Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 22

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 22.1. Zeige, dass zwei Permutationen mit disjunktem Wirkungsbereich vertauschbar sind.

Aufgabe 22.2. Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung 6. Für welche $n \in \mathbb{N}$ lässt sich G als Untergruppe der Permutationsgruppe S_n realisieren?

Aufgabe 22.3. Es sei $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3. Zeige, dass F entweder eine oder drei reelle Nullstellen besitzt.

Aufgabe 22.4. Zeige, dass die alternierende Gruppe $A_n \subseteq S_n$ für $n \geq 3$ eine transitive Untergruppe ist.

Aufgabe 22.5. Es sei K ein Körper und sei $F \in K[X]$ ein separables irreduzibles Polynom. Es sei L der Zerfällungskörper von F, $G = \operatorname{Gal}(L|K)$ seine Galoisgruppe und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Nullstellen von F in L. Nach Lemma 13.1 ist G eine Untergruppe der Permutationsgruppe der Nullstellen. Zeige, dass es sich um eine transitive Untergruppe handelt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.6. (3 Punkte)

Sei M eine endliche Menge und sei σ eine Permutation auf M und $x \in M$. Zeige, dass $\{n \in \mathbb{Z} |\, \sigma^n(x) = x\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist. Den eindeutig bestimmten nichtnegativen Erzeuger dieser Untergruppe bezeichnen wir mit $\operatorname{ord}_x \sigma$. Zeige die Beziehung

$$\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{kgV}\{\operatorname{ord}_x \sigma |\, x \in M\}.$$

Aufgabe 22.7. (4 Punkte)

Es sei $n \geq 2$ keine Primzahl. Zeige, dass es eine echte Untergruppe $H \subset S_n$ gibt, die transitiv ist und die mindestens eine Transposition enthält.

Aufgabe 22.8. (3 Punkte)

Eliminiere in $X^5 + a^2X^4 - a$ (mit $a \in \mathbb{Q}$) durch eine geeignete Substitution (einen Variablenwechsel) den Term zum Grad 4.

Aufgabe 22.9. (3 Punkte)

Es sei $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3 und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von F. Zeige, dass die Differenzen $\alpha - \beta$ und $\beta - \gamma$ nicht beide aus $\mathbb{Q}$ sein können.

Aufgabe 22.10. (4 Punkte)

Es sei $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3. Zeige, dass die Nullstellen von F in $\mathbb{C}$ nicht die Form $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ (mit einem $\alpha \in \mathbb{C}$) haben können.

Aufgabe 22.11. (3 Punkte)

Zeige, dass es ein irreduzibles Polynom $F \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 4 gibt, dessen Nullstellen in $\mathbb{C}$ die Form $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ besitzen.