Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 50

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 50.1. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Wie lautet das Ergebnis der Division mit Rest, wenn man ein Polynom P durch X^m teilt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 50.2. Schreibe das Polynom

$$X^3 + 2X^2 - 3X + 4$$

in der neuen Variablen $U = X + 2$.

Aufgabe 50.3. Bestimme die Hintereinanderschaltungen

$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$

für die Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

Aufgabe 50.4.*

(1) Berechne das Produkt
$$(2 - 3X + X^2) \cdot (-5 + 4X - 3X^2)$$
im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

(2) Berechne das Produkt
$$(2 - 3\sqrt{2} + \sqrt{2}^2) \cdot (-5 + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}^2)$$
in $\mathbb{R}$ auf zwei verschiedene Arten.

Aufgabe 50.5. a) Für welche reellen Polynome $P \in \mathbb{R}[X]$ ist die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}, 0, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0, +),\ x \longmapsto P(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

b) Für welche reellen Polynome $Q \in \mathbb{R}[X]$ ist allenfalls 0 eine Nullstelle und die zugehörige polynomiale Abbildung

$$(\mathbb{R}^\times, 1, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^\times, 1, \cdot),\ x \longmapsto Q(x),$$

ein Gruppenhomomorphismus?

Aufgabe 50.6. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ eine Polynomfunktion. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige durch Induktion über d, dass dann auch die durch

$$y_n := P(x_n)$$

definierte Folge konvergiert, und zwar gegen $P(x)$.

Aufgabe 50.7. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 50.8.*

Führe in $\mathbb{Z}/(5)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = X^3 + 4X^2 + 3X + 4$ und $T = 3X^2 + 2X + 1$ durch.

Aufgabe 50.9. Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ folgende Polynomdivision aus.

$$X^4 + 5X^2 + 3 \text{ durch } 2X^2 + X + 6 .$$

Aufgabe 50.10. Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 5X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X + 6$ und $T = 3X^2 + 6X + 4$ durch.

Aufgabe 50.11. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und seien $P, T \in K[X]$ Polynome. Zeige, dass es für die Division mit Rest „P durch T“ unerheblich ist, ob man sie in $K[X]$ oder in $L[X]$ durchführt.

Aufgabe 50.12. Vergleiche die Division mit Rest in $\mathbb{Z}$ und in $K[X]$ (K ein Körper).

Aufgabe 50.13.*

Zeige, dass

$$z = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}}$$

eine Nullstelle des Polynoms

$$X^3 + 3X + 2$$

ist.

Aufgabe 50.14.*

Bestimme die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der beiden Polynome

$$P = X^3 + 4X^2 - 7X + 1$$

und

$$Q = X^3 - 2X^2 + 5X + 3.$$

Aufgabe 50.15. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 50.16.*

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K und sei $P \in K[X]$ ein Polynom, das eine Zerlegung in Linearfaktoren besitze. Es sei T ein Teiler von P. Zeige, dass T ebenfalls eine Zerlegung in Linearfaktoren besitzt, wobei die Vielfachheit eines Linearfaktors $X - a$ in T durch seine Vielfachheit in P beschränkt ist.

Aufgabe 50.17.*

Es seien P und Q verschiedene normierte Polynome vom Grad d über einem Körper K. Wie viele Schnittpunkte besitzen die beiden Graphen maximal?

Aufgabe 50.18.*

Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(3) = 5\,.$$

Aufgabe 50.19. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(-1) = 1\,.$$

Aufgabe 50.20.*

(1) Bestimme ein Polynom P vom Grad ≤ 3 mit

$$\begin{aligned} P(-1) &= -4, \\ P(0) &= 2, \\ P(1) &= 2 \end{aligned}$$

und

$$P(2) = 3$$

(2) Bestimme ein normiertes Polynom Q vom Grad 3 mit

$$\begin{aligned} Q(0) &= 1, \\ Q(2) &= 3 \end{aligned}$$

und

$$Q(3) = 10.$$

(3) Bestimme die Schnittpunkte der Graphen zu P und zu Q.

Aufgabe 50.21. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung (also das Einsetzen eines Polynoms in ein weiteres) von zwei Polynomen wieder ein Polynom ist.

Aufgabe 50.22.*

Es seien

$$f, g, h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen.

a) Zeige die Gleichheit

$$(h \cdot g) \circ f \,=\, (h \circ f) \cdot (g \circ f)\,.$$

b) Zeige durch ein Beispiel, dass die Gleichheit

$$(h \circ g) \cdot f \,=\, (h \cdot f) \circ (g \cdot f)$$

nicht gelten muss.

Aufgabe 50.23. Es sei $K[X]$ der Polynomring über einem Körper K. Zeige, dass die Menge

$$\left\{ \frac{P}{Q} \mid P, Q \in K[X],\, Q \neq 0 \right\},$$

wobei zwei Brüche $\frac{P}{Q}$ und $\frac{P'}{Q'}$ genau dann als gleich gelten, wenn $PQ' = P'Q$ ist, mit einer geeigneten Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Den in der vorstehenden Aufgabe eingeführten Körper nennt man den *Körper der rationalen Funktionen*.

Aufgabe 50.24. Es sei K ein angeordneter Körper, $K[X]$ der Polynomring und

$$Q = K(X)$$

der Körper der rationalen Funktionen über K. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 49.8, dass man Q zu einem angeordneten Körper machen kann, der *nicht* archimedisch angeordnet ist.

Aufgabe 50.25. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

Aufgabe 50.26. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \text{ und } g(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4}\,.$$

Aufgabe 50.27. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und seien $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q(x) = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 50.28. (3 (1+2) Punkte)

(1) Berechne das Produkt

$$\left(1 - \frac{5}{3}X + \frac{1}{2}X^2\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{4}X + \frac{1}{3}X^2 - X^3\right)$$

im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$.

(2) Berechne das Produkt

$$\left(1 - \frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{5}^2\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{3}\sqrt{5}^2 - \sqrt{5}^3\right)$$

in $\mathbb{R}$ auf zwei verschiedene Arten.

Aufgabe 50.29. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 5X^4 - 6X^3 + \frac{3}{5}X^2 - \frac{1}{2}X + 5$ und $T = \frac{1}{7}X^2 + \frac{3}{7}X - 1$ durch.

Aufgabe 50.30. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 6X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2X + 5$ und $T = 5X^2 + 3X + 2$ durch.

Aufgabe 50.31. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X+1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \cdots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

Aufgabe 50.32. (4 Punkte)

Man finde ein Polynom f vom Grad ≤ 3, für welches

$$f(0) = -1,\ f(-1) = -3,\ f(1) = 7,\ f(2) = 21$$

gilt.