Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 24

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 24.1. Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen komplexer Zahlen.

AUFGABE 24.2. Zeige, dass bei einer Folge die Änderung von endlich vielen Folgengliedern weder die Konvergenz noch den Grenzwert ändert, und dass bei Reihen die Änderung von endlich vielen Reihengliedern zwar die Konvergenz nicht ändert, wohl aber die Summe.

AUFGABE 24.3. Es seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von komplexen Zahlen mit den Summen s und t. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = a_k + b_k$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.
(2) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_k = \lambda a_k$ konvergent mit der Summe λs.

AUFGABE 24.4. Zeige, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2}$$

divergieren.

AUFGABE 24.5. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergiert mit der Summe 1.

AUFGABE 24.6. Sei z eine komplexe Zahl, $z \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} .$$

Aufgabe 24.7. In einer Studenten-WG bereitet Studi 1 Kaffee zu, und füllt die Menge x_1 Kaffee in den Kaffeefilter. Dies sieht entsetzt Studi 2 und sagt: „willst Du, dass wir alle schon total wach werden?“ und nimmt die Kaffeemenge $x_2 < x_1$ wieder aus dem Filter heraus. Danach kommt Studi 3 und sagt: „Bin ich hier in einer Weicheier-WG gelandet?“ und kippt wieder eine Kaffeemenge $x_3 < x_2$ dazu. So geht es unendlich weiter, wobei sich Kaffeeausnehmer und Kaffeenachfüller abwechseln. Wie kann man charakterisieren, ob die Kaffeemenge im Filter konvergiert?

Aufgabe 24.8. Nachdem der Kaffee am Vortag für die Befürworter eines starken Kaffees zu schwach geworden ist, entwickeln sie eine neue Strategie: Sie wollen etwas früher aufstehen, so dass am Tagesanfang und zwischen je zwei Kaffeereduzierern immer zwei Kaffeeauffüller zum Zuge kommen. Dabei bleibt die interne Reihenfolge der beiden Lager als auch die hinzuzufügende bzw. wegzunehmende Kaffeemenge einer Person unverändert. Können sie mit dieser Strategie den Kaffee stärker machen?

Aufgabe 24.9. Zwei Personen, A und B, sitzen in der Kneipe. A will nach Hause gehen, aber B will noch ein Bier trinken. „Na gut, dann trinken wir eben noch ein Bier, das ist aber das allerletzte“ sagt A. Danach möchte B immer noch Bier, aber da das vorhergehende Bier definitiv das letzte war, einigen sie sich auf ein allerletztes halbes Bier. Danach trinken sie noch ein allerletztes Viertelbier, danach noch ein allerletztes Achtelbier, u.s.w. Wieviel Bier trinken sie insgesamt?

Aufgabe 24.10. Sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

Aufgabe 24.11. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, die gegen $x \in X$ konvergiere. Es sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in X, wobei die folgende Eigenschaft gilt: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $k, m \geq N$ die Beziehung

$$d(x_k, y_m) \leq \epsilon$$

gilt. Zeige, dass auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert.

Aufgabe 24.12. Es sei a_i , $i \in I$, eine summierbare Familie komplexer Zahlen und $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Zeige, dass auch die Teilfamilie a_i , $i \in J$, summierbar ist.

Aufgabe 24.13. Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Die Betragsfamilie $\mid a_i \mid$, $i \in I$, sei summierbar. Zeige, dass a_i , $i \in I$, summierbar ist.

Aufgabe 24.14. Man bastle einen *Rechenschieber*, der die Multiplikation von positiven reellen Zahlen ausführt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.15. (2 Punkte)

Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \,.$$

Aufgabe 24.16. (3 Punkte)

Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Eine *Ziffernfolge*, die durch

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\ i \leq k\,,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben ist, definiert eine reelle Reihe [1]

$$\sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i \,.$$

Zeige, dass eine solche Reihe gegen eine eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl konvergiert.

Aufgabe 24.17. (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

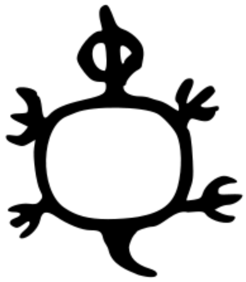
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

konvergiert.

Aufgabe 24.18. (4 Punkte)

Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1 ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.

[1] Hier läuft also der Index in die umgekehrte Richtung.



Berechne die Folgenglieder s_n, die zugehörigen Zeitpunkte t_n, sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkten Überholungsdaten.

Aufgabe 24.19. (4 Punkte)

Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Zeige, dass diese Familie genau dann summierbar ist, wenn die Familie

$$| a_E | = | \sum_{i \in E} a_i |, E \subseteq I,\ E \text{ endlich},$$

nach oben beschränkt ist.

Die letzte Aufgabe verwendet die folgende Definition.

Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann heißt f *stark kontrahierend*, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl $c < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$.

Aufgabe 24.20. (6 Punkte)

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und sei

$$f : T \longrightarrow T$$

eine stark kontrahierende Abbildung. Zeige, dass für jedes $x_0 \in T$ die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := f(x_n)$$

gegen ein (von der Folge unabhängiges) $x \in T$ konvergiert, und dass dieses x ein Fixpunkt von f ist.

Abbildungsverzeichnis