دمشق

كلية العلوم

قسم الرياضيات

دراسة حول جبور لي وتمثيلاتها

رسالة نالت درجة الماجستير في الرياضيات بمرتبة شرف

إعداد

ريتا عدنان سعيد

إشراف

د.إيلي قدسي

أستاذ مساعد في قسم الرياضيات

كلية العلوم

٢٠٠٧-٢٠٠٨

All Rights Reserved - Library of University of Jordan - Center of Thesis Deposit

المقدمة

١- لمحة تاريخية

تُنسب نظرية لي إلى النرويجي Marius Sophus Lie (١٨٤٢-١٨٩٩) الذي وضع أسس نظرية لي حيث عرَّف جبور لي البسيطة والقابلة للحل ومعدومة القوى وأثبت قابلية الاختزال المثلثي لجبور لي القابلة للحل .

ويعود الفضل لـ Wilhelm Killing (ألمانيا ١٨٤٧-١٩٢٣) في إدخال مفهوم Radical وهو أكبر مثالي قابل للحل في جبر لي حيث أطلق تسمية جبر لي نصف بسيط على كل جبر لي G يحقق $Rad(G)=\{0\}$ ، وأثبت أن كل جبر لي بسيط يكون نصف بسيط . بالإضافة لذلك برهن أنَّ الشرط اللازم كي يكون جبر لي G معدوم القوى هو أن تكون جميع التطبيقات $ad_x \ (x \in G)$ معدومة القوى .

كما قام Elie Cartan (فرنسا ١٨٦٩-١٩٥١) بتعريف صيغة Killing، وقدَّم معيارين أساسيين لاختبار جبور لي القابلة للحل ونصف البسيطة و طرح فكرة تصنيف جبور لي نصف البسيطة حيث قام ولده Henri Cartan (فرنسا ١٩٠٤) بتصنيف هذه الجبور .

بيَّن Friedrich Engel (ألمانيا ١٨٦١-١٩٤١) أثناء دراسته لجبور لي أن الشرط الكافي ليكون جبر لي معدوم القوى هو أن تكون جميع تطبيقات الاشتقاق الداخلية المعرفة عليه معدومة القوى. بالإضافة لذلك ، يعود له الفضل في تجميع أعمال Lie وأفكاره في سبعة مجلدات تم نشر ستة منها بين عامي (١٩٢٢-١٩٣٧) بينما تأخر نشر المجلد السابع حتى عام ١٩٦٠ .

كما تجدر الإشارة إلى العمل العظيم الذي قام به Eugene Dynkin (روسيا ، ١٩٢٤) الذي ابتكر مخططات بيانية نسبت إليه (مخططات دينكن) والتي سهلت إلى حد كبير عملية تصنيف جبور لي البسيطة .

لقد كانت جميع الدراسات السابقة على جبور لي معرفة على الحقلين $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ و أول من بدأ بمحاولات دراسة جبور لي على حقول مختلفة هو Nathan Jacobson (بولندا ١٩١٠-١٩٩٩)

All Rights Reserved - Library of University of Jordan - Center of Thesis Deposit

حيث أثبت أن معظم النتائج التي تم الحصول عليها في نظرية لي تبقى صحيحة علـــى أي حقـــل مميزه صفر.

في بداية السبعينات من القرن الماضي تحرك العلماء لدراسة جبور لي خوارزمياً ، حيث تمكـــن W.A.de Graaf من تصنيف جبور لي القابلة للحل[19] ، كما تمكن C.Schneider من تصنيف جبور لي معدومة القوى[4] .

٢-مخطط الرسالة

نقدِّم في الفصل الأول مفهوم جبور لي منتهية البعد العقدية ونستعرض مبرهنتـــي Lie و Engel والنتائج الأساسية لهما ، كما نتطرق إلى صيغة Killing التي تعد اللبنة الأساسية فـــي معيـــاري كارتان ذوي الأهمية الكبيرة في نظرية لي ، وفي نهاية الفصل نورد مفهوم مودولات جبـــر لـــي ونبين وجود تكافؤ بين مفهومي المودولات وتمثيلات جبور لي .

في الفصل الثاني ، نقدِّم الطرق المختلفة لتحليل جبر لي وذلك بغية الوصول إلى تحليل كارتـــان لجبر لي نصف البسيط واستعراض خواصه وفقاً لتمثيلات جبر لي $SL(2,\square)$.

نخصِّص الفصل الثالث لجبر لي G نصف البسيط حيث نقوم ببناء فضاء إقليدي يحـــوي جميـــع جذور G، ونعرِّف مخطط دينكن الموافق لمجموعة الجذور الأساسية لـــ G . والجوهري في هذا الفصل هو إثبات أنَّ G بسيط إذا وفقط إذا كان مخطط دينكن مترابطاً ، وهذا يقودنا إلى تصنيف جبور لي البسيطة .

في الفصل الرابع عرضنا مفهومي الجبر المغلف الشامل لجبر لي ومودولات فيرمـــا واســـتفدنا منهما في تصنيف المودولات غير الخزولة لجبر لي نصف البسيط .

يُعدُّ الفصل الخامس تطبيقاً عملياً على ما جاء في الفصول السابقة من أفكار نظرية ، حيث قدمنا الطريقة التي وضعها K.Eradman و M.J.Wildon عام ٢٠٠٦ لاختبار جبور لي الخطية البسيطة التي تحقق شروط تمهيدية الاختبار وقمنا بتطبيق هذه الطريقة مباشرة على العائلات الأربعة لجبور لي الكلاسيكية والتي تعد من أهم جبور لي الخطية . وبما أن هذه الطريقة تفشل في حال لم تحقق جبور لي الخطية الشروط الثلاثة لتمهيدية الاختبار فقد برزت أهمية وجود خوارزمية عامة لاختبار جبور لي البسيطة.

All Rights Reserved - Library of University of Jordan - Center of Thesis Deposit

استعرضنا في الفصل الأخير المقالة التي تمت الموافقة على نشرها في مجلة جامعة دمشق للعلوم الأساسية بتاريخ ٢٠٠٨/٩/٢٢ والتي قدَّمنا فيها مفهوم العنصر المميز h_0 في جبر لي نصف البسيط G منته البعد (على حقل F مميزه معدوم) ، وبيَّنا أنَّ تحليل جبر لي نصف البسيط إلى فضاءات وزن H مطابق لتحليل G إلى الفضاءات الذاتية للمؤثر ad_{h_0} مما سمح لنا بإنشاء خوارزمية لاختبار جبور لي البسيطة . قمنا ببرمجة الخوارزمية السابقة لاختبار جبور لي الخطية البسيطة على حقل عددي عن طريق برنامج Mathematica٥,٠ حيث تمَّ تنفيذ هذه الخوارزمية على جبر لي الخطي نصف البسيط $SL(3,\mathbb{C})$.

All Rights Reserved - Library of University of Jordan - Center of Thesis Deposit

أهمية البحث والنتائج

يُعدُّ هذا البحث ركيزة أساسية لجميع الدراسات المتعلقة بجبور لي منتهية البعد، ونظراً للمكانة الهامة التي تحتلها جبور لي البسيطة في نظرية لي فقد كان لها الحيز الأكبر من دراستنا ، ومن أبرز ما قمنا به في هذا العمل:

١) دراسة تحليل وتصنيف جبور لي البسيطة بأسلوب حديث معتمدين على مراجع ودراسات حديثة ومستفيدين من تمثيلات هذه الجبور .

٢) إدخال مفهوم العنصر المميز h_0 في جبر لي نصف البسيط G منته البعد (على حقل F مميزه معدوم) وإثبات أنَّ تحليل جبر لي نصف البسيط إلى فضاءات وزن جبر كارتان H مطابق لتحليل جبر لي نصف البسيط إلى الفضاءات الذاتية للمؤثر ad_{h_0} .

٣) إنشاء خوارزمية لاختبار جبور لي البسيطة .

٤) برمجة الخوارزمية السابقة لاختبار جبور لي الخطية البسيطة على حقل عددي عن طريق برنامج Mathematica 5.0 حيث تمَّ تنفيذ هذه الخوارزمية مباشرة على جبر لي الخطي نصف البسيط $SL(3,\mathbb{Q})$.

لقد فتحت جبور لي الباب واسعاً أمام تطبيقات عديدة رياضية وفيزيائية (زمر لي ، ميكانيك هاميلتون ، حل المعادلات التفاضلية العادية) لذلك انكب العلماء اليوم على دراستها . ومن أبرز المواضيع التي تدرس حالياً في جبور لي نصف البسيطة " الأزواج معدومة القوى ، المثاليات الأولية ، الجبر المغلف ".

All Rights Reserved - Library of University of Jordan - Center of Thesis Deposit