Inhaltsübersicht und Stichwortverzeichnis

(Die Zahlen in Klammern geben die Seitenzahlen an,
ansonsten bezeichnet Ü.4 z.B. den 4. Übungszettel)

Einführung

Eigentlich sollte ich versuchen, Ihnen zu erzählen, was das ist: *Topologie*. Es ist aber schwierig, in wenigen Worten zu skizzieren, was unter diesem Namen subsumiert in vielen Büchern steht. Ich will daher zunächst einige Aspekte nennen, die in dieser Vorlesung eine Rolle spielen werden. Als eine Art Einstieg werde ich danach einige spezielle Dinge ausführlicher diskutieren.

Sprache. Es gibt ziemlich viele Vokabeln der Topologie. Bei einigen von diesen ist es auch in anderen Gebieten der Mathematik wichtig, daß man sie beherrscht:
Topologischer Raum; stetige Abbildung; Zusammenhang; kompakt; ...

Grundlagen der Analysis. Ziemlich viele Sätze der Analysis lassen sich in der Sprache der Topologie formulieren (und verallgemeinern). Es wäre ein Irrtum, zu glauben, daß die Sätze dadurch unbedingt besser werden. Man versteht sie aber wohl ein kleines bißchen besser auf diese Art, und vor allem lassen sie sich leichter merken.

Zum Beispiel gibt es folgenden Sachverhalt, den wir später noch eingehend diskutieren werden: Wenn X ein *kompakter Raum* ist (denken Sie an eine kompakte Teilmenge eines euklidischen Raumes) und wenn

$$f : X \longrightarrow \quad (\textit{irgendwohin})$$

eine stetige Abbildung ist, dann ist auch *Bild* $(f) = f(X)$ *kompakt*. Man kann dies auffassen als eine Verallgemeinerung des *Maximumprinzips*. Denn im Spezialfall einer reellen Funktion, d.h. einer Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, hat die Kompaktheit von *Bild* $(f) \subset \mathbb{R}$ als unmittelbare Konsequenz, daß die Funktion ein Maximum besitzt.

Gestalt–Erkennung. Zunächst eine Vokabel: Wenn $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^n$, dann wollen wir sagen, daß X und Y *topologisch äquivalent* sind, wenn es stetige Abbildungen

$$f : X \longrightarrow Y \quad \text{und} \quad g : Y \longrightarrow X$$

gibt, die zueinander invers sind, d.h. es ist $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Beispiele. 1. Das *Quadrat* und der *Kreis* (genauer gesagt, die beiden Kurven in der Ebene, die durch diese Worte beschrieben sind) sind zueinander topologisch äquivalent. — Um das einzusehen, stellen wir uns vor, daß die beiden konzentrisch zueinander angeordnet sind und daß wir selbst in der Mitte stehen. Wenn wir nun in irgendeine Richtung schauen, so sehen wir sowohl vom Quadrat als auch vom Kreis *genau einen* Punkt. Dies liefert die behauptete ein–eindeutige Zuordnung. Es ist klar (oder?) daß diese Zuordnung auch in beiden Richtungen stetig ist.

2. Das *offene Intervall* $(-1, +1)$ und die *Gerade* $\mathbb{R}$ sind zueinander topologisch äquivalent; z.B. vermöge der beiden Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, +1) \qquad g : (-1, +1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \tfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad\qquad y \longmapsto \tfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

Diese Beispiele illustrieren, was auch allgemeiner gilt. Nämlich in der Regel ist eine Behauptung der Art "X und Y sind topologisch äquivalent" nicht besonders aufregend. Der Grund liegt im Prinzip des menschlichen Erfindungsreichtums. Wenn man nämlich mit solch einer Behauptung konfrontiert wird, dauert es meist nicht sehr lange, bis man selbst in der Lage ist, sich eine solche Äquivalenz auszudenken (vorausgesetzt natürlich, daß die Behauptung überhaupt richtig war). Selbstverständlich gibt es auch hier Ausnahmen, darunter ganz spektakuläre.

Ganz anders liegt es mit Behauptungen der Art, daß zwei vorgegebene Räume X und Y *nicht* topologisch äquivalent seien. Hier langt es nicht, irgendwelche Abbildungen zu erfinden, denn die Behauptung ist ja gerade, daß es Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften gar nicht gibt. Es geht auch nicht, daß man etwa die vorhandenen Abbildungen durchmustert um nachzuschauen, ob vielleicht topologische Äquivalenzen darunter sind — i.a gibt es einfach viel zu viele Möglichkeiten, die da zu inspizieren wären. Es bleibt einem in dieser Situation kaum eine andere Wahl: Wohl oder übel wird man sich einen *Grund* ausdenken müssen, warum eine topologische Äquivalenz gar nicht existieren *kann*. Oft ist das sehr schwierig.

BEISPIELE. 1. Die *2-dimensionale Sphäre* (= Kugeloberfläche) und der *2-dimensionale Torus* (= (Auto-)Reifenoberfläche) sind offensichtlich (!!) nicht topologisch äquivalent. Dies zu beweisen erfordert aber einigen Aufwand.

2. $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ (*die euklidischen Räume der Dimensionen* 2 *und* 3) sind offensichtlich (!!) nicht topologisch äquivalent, allgemeiner: $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ sind nicht topologisch äquivalent, wenn $m \neq n$; dies ist der sogenannte *Satz von der topologischen Invarianz der Dimension.*

Letzterer Satz wurde erstmals ca. 1910 bewiesen (oder ca. 1930 — je nachdem wie genau man es nimmt mit der Stichhaltigkeit der verwendeten Argumente). Vor 1910 jedenfalls war der Satz ein berühmtes Problem, das als sehr beunruhigend empfunden wurde.

Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde das Problem als solches überhaupt erkannt. Das steht im Zusammenhang mit einer bemerkenswerten Entdeckung des Mathematikers *Peano*; das von diesem entdeckte Phänomen wird heutzutage üblicherweise auch als die *Peano–Kurve* bezeichnet.

SATZ. *Für jedes* n *existiert eine surjektive* (!) *stetige Abbildung* $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$.

Ich möchte zunächst noch einmal auf diese beiden Aspekte des Satzes von der topologischen Invarianz der Dimension eingehen. Einmal ist der Satz "offensichtlich richtig" in dem Sinne, daß er uns nach dem, was wir über die Realität wissen (oder zu wissen glauben) beinahe als eine grundlegende Tatsache unserer Erkenntnis erscheint, zumindest für $m, n \leq 3$. Zum andern ist der Satz sehr schwer zu beweisen.

Diese beiden Tatsachen stehen *nicht* im Widerspruch zueinander. Man muß sich hier folgendes klarmachen.

Zu einem mathematischen Satz gehört ein mathematischer Sachverhalt; im vorliegenden Fall ein mathematisches Modell für den Begriff *Raum.* (Das Modell besteht darin, daß postuliert wird, gewisse Aspekte des m–dimensionalen Raumes (im Sinne unserer Anschauung) seien sehr gut beschreibbar durch den “Raum” der m–Tupel reeller Zahlen).

Sich auf diese Weise ein Modell zu verschaffen, bedeutet eine Art “höheres Raten”. Nun ist es aber gar nicht ausgemacht, daß man sogleich richtig geraten hat (oder daß dies überhaupt möglich ist). Wenn man wissen will, ob das Modell adäquat ist, so muß man es studieren. Dazu gehört der Nachweis, daß das Modell die Sachen auch liefert, die es gefälligst zu liefern hat. Im vorliegenden Fall bedeutet dies, daß wir verpflichtet sind, die Gültigkeit des Satzes von der topologischen Invarianz der Dimension *innerhalb des gewählten Modells* nachzuweisen; mit anderen Worten, den Satz zu beweisen in der Ihnen bekannten Form — und dabei hilft uns die Anschauung möglicherweise nur wenig.

Zurück nun zur Peano–Kurve. Ich führe die Konstruktion zunächst durch für die folgende Variante. Dazu bezeichne $[0,1] = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \}$ das Einheitsintervall; und $[0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat.

Satz. *Es gibt eine surjektive stetige Abbildung* $[0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$.

Beweis. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

Wir definieren eine Menge $C \subset [0,1]$, die sogenannte *Cantor–Menge* (sie ist benannt nach ihrem Entdecker, dem Mathematiker Cantor) und überzeugen uns sodann von der Gültigkeit der folgenden drei Aussagen

(a) *es gibt eine surjektive stetige Abbildung* $C \longrightarrow C \times C$,

(b) *es gibt eine surjektive stetige Abbildung* $C \longrightarrow [0,1]$,

(c) *jede stetige Abbildung* $C \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ *läßt sich fortsetzen zu einer stetigen Abbildung, die auf dem ganzen Intervall* $[0,1]$ *definiert ist.*

Sobald wir diese Dinge gezeigt haben, werden wir fertig sein. Denn mit Hilfe von (a) und (b) können wir eine surjektive stetige Abbildung erhalten

$$f : \; C \xrightarrow{(a)} C \times C \xrightarrow{(b)} [0,1] \times [0,1] \; .$$

Wegen (c) können wir die Abbildung f zu einer stetigen Abbildung auf ganz $[0,1]$ erweitern. Die resultierende stetige Abbildung $[0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ ist nun automatisch surjektiv. Der Grund ist höchst kurios. Nämlich die konstruierte Abbildung hat als Einschränkung auf C ja gerade die oben f genannte Abbildung, und *die* war schon surjektiv.

Nun zur Cantor–Menge! Man kann sie sich vorstellen, wenn auch vielleicht nicht besonders gut. Sie entsteht aus dem Intervall $[0,1]$ indem man aus diesem das offene mittlere Drittel wegläßt; aus den entstehenden beiden Intervallen $[0,1/3]$ und $[2/3,1]$ wieder jeweils das mittlere Drittel; und so fort, ad infinitum.

Die Konstruktion läßt sich prägnant beschreiben mit Hilfe der *triadischen Entwicklung* der reellen Zahlen (d.h. dem Analogon der Dezimalbruch–Entwicklung, wo eben die 10 durch die 3 ersetzt ist). Jede Zahl aus $[0,1]$ hat eine Darstellung der Art

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \; , \quad a_i \in \{0,1,2\} \; ,$$

wo, wie auch sonst, die vorkommende unendliche Summe aufzufassen ist als der Limes der entsprechenden Partialsummen,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} \ .$$

Wie man es von der Dezimal–Entwicklung kennt, so ist auch die triadische Darstellung nicht in allen Fällen eindeutig. Wir schauen genauer hin. Seien also

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \quad \text{und} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$$

zwei Ausdrücke, die möglicherweise dieselbe reelle Zahl darstellen, von denen wir aber annehmen wollen, daß sie *verschieden* sind. Bezeichne m die erste Stelle, wo die beiden sich unterscheiden. Es ist $m \geq 1$ und wir haben

$$a_i = b_i \;\text{ für }\; i \leq m-1 \ , \quad \text{aber} \;\; a_m \neq b_m$$

und o.B.d.A. $a_m < b_m$. Die Differenz $y - x$ können wir nun schreiben als

$$\left(\frac{b_m}{3^m} - \frac{a_m}{3^m}\right) \;-\; \left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}\right) \ .$$

Wegen

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \;\leq\; \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \;-\; 0 \;=\; \frac{2}{3^{m+1}}\left(1 + \frac{1}{3} + \dots\right) \;=\; \frac{1}{3^m}$$

ist der Subtrahend $\leq \frac{1}{3^m}$, und für das Gleichheitszeichen ist es notwendig, daß alle a_i gleich 2 und alle b_i gleich 0 sind. Abgezogen andererseits wird von $(b_m - a_m)\,\frac{1}{3^m}$, wo der Faktor $(b_m - a_m)$ entweder gleich 1 oder gleich 2 ist. Damit $y - x = 0$ gelten kann, müssen wir also haben

$$\begin{aligned} a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots \;&=\; 2 \\ b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots \;&=\; 0 \end{aligned}$$

und $b_m = a_m + 1$. Letzteres bedeutet übrigens, daß eines von a_m und b_m gleich 1 sein muß (da ja nur die Werte $0, 1, 2$ in Frage kommen).

Unsere Überlegung gestattet noch die folgende Schlußfolgerung, die wir weiter unten verwenden werden: Wenn m die erste Stelle ist, an der die Ausdrücke für x und y sich unterscheiden und wenn (in der obigen Notation) $b_m = 2$, $a_m = 0$, dann ist notwendigerweise $|y - x| \;\geq\; \dfrac{1}{3^m}$.

Die *Cantor–Menge* C sei jetzt definiert als

$$C \ := \ \left\{ x \in [0,1] \ \middle| \ x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \ , \quad a_i = 0 \ \text{ oder } \ 2 \right\}$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft: C *besteht aus all denjenigen reellen Zahlen aus* $[0,1]$ *, die eine triadische Entwicklung haben, in der die Ziffer* 1 *nicht vorkommt.*

Es ist zum Beispiel $\frac{1}{3} \in C$, da ja $\frac{1}{3} \ = \ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i}$. Andererseits zeigt die vorstehende Diskussion, daß jeder Punkt der Cantor–Menge eine *eindeutige* triadische Darstellung hat, in der die Ziffer 1 *nicht* vorkommt. Wie wir gesehen haben, gilt auch dies: Wenn zwei solche Ausdrücke sich an der m–ten Stelle unterscheiden, dann ist ihre Differenz, dem Betrage nach, mindestens $\frac{1}{3^m}$.

Wir kommen jetzt zum Beweis der obigen drei Aussagen (a), (b), (c) .

zu (a) Die Abbildung $C \longrightarrow C \times C$, $x \mapsto (x', x'')$, ist ein mathematisches Modell vom Reißverschluß; sie ist gegeben durch

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) \quad \longmapsto \quad \big(\ (a_1, a_3, a_5, \dots) \ , \ (a_2, a_4, a_6, \dots) \ \big)$$

wobei $x \ = \ \sum \dfrac{a_i}{3^i}$ die triadische Entwicklung von x bezeichnet (ohne Einsen, also auch eindeutig bestimmt).

1. *die Abbildung ist stetig* — denn seien $x = \sum \dfrac{a_i}{3^i}$ und $y = \sum \dfrac{b_i}{3^i}$ mit $|x - y| < \dfrac{1}{3^{2n}}$. Dann unterscheiden sich $(a_1, \dots)$ und $(b_1, \dots)$ nicht vor dem Index $2n{+}1$ und somit $(a_1, a_3, \dots)$ und $(b_1, b_3, \dots)$ nicht vor dem Index $n+1$; folglich ist

$$|x' - y'| \ \leq \ \frac{2}{3^{n+1}} \ + \ \frac{2}{3^{n+2}} \ + \ \dots \ = \ \frac{1}{3^n} \ .$$

Die zweite Komponente behandelt man ähnlich.

2. *die Abbildung ist surjektiv* — denn zu $x', x'' \in C$ erhält man durch “Mischen” der dazugehörigen Folgen ein Urbild. (Tatsächlich ist die angegebene Abbildung sogar *bijektiv* und in *beiden* Richtungen stetig; wir brauchen das aber nicht.)

zu (b) Die Abbildung $C \longrightarrow [0,1]$ wird so definiert. Zunächst identifieren wir den Punkt $\sum \dfrac{a_i}{3^i}$ mit der dazugehörigen Folge $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ (hier benutzen wir die Eindeutigkeit der Darstellung von Punkten der Cantor-Menge). Die erhaltene Folge ist nun eine $0-2-$Folge in dem Sinne, daß jedes der Folgenglieder entweder eine 0 oder eine 2 ist. Aus der $0-2-$Folge machen wir eine $0-1-$Folge auf die einfachst-mögliche Weise. Wir dividieren nämlich jedes der Folgenglieder durch 2 . Wir erhalten so die $0-1-$Folge $(a_1/2, a_2/2, a_3/2, \dots)$. Aus dieser $0-1-$Folge schließlich verschaffen wir uns wieder eine reelle Zahl. Nämlich wir nehmen die dazugehörige *duadische* Darstellung. Kurz gesagt, die Abbildung ist gegeben durch

$$\sum \frac{a_i}{3^i} \quad \longmapsto \quad \sum \frac{a_i/2}{2^i} \quad .$$

1. *die Abbildung ist stetig* — denn wenn $|x - y| < \dfrac{1}{3^n}$, so unterscheiden sich die dazugehörigen Folgen nicht vor dem Index $n+1$; folglich

$$|\,Bild(x) - Bild(y)\,| \quad \leq \quad \frac{1}{2^{n+1}} \; + \; \frac{1}{2^{n+2}} \; + \; \ldots \quad = \; \frac{1}{2^n} \; .$$

2. *die Abbildung ist surjektiv* — denn jede reelle Zahl besitzt eine Darstellung im duadischen System.

zu (c) Um die verlangte Erweiterung der Abbildung zu definieren, gehen wir die Komponenten des Komplements von C einzeln durch. Das Komplement von C enthält:

- $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, das offene Intervall, das aus den $x = \sum \dfrac{a_i}{3^i}$ besteht mit $a_1 = 1$. Die Endpunkte $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ gehören *beide* zu C (wegen $\frac{1}{3} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots$) . Wir erweitern f auf dieses Intervall, indem wir f dort als *lineare Funktion* definieren,

$$f\left(\frac{1}{3} + t\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)\right) \quad := \quad f\left(\frac{1}{3}\right) + t\left(f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right) \; , \quad t \in [0,1] \; .$$

Die Definition ist sinnvoll, weil f auf den Randpunkten schon vorher definiert war (die Randpunkte gehören ja zu C , wie eben angemerkt wurde).

- $\left(0 + \dfrac{1}{3^2} \; , \; 0 + \dfrac{2}{3^2}\right)$ und $\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3^2} \; , \; \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3^2}\right)$, die beiden offenen Intervalle, die aus denjenigen Zahlen bestehen, wo die zweite Ziffer in der triadischen Entwicklung eine 1 ist, die erste Ziffer aber nicht; wie oben gehören die Randpunkte wieder zu C , so daß wir f wieder linear erweitern können. Und schließlich, allgemein (für jedes n),

- $\left(\sum_{i=1}^n \dfrac{a_i}{3^i} + \dfrac{1}{3^{n+1}} \; , \; \sum_{i=1}^n \dfrac{a_i}{3^i} + \dfrac{2}{3^{n+1}}\right)$, die 2^n offenen Intervalle, wo jedes der a_i entweder 0 oder 2 ist. Auch auf diesen Intervallen wird f wieder linear erweitert.

Mit der Konstruktion erhalten wir insgesamt eine Erweiterung von f auf ganz $[0,1]$; etwas mißbräuchlich wollen wir die erweiterte Abbildung ebenfalls mit f bezeichnen. Wir müssen noch nachweisen, daß die konstruierte Abbildung *stetig* ist. Dazu untersuchen wir die lokale Stetigkeit in einem Punkt x . Wir unterscheiden Fälle.

1. Fall. $x \notin C$
Der Fall bedeutet, daß x in einem der Intervalle liegt, in denen f als lineare Funktion definiert worden ist; und zwar liegt x im Innern des fraglichen Intervalls. Die Stetigkeit ist klar in diesem Fall.

2. Fall. $x \in C$
Wir benutzen folgende Bemerkung. Wenn f bei x nicht stetig ist, dann gibt es eine gegen x konvergente Folge, deren Bildfolge nicht (oder zumindest nicht gegen $f(x)$) konvergiert. Um zu zeigen, daß das hier nicht vorkommen kann, betrachten wir eine Folge (x_n) in $[0,1]$ mit $\lim x_n = x$.

Als Hilfsmittel bestimmen wir zunächst zu der gegebenen Folge (x_n) eine andere Folge, deren sämtliche Folgenglieder in C liegen. Dazu wird jedes $x_n \notin C$ ersetzt durch einen der beiden Randpunkte x'_n des Intervalls, in dem x_n liegt; und zwar wird der Randpunkt x'_n so bestimmt, daß für den anderen Randpunkt x''_n gilt $|f(x'_n) - f(x)| \geq |f(x''_n) - f(x)|$. Die Abbildung f ist auf dem Intervall eine lineare Abbildung, wir haben also als Konsequenz, daß $|f(x_n) - f(x)| \;\leq\; |f(x'_n) - f(x)|$ (oder?). Es wird somit genügen zu zeigen, daß die Folge $(f(x'_n))$ gegen $f(x)$ konvergiert. Für eine weitere Fallunterscheidung nehmen wir zunächst nun an, daß die vorgegebene Folge noch die folgende Bedingung erfüllt:

$(*)$ In jedem der Intervalle des Komplements von C liegen nur endlich viele der x_n .

Wenn die Bedingung $(*)$ erfüllt ist, können wir sicher sein, daß mit der Folge (x_n) auch die Folge (x'_n) gegen x konvergiert. Denn wenn man aus unseren fraglichen Intervallen eine Folge bildet, *in der jedes Intervall nur endlich oft vorkommt*, so geht die zugehörige Folge der Längen gegen null; also geht auch die Folge der Differenzen $(x'_n - x_n)$ gegen null.

Nun ist aber (x'_n) eine Folge in C , sie konvergiert gegen x (wegen unserer Annahme), und die Funktion f ist auf C stetig. Es folgt, daß $\lim f(x'_n) = f(x)$.

Schließlich müssen wir noch den Fall betrachten, wo die Bedingung $(*)$ nicht erfüllt ist; das heißt, daß es ein Intervall I des Komplements von C gibt, in dem unendlich viele der Folgenglieder liegen. Es folgt sofort, daß x ein (Rand–)Punkt von I sein muß. Da die Funktion f auf I linear ist, können wir die Folgenglieder in I ignorieren. Die Teilfolge der restlichen Folgenglieder ist nun entweder endlich (in dem Fall ist nichts mehr zu beweisen) oder unendlich. In jedem Fall erfüllt sie die Bedingung $(*)$. Denn es gibt keine zwei unter den fraglichen Intervallen, die einen Randpunkt gemeinsam hätten. Wir haben uns somit auf den Spezialfall zurückgezogen. $\square$

Was Peano–Kurven allgemein angeht, sei hier nur folgendes angemerkt:

1. Um eine stetige surjektive Abbildung $\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ zu konstruieren geht man ganz genauso vor, nur daß man beginnt mit reellen Zahlen der Form

$$a_{-m}\, 3^m \;+\; a_{-m+1}\, 3^{m-1} \;+\; \cdots \;+\; a_0 \;+\; \frac{a_1}{3} \;+\; \frac{a_2}{3^2} \;+\; \cdots$$

2. Ist $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ stetige und surjektive Abbildung, so erhält man eine stetige surjektive Abbildung $\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \times \big(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1\big)$ als Komposition der Abbildungen

$$\mathbb{R}^1 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\mathrm{id}\times f} \mathbb{R}^1 \times \big(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1\big) \;.$$

Durch Induktion erhält man hieraus für jedes n eine stetige und surjektive Abbildung $\mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Ich habe schon betont, daß der Satz von der topologischen Invarianz der Dimension schwierig zu beweisen ist, aber in einem speziellen Fall ist er doch relativ einfach, und diesen Fall will ich hier behandeln.

Satz. *Für kein $n > 1$ ist es richtig, daß $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^n$ topologisch äquivalent sind.*

Der Beweis ist dadurch äußerst interessant, daß er eine für die Topologie typische Schlußweise illustriert. Die grundlegende Idee besteht darin, daß man einem Raum gewisse “diskrete Strukturen” zuordnen kann mit den folgenden beiden Eigenschaften:

1. Die zugeordnete Struktur ist “topologisch invariant”; das heißt, wenn X und Y topologisch äquivalent sind, dann sind auch die zugeordneten Strukturen äquivalent. (In unserem speziellen Fall wird die zugeordnete Struktur eine diskrete Menge sein, und *äquivalent* wird in dem Fall heißen *gleiche Anzahl von Elementen*).

2. Die zugeordnete Struktur ist “berechenbar”. (In unserem Fall wird die Menge endlich sein und wir können die Anzahl ihrer Elemente einfach abzählen).

Die hier interessierende Struktur ist die *Menge der Weg–Zusammenhangs–Klassen*; die Konstruktion geht so: Sei X ein Raum. Zwei Punkte $x, y \in X$ heißen *wege–äquivalent*, wenn es einen *Weg* in X gibt, der sie verbindet; das ist, nach Definition, eine stetige Abbildung

$$w: \ [0,1] \longrightarrow X$$

mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$.

Die *Wege–Äquivalenz* ist eine Äquivalenz–Relation; die Nachprüfung erfordert keinen Tiefsinn:

Symmetrie: Ist $w: \ [0,1] \longrightarrow X$ stetige Abbildung mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$, so ist auch $w' : [0,1] \longrightarrow X$, die Komposition der stetigen Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] & \longrightarrow & X \\ t & \longmapsto & 1-t & \longmapsto & w(1-t) \end{array}$$

wieder stetig, und es gilt $w'(0) = w(1) = y$ und $w'(1) = w(0) = x$.

Transitivität: Seien $v, w: \ [0,1] \longrightarrow X$ Wege mit $v(0) = x$, $v(1) = w(0) = y$, $w(1) = z$. Dann gibt es auch einen Weg von x zu z ,

$$u(t) := \begin{cases} v(2t) & \text{wenn} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ w(2t-1) & \text{wenn} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} .$$

Definition. $\pi_0 X$, die *Menge der Weg–Zusammenhangs–Klassen*, ist die Menge der Äquivalenzklassen von Punkten von X unter der angegebenen Äquivalenzrelation.

Beispiele. 1. $\pi_0 \mathbb{R}^n$ *hat nur ein Element* — denn zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ gibt es den Weg $t \mapsto x + t\,(y - x)$, $t \in [0,1]$, der die beiden verbindet.

2. $\pi_0 \left(\mathbb{R}^1 - 0\right)$ *hat zwei Elemente* — zunächst gibt es *höchstens* zwei Elemente. Denn je zwei positive reelle Zahlen sind wege–äquivalent: $t \mapsto x + t\,(y - x)$ ist für positive x und y ein Weg in den positiven reellen Zahlen. Ebenso sind je zwei negative Zahlen wege–äquivalent. Andererseits gibt es aber auch *mindestens* zwei Elemente, denn ein Weg zwischen einer positiven und einer negativen Zahl trifft notwendigerweise die 0 ; dies sagt der *Zwischenwertsatz* aus der Analysis.

3. $\pi_0(\mathbb{R}^n - 0)$ *hat nur ein Element für* $n \geq 2$ — denn seien $x, y \in \mathbb{R}^n - 0$. Im Falle, wo die Strecke $x + t\,(y - x)$, $t \in [0,1]$, den Punkt 0 *nicht* trifft, sind x und y wege–äquivalent in $\mathbb{R}^n - 0$ vermöge dieser Strecke. Wenn andererseits 0 auf der Strecke $x + t\,(y - x)$ liegt, so wählen wir irgendeinen Punkt a , der nicht auf der Geraden durch x und y liegt (das geht wegen $n \geq 2$); x und y sind dann jeweils wege–äquivalent zu a in $\mathbb{R}^n - 0$ (der vorige Fall ist anwendbar) und somit auch untereinander.

Satz. *Für* $n \geq 2$ *sind* $\mathbb{R}^1$ *und* $\mathbb{R}^n$ *nicht topologisch äquivalent.*

Entgegen der Behauptung nehmen wir an, sie wären es doch. Wir nehmen also an, daß es zueinander inverse stetige Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^1$$

gibt, und wir wollen diese Annahme zum Widerspruch führen. Der Bequemlichkeit halber wollen wir hier zusätzlich auch noch annehmen, daß $f(0) = 0$. Diese zusätzliche Annahme ist keine Einschränkung der Allgemeinheit. Denn sei etwa $f(0) = z$. Nun gibt es zweifellos eine bijektive und in beiden Richtungen stetige Abbildung $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $h(z) = 0$; z.B. die Abbildung $x \mapsto x - z$. Wir brauchen also nur die Abbildung f zu ersetzen durch die zusammengesetzte Abbildung $h \circ f$ und entsprechend die Abbildung g durch $g \circ h^{-1}$, wo h^{-1} die Umkehrabbildung von h bezeichnet. Wir nehmen also jetzt an, $f(0) = 0$.

Der Trick ist nun, die beiden folgenden *eingeschränkten* Abbildungen zu betrachten

$$f' : \mathbb{R}^1 - 0 \longrightarrow \mathbb{R}^n - 0 \quad \text{und} \quad g' : \mathbb{R}^n - 0 \longrightarrow \mathbb{R}^1 - 0 \ .$$

Da diese Abbildungen ebenfalls zueinander invers sind, liefern sie eine topologische Äquivalenz zwischen $\mathbb{R}^1 - 0$ und $\mathbb{R}^n - 0$.

Das kann aber nicht sein — denn betrachte $f'(+1)$ und $f'(-1)$: diese sind in $\mathbb{R}^n - 0$ durch einen Weg verbindbar ($\pi_0(\mathbb{R}^n - 0)$ hat nach Beispiel 3 nur ein Element) . Aus unserer ominösen topologischen Äquivalenz schließen wir, daß dann auch $+1$ und -1 in $\mathbb{R}^1 - 0$ durch einen Weg verbindbar sind. Andererseits wissen wir aber auch, daß dem nicht so ist (Beispiel 2). Wir haben einen Widerspruch erhalten. □

Bemerkung. Der Punkt bei der obigen Schlußweise ist der: Wenn die stetige Abbildung $w : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n - 0$ einen Weg in $\mathbb{R}^n - 0$ von $f'(+1)$ zu $f'(-1)$ gibt, so gibt die zusammengesetzte Abbildung $w' = g' \circ w$ einen Weg in $\mathbb{R}^1 - 0$ von

$$+1 \;=\; g'(f'(+1)) \quad \text{zu} \quad -1 \;=\; g'(f'(-1))$$

— was ja nicht sein kann.

Die Konstruktion $X \longmapsto \pi_0 X$ ist ein einfaches Beispiel einer sogenannten *topologischen Invariante*. Das Beispiel ist geeignet, um einige formale Aspekte herausstellen, die man sich gut merken kann, und die — mehr oder weniger — den Begriff der *topologischen Invariante* ausmachen:

a. *Zu jedem Raum gehört ein "Ding"* — im vorliegenden Fall ist dem Raum X die Menge $\pi_0 X$ zugeordnet.

b. *Zu jeder stetigen Abbildung von Räumen gehört eine Abbildung der zugeordneten Dinge* — im vorliegenden Fall ist der Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung (von Mengen) $\pi_0 f$ zugeordnet,

$$\pi_0 f : \pi_0 X \longrightarrow \pi_0 Y \ .$$

Wenn $[x]$ die Wege–Äquivalenz–Klasse von x bezeichnet, so ist diese Abbildung definiert durch

$$[x] \longmapsto [f(x)] \ ;$$

wobei wir noch nachzuprüfen müssen, daß letztere Zuordnung *wohl–definiert* ist,

$$[x] = [y] \implies [f(x)] = [f(y)] \ .$$

Nun bedeutet aber " $[x] = [y]$ ", es gibt einen Weg von x zu y , d.h. eine stetige Abbildung

$$w : [0,1] \longrightarrow X \quad \text{mit} \quad w(0) = x \ , \quad w(1) = y \ .$$

Dann ist die Abbildung $w' = f \circ w$, die Komposition der stetigen Abbildungen

$$[0,1] \xrightarrow{w} X \xrightarrow{f} Y \ ,$$

ein Weg mit

$$w'(0) = f(w(0)) = f(x) \ \text{ und } \ w'(1) = f(w(1)) = f(y) \ ;$$

es ist also $[f(x)] = [f(y)]$.

c. *Die Zuordnung* $f \longmapsto \pi_0 f$ *respektiert Komposition von Abbildungen*: wenn

$$f : X \longrightarrow Y \ , \quad g : Y \longrightarrow Z$$

stetige Abbildungen sind, dann ist $\pi_0(g \circ f) = \pi_0 g \circ \pi_0 f$. Klar, denn

$$\begin{aligned}
&\pi_0 \, (g \circ f) \ [x] \underset{\text{Def. von } \pi_0(g \circ f)}{=} [\,(g \circ f)\,(x)\,] = \\
&[\,g\,(f(x))\,] \underset{\text{Def. von } \pi_0 \, g}{=} \pi_0 \, g\,(\,[f(x)]\,) \underset{\text{Def. von } \pi_0 \, f}{=} \\
&\pi_0 \, g\,(\,\pi_0 \, f\,(\,[x]\,)) = \pi_0 \, g \circ \pi_0 \, f\,(\,[x]\,) \ .
\end{aligned}$$

d. *Die identische Abbildung auf* X *induziert die identische Abbildung auf* $\pi_0 X$,

$$\pi_0 \, \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\pi_0 X} \ .$$

Für den Sachverhalt, der durch die Eigenschaften *a.* – *d.* ausgedrückt ist, sagt man auch, daß die Zuordnung

$$X \longmapsto \pi_0 X \ , \quad (f : X \longrightarrow Y) \longmapsto (\pi_0 f : \ \pi_0 X \longrightarrow \pi_0 Y)$$

funktoriell ist, oder auch, daß sie "*ein Funktor*" ist.

Die Eigenschaften *a. – d.* implizieren *formal* eine weitere, nämlich

$$X \text{ und } Y \text{ topologisch äquivalent} \implies \pi_0 X \text{ und } \pi_0 Y \text{ sind isomorphe Mengen.}$$

Denn seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow X$ stetige Abbildungen mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Dann gilt:

$$\pi_0 f \circ \pi_0 g \underset{(c)}{=} \pi_0 (f \circ g) \underset{(b)}{=} \pi_0 \, \mathrm{id}_Y \underset{(d)}{=} \mathrm{id}_{\pi_0 Y}$$

und ebenso auch $\pi_0 g \circ \pi_0 f = \mathrm{id}_{\pi_o X}$. Das heißt, $\pi_0 f$ und $\pi_0 g$ sind zueinander inverse Abbildungen zwischen $\pi_0 X$ und $\pi_0 Y$.

Letzteres mag man ansehen als eine formalisierte Version (und Verallgemeinerung) unserer früheren Überlegung, daß $\mathbb{R}^1 - 0$ und $\mathbb{R}^n - 0$ für $n \geq 2$ nicht topologisch äquivalent sind: Die beiden Räume *können* nicht topologisch äquivalent sein, da $\pi_0 \left(\mathbb{R}^1 - 0\right)$ und $\pi_0 (\mathbb{R}^n - 0)$ nicht isomorphe Mengen sind.

Wir wollen jetzt noch kurz eine topologische Invariante erfinden, mit der wir $\mathbb{R}^2$ von $\mathbb{R}^3$ unterscheiden können (sofern wir nur bereit sind, gewisse Dinge plausibler Art als Tatsachen zu akzeptieren). Mit demselben Trick wie vorher ziehen wir uns zunächst auf die Behauptung zurück, daß $\mathbb{R}^2 - 0$ und $\mathbb{R}^3 - 0$ nicht topologisch äquivalent sind.

Wir lassen uns von der Idee leiten, daß die *Löcher* in $\mathbb{R}^2 - 0$ und $\mathbb{R}^3 - 0$ von verschiedenem Typ sein sollten. Um den Unterschied dingfest zu machen, untersuchen wir, ob etwa eine *Schlinge* um das Loch herum zusammengezogen werden kann *ohne* das Loch zu treffen. Unsere Vermutung ist, daß das im zweiten Falle geht, im ersten aber nicht.

Es bezeichne S^1 die *1–dimensionale Sphäre* (= Kreislinie)

$$S^1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1 \right\} .$$

Wenn X ein Raum ist, dann bezeichne

$$\begin{aligned} \left\{S^1 , X\right\} &= \textit{Menge der stetigen Abbildungen } S^1 \longrightarrow X . \\ (&= \text{“}\textit{Menge der Schlingen in } X\text{”}) . \end{aligned}$$

Dies ist eine sehr große (und sehr unübersichtliche) Menge, an der wir nicht so sehr unmittelbar interessiert sind. Vielmehr interessieren wir uns für eine bestimmte Äquivalenzrelation auf der Menge der Schlingen, und was wir letztlich betrachten werden, ist die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich dieser Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzrelation wird als *Deformations-Äquivalenz* (oder *Homotopie*) bezeichnet; die Äquivalenzklassen heißen *Deformationsklassen* (oder *Homotopieklassen*). In der vorliegenden Situation wird die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $S^1 \longrightarrow X$ mit $\left[S^1 , X\right]$ bezeichnet.

Nun zur Definition der Äquivalenzrelation. Wir wollen sagen, daß zwei Abbildungen $f_0, f_1 : \ S^1 \longrightarrow X$ *deformations–äquivalent* sind (oder “*homotop*” — diese Worte bedeuten dasselbe), wenn es eine *stetige Familie von stetigen Abbildungen* gibt,

$$f_t : \ S^1 \longrightarrow X \ , \ t \in [0,1] \ ;$$

also eine Art Interpolation zwischen f_0 und f_1 .

Es sei hier angemerkt, daß natürlich der Begriff der *stetigen Familie von stetigen Abbildungen* einer Präzisierung bedarf. Doch zunächst gebe ich einige Beispiele an. Die in diesen Beispielen behaupteten Sachverhalte sind durchweg nicht–trivial (und sogar einigermaßen aufwendig zu beweisen), sie sind am besten daher aufzufassen als *inoffizielle Mitteilungen*.

1. *Die Menge* $\big[S^1 \, , \ \mathbb{R}^3 - 0\big]$ *besteht aus nur einem Element*—oder, was auf dasselbe hinausläuft, jede Schlinge in $\mathbb{R}^3 - 0$ kann stetig deformiert werden in jede beliebige andere, z.B. in die konstante Abbildung $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 - 0 \ , \ x \mapsto e_1$ (wo e_1 einen Punkt aus $\mathbb{R}^3 - 0$ bezeichnen soll; etwa den ersten Basisvektor).

Wie schon angedeutet wurde, ist dies ein nicht–trivialer Satz. Um sich eine Vorstellung von der Komplexität der Dinge zu machen, sollte man sich folgendes klarmachen: Bezeichne S^2 die *zweidimensionale Sphäre*, $S^2 \ = \ \big\{ \, x \in \mathbb{R}^3 \ | \ \ \|x\| = 1 \, \big\}$. *Es gibt eine stetige Abbildung* $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 - 0$, *deren Bild die ganze* S^2 *enthält* — eine solche Abbildung kann man relativ leicht mit Hilfe der Peano-Kurve konstruieren.

2. *Die Menge* $\big[S^1 \, , \ \mathbb{R}^2 - 0\big]$ *hat abzählbar viele Elemente*. Diese sind klassifiziert durch die *Windungszahl* der jeweiligen Schlinge um den Nullpunkt.

Repräsentanten einiger Elemente und die zugehörige Windungszahl :

(Windungszahl:) $\quad -1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad +1 \qquad\qquad +2$

3. Die Zuordnung $X \longmapsto \big[S^1 \, , \ X\big]$ ist *funktoriell* in dem Sinne, wie wir es im Anschluß an die Konstruktion von $\pi_0 \, X$ bereits diskutiert haben. (Dies – zur Abwechslung – ist nicht so schwierig.)

Die letzte Sache liefert: Sind X und Y topologisch äquivalent, so sind die Mengen $\big[S^1 \, , X\big]$ und $\big[S^1 \, , Y\big]$ isomorph. Mit 1. und 2. bekommen wir so das annoncierte Hilfsmittel, um $\mathbb{R}^2 - 0$ und $\mathbb{R}^3 - 0$ unterscheiden zu können. $\square$

Noch eine Bemerkung zum genannten Begriff der *stetigen Familie von stetigen Abbildungen*

$$f_t: \ S^1 \longrightarrow X \ , \ t \in [0,1] \quad .$$

Statt von einer *Familie von Abbildungen* zu reden, kann man sich hier zurückziehen auf die Betrachtung einer einzigen Abbildung. Das geht auf zwei Weisen:

1. man definiert eine Abbildung $F: \ [0,1] \times S^1 \ \longrightarrow X \ , \ (t,s) \longmapsto f_t(s) \ ;$
2. man definiert eine Abbildung $\varphi: \ [0,1] \longrightarrow \{S^1 \, , \, X\} \ , \ t \longmapsto f_t \ .$

Auf dem mengentheoretischen Niveau ist das mehr oder weniger dasselbe; das eine ist nur eine Umformulierung des andern. Wenn man nun den Begriff der *Stetigkeit* präzisieren will, so gibt es bei der ersten Beschreibung eine naheliegende Lösung: man verlangt einfach, daß die ganze Abbildung F stetig ist. Bei der zweiten Beschreibung möchte man analog vorgehen (Stetigkeit von φ) , es ist aber zunächst nicht einmal so ganz klar, was dies heißen soll.

Bei Gelegenheiten wie dieser stellt es sich als wichtig heraus, daß man über eine allgemeine Sprache verfügt, die es gestattet, Aussagen über “Räume” allgemeinen Typs und “stetigen Abbildungen” zwischen diesen zu formulieren.

Topologische Räume

Ziel der Begriffsbildung ist es, mit wenig Mühe sich einen allgemeinen Rahmen zu verschaffen, in dem es sinnvoll ist, von *stetigen Abbildungen* zu reden.

Ich will an Bekanntes anknüpfen, nämlich an die ε–δ–Definition der stetigen Abbildungen. Zur Formulierung der ε–δ–Definition braucht man einen Raum, in dem ein *Abstands–Begriff* erklärt ist; so etwas nennt man einen *metrischen Raum*.

Definition. Eine *Distanzfunktion* auf einer Menge X ist eine Abbildung in die nichtnegativen reellen Zahlen, $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(x, y) \longmapsto d(x, y)$, die den folgenden Bedingungen genügt:

— $d(x, y) = 0 \iff x = y$

— $d(x, y) = d(y, x)$

— $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*Dreiecksungleichung*).

Die Menge X zusammen mit der Distanzfunktion d heißt ein *metrischer Raum*.

Beispiele. 1. Jeder normierte Vektorraum V ist ein metrischer Raum: wenn $\| \; \|$ die Norm auf V bezeichnet, so ist die Distanzfunktion gegeben durch $d(v, w) = \|v - w\|$.

2. Jede Untermenge eines metrischen Raumes ist wieder ein metrischer Raum: man nimmt die eingeschränkte Funktion als Distanzfunktion.

Sobald man eine Distanzfunktion hat, kann man Begriffe wie *Kugeln* erklären. Wie üblich gibt es davon zwei Sorten: offene Kugeln und abgeschlossene Kugeln.

Sei X metrischer Raum mit Distanzfunktion d . Sei ε eine positive reelle Zahl. Für $x \in X$ definiert man die

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{offene} \\ \text{abgeschlossene} \end{array} \right\} \qquad \varepsilon\text{–Kugel} \qquad \left\{ \begin{array}{l} U(x, \varepsilon) = \{ y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \} \\ B(x, \varepsilon) = \{ y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon \} \end{array} \right\}$$

Man kann auch *Stetigkeit* erklären.

Sei $f : X \longrightarrow Y$ Abbildung von metrischen Räumen. Sei x ein Punkt aus X . Wir sagen, f *ist stetig im Punkt* $x \in X$, wenn folgendes gilt: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit $d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$; oder, was dasselbe ist,

$$f(\,U(x, \delta)\,) \subset U(\,f(x), \varepsilon\,) \ .$$

Wie üblich können wir nun sagen, daß die Abbildung f *stetig* (schlechthin) heißen soll, wenn sie in allen Punkten von X stetig ist.

Kann man die Definition der Stetigkeit so umformulieren, daß ε und δ nicht mehr explizit vorkommen? Wir benötigen eine neue Vokabel.

Definition. Sei x ein Punkt aus X , wo X ein metrischer Raum ist. Sei U eine Teilmenge von X . Wir wollen sagen, daß U eine *Umgebung von* x ist , wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß

$$U(x,\varepsilon) \subset U \ .$$

Satz. *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *eine Abbildung von metrischen Räumen und sei* $x \in X$ *. Es ist* f *stetig in* x *genau dann, wenn zu jeder Umgebung* V *von* $f(x)$ *eine Umgebung* U *von* x *existiert mit* $f(U) \subset V$ *.*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Sei die Umgebung V von $f(x)$ vorgegeben. Nach Definition von *Umgebung* existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß $U(f(x),\varepsilon) \subset V$. Wegen der Stetigkeit in x existiert ein $\delta > 0$ mit $f(U(x,\delta)) \subset U(f(x),\varepsilon)$. Wir setzen $U := U(x,\delta)$. Dann ist U Umgebung von x und $f(U) \subset V$.

" $\Leftarrow$ " Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist $U(f(x),\varepsilon)$ Umgebung von $f(x)$. Wegen der Annahme existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset U(f(x),\varepsilon)$. Nach Definition von *Umgebung* nun existiert ein $\delta > 0$ mit $U(x,\delta) \subset U$. Es folgt $f(U(x,\delta)) \subset U(f(x),\varepsilon)$. □

Können wir diese Definition weiter so umformulieren, daß Punkte nicht mehr explizit genannt werden? Anders gesagt, können wir die *globale Stetigkeit* definieren *ohne* vorher von der lokalen Stetigkeit reden zu müssen? Wir benötigen eine neue Vokabel.

Definition. Eine Teilmenge $O \subset X$ heißt *offen*, wenn sie zu jedem ihrer Punkte noch eine ganze Umgebung enthält.

Beispiele. 1. Eine *offene Kugel* im Sinne der oben gegebenen Definition ist eine offene Menge. Es ist klar (oder?), daß das aus der Dreiecksungleichung folgt.

2. Sei $x \in X$ und sei U Umgebung von x ; dann enthält U noch eine *offene Umgebung*, d.h. eine Umgebung, die gleichzeitig eine offene Menge ist. Denn nach Definition von *Umgebung* enthält U z.B. noch eine offene Kugel.

Satz. *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *Abbildung von metrischen Räumen. Es ist* f *stetig genau dann, wenn für jede offene Teilmenge* O' *des Zielraumes* Y *gilt, daß* $f^{-1}(O')$ *eine offene Menge in* X *ist* ("Urbilder offener Mengen sind offen").

Beweis. " $\Rightarrow$ " Sei O' offen in Y und sei $x \in f^{-1}(O')$. Zu zeigen: $f^{-1}(O')$ enthält eine Umgebung von x . Weil O' offen und $f(x) \in O'$, ist O' Umgebung von $f(x)$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset O'$, also $U \subset f^{-1}(O')$.

" $\Leftarrow$ " Sei V Umgebung von $f(x)$. Zu zeigen: es gibt Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Die Umgebung V enthält eine offene Umgebung V' von x (s. oben). Wegen der Annahme ist $f^{-1}(V')$ offen in X , und es gilt $x \in f^{-1}(V')$. Daher ist $f^{-1}(V')$ Umgebung von x . Wir setzen $U := f^{-1}(V')$. □

Wir nehmen die in dem vorstehenden Satz genannte Charakterisierung der Stetigkeit zum Anlaß für eine Definition.

Definition. Ein *topologischer Raum* besteht aus
— einer Menge X (= "*unterliegende Punktmenge*") und
— einem System von Teilmengen von X, die *offene Mengen* genannt werden;
dabei soll dieses System gewissen naheliegenden Bedingungen formaler Art genügen, die wir später formulieren werden. Ein solches System wird auch als *topologische Struktur auf* X, oder kurz als *Topologie auf* X bezeichnet.

Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen wird als *stetig* bezeichnet, wenn sie die Bedingung erfüllt: *Urbilder offener Mengen sind offen.*

Beispiel. Einem metrischen Raum ist ein topologischer Raum zugeordnet: die unterliegende Menge ist dieselbe wie die des metrischen Raumes; die *offenen Mengen* sind definiert sind als diejenigen, die wir auch früher schon so bezeichnet haben (d.h., es sind diejenigen Teilmengen, die mit jedem ihrer Punkte noch eine Kugel um diesen Punkt enthalten). Etwas kürzer (und nur ein wenig mißbräuchlich) werden wir auch sagen: ein metrischer Raum *ist* auch ein topologischer Raum.

Die *Bedingungen* (= "*Axiome*"), denen das System der offenen Mengen genügen muß, kann man am besten vielleicht so sich merken: *Offene Mengen* stelle man sich vor als solche Mengen, die zu jedem ihrer Punkte noch eine ganze *Umgebung* enthalten (wobei "*Umgebung*" ein bisher undefinierter Begriff ist!). Die Bedingungen lauten:

O1. Die leere Menge ist offen.

O2. Der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen ist wieder offen.
(Denn wenn zwei Mengen "Umgebung" eines Punktes sind, so auch ihr Durchschnitt. Ebenso ist auch der Durchschnitt von *endlich vielen* offenen Mengen wieder offen (das entsprechende Axiom folgt *formal* aus O2).)

O3. Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist wieder offen.
(Denn jeder Punkt der Vereinigung liegt in einer der Mengen, und diese enthält eine ganze "Umgebung", also enthält auch die Vereinigung eine "Umgebung".)

O4. Die ganze Menge X ist offen.
(Wegen O3 ist hierzu äquivalent, daß jeder Punkt in mindestens einer offenen Menge liegt — oder in unserer inoffiziellen Sprechweise, daß jeder Punkt mindestens eine "Umgebung" besitzt.)

Zurück nun zu den metrischen Räumen! Wir spezialisieren noch ein bißchen mehr.

Sei V ein normierter $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Norm $\| \; \|$. Wie wir schon gesehen haben, kann man V als metrischen Raum auffassen mit der Distanzfunktion $d(x,y) = \|x-y\|$. Diese induziert eine topologische Struktur auf V durch die Vorschrift:

Zusatz zu S. 17 (zur Äquivalenz von Normen)

Sei V ein $\mathbb{R}$ –Vektorraum. Seien $|\ |_1$ und $|\ |_2$ zwei Normen auf V .

Bezeichne $U_{①}(x,r)$ die offene Kugel bezüglich der ersten Norm, mit Mittelpunkt x und Radius r . Etc. (wie im Skript).

Sei C positive Konstante.

Behauptung. Es sind äquivalent:

1. Für alle v ist $|v|_2 \leq C|v|_1$.
2. Für jedes $r > 0$ ist $B_{①}(0,r) \subset B_{②}(0,Cr)$; allgemeiner: $B_{①}(x,r) \subset B_{②}(x,Cr)$.
3. Für jedes $r > 0$ ist $U_{①}(0,r) \subset U_{②}(0,Cr)$; allgemeiner: $U_{①}(x,r) \subset U_{②}(x,Cr)$.

Beweis. “1. ⇒ 2.” Die Behauptung von (2) ist: $|x-y|_1 \leq r \implies |x-y|_2 \leq Cr$. Das ist aber klar wegen

$$|x-y|_1 \leq r \iff C|x-y|_1 \leq Cr \quad \text{und} \quad |x-y|_2 \leq C|x-y|_1 .$$

“1. ⇒ 3.” Die Behauptung ist: $|x-y|_1 < r \implies |x-y|_2 < Cr$. Das geht genauso.

“2. ⇒ 1.” Wenn $v = 0$, dann ist (1) klar; sei also $v \neq 0$. Dann ist $B_{①}(0,|v|_1)$ definiert, und $v \in B_{①}(0,|v|_1)$. Folglich ist $v \in B_{①}(0,|v|_1) \subset B_{②}(0,C|v|_1)$; also $|v|_2 \leq C|v|_1$.

“3. ⇒ 1.” Wie im vorigen Fall nehmen wir wieder an, daß $v \neq 0$. Der jetzige Fall ist ein wenig komplizierter als der vorige, da $v \notin U_{①}(0,|v|_1)$.

Sei (a_n) eine Folge von reellen Zahlen mit $a_n > 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ (z.B. die Folge $a_n = 1 + 1/n$). Dann ist

$$v \in U_{①}(0, a_n|v|_1) \quad (\text{ weil ja } |v|_1 < a_n|v|_1 \ )$$

also nach (3) auch $v \in U_{②}(0, Ca_n|v|_1)$, d.h. $|v|_2 < Ca_n|v|_1$.

Das gilt nun für alle n . Da $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, folgt $|v|_2 \leq C|v|_1$.

Folgerung.

Die beiden Normen $|\ |_1$ und $|\ |_2$ heißen *äquivalent* wenn positive Konstanten C und C' existieren, so daß für alle $v \in V$ gilt

$$|v|_2 \leq C|v|_1 \quad \text{und} \quad |v|_1 \leq C'|v|_2 .$$

Nach dem obigen läßt sich dies auch so formulieren, daß für alle r gilt

$$U_{①}(0,r) \subset U_{②}(0,Cr) \quad \text{und} \quad U_{②}(0,r) \subset U_{①}(0,C'r) ;$$

und allgemeiner auch:

$$U_{①}(x,r) \subset U_{②}(x,Cr) \quad \text{und} \quad U_{②}(x,r) \subset U_{①}(x,C'r)$$

(für alle $x \in V$).

Eine Teilmenge O von V ist *offene Menge in* V genau dann, wenn gilt: für jedes $x \in O$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U(x, \varepsilon) \subset O$. Nun gibt es Fälle (die nicht einmal selten sind) wo derselbe Vektorraum mit mehreren Normen versehen ist.

Beispiele. (a)

$$\mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \text{euklidischer Norm} \\ \text{Maximum–Norm} \end{cases}$$

(b) Der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0, 1]$

$$\text{mit} \quad \begin{cases} \text{Maximum–Norm} & \|f\|_\infty = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)| \\ L^1\text{–Norm} & \|f\|_1 = \int |f| \\ L^2\text{–Norm} & \|f\|_2 = \left(\int f^2\right)^{1/2} \end{cases}$$

Im Beispiel (a) sind die Normen *äquivalent* zueinander, in Beispiel (b) nicht. Was heißt das für die topologische Struktur?

Satz. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum. Seien $|\ |_1$ und $|\ |_2$ zwei Normen auf V. Dann sind gleichbedeutend:

1. Die Normen $|\ |_1$ und $|\ |_2$ sind äquivalent.
2. Die Normen $|\ |_1$ und $|\ |_2$ induzieren auf V dieselbe topologische Struktur.

Beweis. "1. $\Rightarrow$ 2." Zu zeigen: jede offene Menge bezüglich der ersten topologischen Struktur ist auch offen bezüglich der zweiten, und umgekehrt. Sei $O \subset V$, sei O offen bezüglich der ersten Struktur. Wenn $x \in O$, so existiert (nach Definition) ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{①}(x, \varepsilon) \subset O$. Wegen 1. existiert folglich auch ein $\varepsilon' > 0$ mit $U_{②}(x, \varepsilon')\ (\subset U_{①}(x, \varepsilon)) \subset O$. Da das für alle $x \in O$ gilt, folgt (nach Definition), daß O offen bezüglich der zweiten Struktur ist. — Die Umkehrung geht analog.

"2. $\Rightarrow$ 1." Zu zeigen: jede Kugel (um den Nullpunkt) bezüglich der ersten Norm enthält eine Kugel bezüglich der zweiten Norm, und umgekehrt. Sei $U_{①}(0, \varepsilon)$ eine Kugel bezüglich der ersten Norm. Dann ist $U_{①}(0, \varepsilon)$ offen bezüglich der ersten topologischen Struktur und wegen 2. deshalb auch offen bezüglich der zweiten Struktur. Also existiert (nach Definition) ein $\varepsilon' > 0$ mit $U_{②}(0, \varepsilon') \subset U_{①}(0, \varepsilon)$. — Die Umkehrung geht analog. □

Folgerung. Es gibt Fälle, wo *ein– und dieselbe Menge* mit *verschiedenen* topologischen Strukturen betrachtet wird, nämlich etwa, wie wir gerade gesehen haben, der Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[0, 1]$ mit den von verschiedenen Normen induzierten Topologien.

Dieses Phänomen, daß ein– und dieselbe Menge mit verschiedenen Topologien versehen ist, kommt aber sonst in dieser Vorlesung nur selten vor.

In dem Zusammenhang ist noch ein Ihnen aus der Analysis bekannter Sachverhalt von Interesse: Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum *endlicher Dimension*. Dann sind alle Normen auf V zueinander äquivalent. Mit dem obigen Satz folgt dann: *Wie auch immer man sich auf einem* $\mathbb{R}^n$ *eine Norm verschafft, die induzierte Topologie ist immer dieselbe.*

Nach diesem Exkurs zu metrischen Räumen wenden wir uns wieder den topologischen Räumen allgemein zu.

Als heuristisches Prinzip hatten wir uns vorgestellt, daß der axiomatische (="nicht von vornherein mit einem bestimmten Inhalt versehene") Begriff der *offenen Menge* solche Mengen bezeichnet, die zu jedem ihrer Punkte noch eine ganze "Umgebung" enthalten (der Begriff "Umgebung" war dabei ein undefinierter Term; er ist aber, zumindest für meinen eigenen Geschmack, doch etwas anschaulicher als der Begriff der "offenen Menge").

Kann man aus diesem heuristischen Prinzip einen wahren Sachverhalt machen? Um das zu tun, muß natürlich gesagt werden, was denn eine "Umgebung" eigentlich sein soll. Wir benötigen eine neue Definition.

Definition. Sei X ein topologischer Raum, sei $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung von* x, wenn eine offene Menge O in X existiert, mit $x \in O \subset U$.

Selbstverständlich müssen wir uns hier fragen, ob der neue Sprachgebrauch mit dem alten kompatibel ist in den Fällen, wo es eine Überschneidung gibt. Das ist der Fall:

Bemerkung. Wenn X ein metrischer Raum ist, dann stimmt der neue Umgebungsbegriff überein mit dem, den wir früher eingeführt haben. Denn sei $x \in X$;

— ist U Umgebung von x im alten Sinn, so existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(x, \varepsilon) \subset U$. Nun ist $U(x, \varepsilon)$ offene Menge, also ist U auch Umgebung von x im neuen Sinn.

— ist umgekehrt U Umgebung von x im neuen Sinn, so existiert eine offene Menge O mit $x \in O \subset U$. Nach Definition der *offenen Mengen* in einem metrischen Raum existiert $\varepsilon' > 0$, $U(x, \varepsilon') \subset O$. Damit ist O und somit auch U Umgebung im alten Sinn. $\square$

Wir können nun wieder einen Satz formulieren. Vom Inhalt her ist er nicht besonders aufregend. Man mag ihn als Beleg dafür ansehen, daß uns bei unseren bisherigen Sprachübungen keine allzu groben Schnitzer unterlaufen sind.

Satz. Sei X topologischer Raum. Sei W Teilmenge von X (genauer: W sei Teilmenge der unterliegenden Menge von X). Es sind äquivalent:

1. W ist offene Menge in X.
2. Die Menge W enthält mit jedem ihrer Punkte noch eine ganze Umgebung.

Beweis. "1. $\Rightarrow$ 2." Wenn $x \in W$, dann ist W selbst Umgebung von x (nach Definition von *Umgebung*).

"2. $\Rightarrow$ 1." Wegen der Annahme 2. existiert zu jedem $x \in W$ eine offene Menge O_x mit $x \in O_x \subset W$. Es ist $\bigcup_{x \in W} O_x \subset W$ (weil $O_x \subset W$ für alle x) und $W \subset \bigcup_{x \in W} O_x$ (jedes $x \in W$ liegt in einem der O_x), also ist $W = \bigcup_{x \in W} O_x$ als Vereinigung von offenen Mengen selbst wieder offen (Axiom O3). $\square$

Bei der Definition des *topologischen Raumes* haben wir den Begriff der *offenen Menge* als den primitiven (oder axiomatischen) Begriff genommen und wir haben den Begriff der *Umgebung* später daraus abgeleitet. Der vorige Satz macht plausibel, daß man auch umgekehrt vorgehen könnte, d.h. man könnte den Begriff der *Umgebung* als den primitiven Begriff nehmen und daraus den Begriff der *offenen Menge* dann herleiten. Technisch gesehen läuft das darauf hinaus, daß man ein geeignetes Axiomensystem für *Umgebungen* angibt. Ein solches System kann man in Büchern finden; ich möchte hier nicht weiter darauf eingehen. In der Praxis ist es meistens bequemer, mit offenen Mengen zu arbeiten; der Unterschied ist aber nicht groß.

Das Hantieren mit offenen Mengen will ich jetzt illustrieren anhand von zwei wichtigen Begriffsbildungen, nämlich der Konstruktion von *Unterräumen* einerseits und der von *Quotientenräumen* andererseits.

Im ersten Fall geht es um folgende Frage: Gegeben seien ein topologischer Raum X und eine *Untermenge* Y in X (das könnte man etwas genauer (pedantischer?) auch so formulieren, daß Y gegeben sei als Teilmenge der *unterliegenden Menge* von X). Man möchte in dieser Situation Y nun wieder als topologischen Raum auffassen können. Das geht auch in ziemlich naheliegender Weise. (Man denke an den entsprechenden Sachverhalt bei metrischen Räumen.)

Im zweiten Fall geht es um eine ganz analoge Frage, nur daß man jetzt nicht eine *Untermenge* von X betrachtet, sondern eine *Quotientenmenge* von X ; oder, was dasselbe ist, die Menge von Äquivalenzklassen bezüglich einer Äquivalenzrelation auf X (bzw. genauer wieder, der unterliegenden Menge von X). Eine ganz wichtige Bemerkung an dieser Stelle ist die, daß es zwar bei der Frage, *nicht aber bei ihrer Antwort*, eine vernünftige Entsprechung bei den metrischen Räumen gibt. Das ist einer der Gründe, warum es notwendig ist, topologische Räume überhaupt zu betrachten.

Bemerkung. Für das folgende beachte man, daß zu einer *Untermenge* Y von X immer eine ganz bestimmte Abbildung $Y \longrightarrow X$ gehört. Diese Abbildung ist injektiv und wird als die *kanonische Inklusion* bezeichnet.

Analog dazu gehört zu einer *Quotientenmenge* Z von X immer eine ganz bestimmte Abbildung $X \longrightarrow Z$. Diese Abbildung ist surjektiv und wird als die *kanonische Projektion* bezeichnet.

Definition und Satz. Sei (X , *System der offenen Mengen in* X) ein topologischer Raum. Sei Y Untermenge von X . Folgende Vorschrift definiert eine topologische Struktur auf Y , die sogenannte *Unterraumtopologie*:

> Eine Teilmenge O' in Y heiße *offene Menge in* Y genau dann, wenn es eine offene Menge O in X gibt mit $O \cap Y = O'$.

Der Raum Y wird auch als ein *Unterraum von* X bezeichnet. Die Inklusion $Y \longrightarrow X$ ist stetige Abbildung.

Definition und Satz. Sei (X , *System der offenen Mengen in* X) ein topologischer Raum. Sei Z eine Quotientenmenge von X und bezeichne $q : X \longrightarrow Z$ die kanonische Projektion. Folgende Vorschrift definiert eine topologische Struktur auf Z , die sogenannte *Quotiententopologie*:

> Eine Teilmenge O' in Z heiße *offene Menge in* Z genau dann, wenn $q^{-1}(O')$ offene Menge in X ist.

Der Raum Z wird auch als ein *Quotientenraum* von X bezeichnet. Die Abbildung $X \longrightarrow Z$ (die kanonische Projektion) ist stetig.

Es ist jetzt nachzuweisen, daß die oben definierten Systeme wirklich topologische Strukturen auf der Untermenge Y bzw. auf der Quotientenmenge Z liefern; das heißt, es ist nachzuweisen (in jedem der beiden Fälle), daß die Axiome O1 – O4 gelten. Ich will das hier nur für den Fall der Quotiententopologie vorführen:

Axiom O1: *Die leere Menge ist offen*,
aber $q^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ist offen in X , also folgt (Def. der Quotiententopologie) daß auch $\emptyset$ offen in Z .

Axiom O2: *Der Durchschnitt von zwei offenen Mengen ist offen*,
aber O, O' offen in $Z \iff q^{-1}(O)$ und $q^{-1}(O')$ offen in $X \implies q^{-1}(O) \cap q^{-1}(O') = q^{-1}(O \cap O')$ offen in $X \iff O \cap O'$ offen in Z .

Axiom O3: *Die Vereinigung von offenen Mengen ist offen*,
aber O_i , $i \in I$, offene Menge in $Z \iff q^{-1}(O_i)$ offen in $X \implies \bigcup_{i \in I} q^{-1}(O_i) = q^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} O_i\right)$ offen in $X \iff \bigcup_{i \in I} O_i$ offen in Z .

Axiom O4: *Die unterliegende Menge selbst ist offen*,
aber $q^{-1}(Z) = X$ offen in $X \implies Z$ offen in Z .

Es ist auch nachzuweisen, daß die Abbildung $X \longrightarrow Z$ stetig ist. Das ist aber klar (oder?). □

Die Konstruktion von Quotientenräumen gestattet es uns, eine sehr wichtige Idee auch mathematisch zu erfassen; nämlich diejenige, neue Räume aus alten zu bekommen mit Hilfe einer "Verklebe"–Konstruktion.

So können wir etwa eine *Strecke* hernehmen und uns vornehmen, davon die Endpunkte *zusammenzufügen*. Ein Versuch, dies zu "mathematisieren" ist der folgende, den wir jetzt näher anschauen wollen.

Wir nehmen das Einheitsintervall $[0,1]$ und betrachten hierauf eine geeignete Äquivalenzrelation: die Punkte 0 und 1 sind zusammen in einer Äquivalenzklasse, dagegen enthält jede andere Äquivalenzklasse nur jeweils einen einzigen Punkt. Der zugehörige *Quotientenraum* (im Sinne der oben gegebenen Definition) wird bezeichnet als *das Intervall mit identifizierten Endpunkten*, $[0,1] \,/\, 0{\sim}1$.

In der Erwartung, daß unsere "Mathematisierung" nicht ganz abwegig war, vermuten wir, daß der Raum $[0,1] \,/\, 0{\sim}1$ topologisch äquivalent ist zum *Kreis*

$$S^1 \;=\; \left\{\, x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x\| = 1 \,\right\} \;\approx\; \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1 \,\right\} \;.$$

Davon wollen wir uns jetzt überzeugen. Wir betrachten die Abbildung $f: [0,1] \longrightarrow S^1$,

$$t \longmapsto f(t) = e^{2\pi i t} \ .$$

Die Abbildung f nun definiert eine Abbildung auf der Quotientenmenge,

$$g: [0,1] \,/\, 0{\sim}1 \ \longrightarrow \ S^1 \ ,$$

(wir haben hier benutzt, daß $f(0) = f(1)$ ist), und es ist klar (oder?), daß letztere Abbildung *bijektiv* ist. Um uns davon zu überzeugen, daß die beiden Räume topologisch äquivalent sind, müssen wir also nur noch zeigen:

(i) die Abbildung g ist stetig, (ii) die Umkehrabbildung g^{-1} ist stetig.

Der Teil (i) ist eine Konsequenz aus der Definition der Quotiententopologie (und, natürlich, der Stetigkeit von f). Man nimmt ihn am besten in allgemeiner Form zur Kenntnis.

Satz. *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *stetige Abbildung. Sei* Z *Quotientenraum von* X (*mit der Quotiententopologie!*). *Bezeichne* $q : X \longrightarrow Z$ *die Projektion. Es gelte, daß die Abbildung* f *über den Quotientenraum* Z *faktorisiert* (als Abbildung von Mengen); *das heißt, daß eine Abbildung* $g : Z \longrightarrow Y$ *existiert, so daß*

$$f = g \circ q \ .$$

Dann ist g *stetige Abbildung.*

Bemerkung. Es ist klar (oder?), daß die Abbildung g eindeutig bestimmt ist.

Beweis des Satzes. Sei $O \subset Y$ offen. Zu zeigen, $g^{-1}(O)$ ist offen in Z . Nach Definition der Quotiententopologie heißt das, daß $q^{-1}\big(g^{-1}(O)\big)$ offen in X ist. Aber $q^{-1}\big(g^{-1}(O)\big) = f^{-1}(O)$, und $f^{-1}(O)$ ist offen wegen der Stetigkeit von f . □

Zurück zu unserer speziellen Abbildung

$$g: [0,1] \,/\, 0{\sim}1 \ \longrightarrow \ S^1 \ .$$

Um die Stetigkeit der Umkehrabbildung g^{-1} nachzuweisen, müssen wir zeigen: g bildet offene Mengen auf offene Mengen ab (für den hier behaupteten Sachverhalt sagt man auch, daß g eine *offene Abbildung* ist). Sei also $O \subset [0,1]\,/\,0{\sim}1$ offene Menge, und sei $x \in O$. Zu zeigen, $g(O)$ enthält noch eine Umgebung von $g(x)$ in S^1 .

Bezeichne $q: [0,1] \longrightarrow [0,1]\,/\,0{\sim}1$ die Projektion. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. *Fall.* $x \neq q(0)$ (*und deshalb auch* $x \neq q(1)$).

Dann enthält $q^{-1}(O)$ ein Intervall $(x{-}\varepsilon,\ x{+}\varepsilon)$. Folglich enthält $g(O) = f\left(q^{-1}(O)\right)$ den Kreisbogen

$$\left\{\, e^{2\pi i t} \ \middle|\ t \in (x{-}\varepsilon,\ x{+}\varepsilon) \,\right\} \ .$$

Dieser Kreisbogen ist eine Umgebung von $g(x)$ in S^1 (*Unterraumtopologie von* S^1 *in* $\mathbb{C}$), denn der Kreisbogen enthält sicherlich den Durchschnitt von S^1 mit einer hinreichend kleinen (Kreis–)Umgebung von $g(x)$ in $\mathbb{C}$.

2. *Fall.* $x = q(0) = q(1)$.

Dann ist $q^{-1}(O)$ offene Teilmenge von $[0,1]$, die 0 *und* 1 enthält; folglich existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1] \subset q^{-1}(O)$, und $g(O) = f\left(q^{-1}(O)\right)$ enthält *wieder* einen Kreisbogen, nämlich $\left\{e^{2\pi it} \mid t \in (-\varepsilon,\ +\varepsilon)\right\}$. □

Bemerkung. Man könnte versucht sein zu glauben, daß der Schritt (ii) in dem vorangegangenen Beweis überflüssig war; das heißt, daß eine stetige bijektive Abbildung automatisch schon eine topologische Äquivalenz sein müßte (daß in dieser Situation die Umkehrabbildung automatisch schon stetig sein müßte). Das ist aber nicht der Fall, wie Gegenbeispiele zeigen: *Die Abbildung*

$$[0,1) \longrightarrow S^1\ , \quad t \longmapsto e^{2\pi it}\ ,$$

ist ein Beispiel für eine stetige, bijektive Abbildung, deren Umkehrabbildung nicht stetig ist. □

Das gerade beschriebene Gegenbeispiel hat aber auch einen erfreulichen Aspekt. Es gibt nämlich einen *Grund* dafür, warum hier tatsächlich zur Vorsicht zu raten ist (einer der Räume in dem Beispiel ist nicht “kompakt”).

Wie wir in Kürze sehen werden, war die Vermutung “eine stetige, bijektive Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ ist schon eine topologische Äquivalenz” (die Umkehrabbildung ist wieder stetig) doch nicht gar so abwegig: dadurch daß man gewisse Bedingungen an die topologischen Räume X und Y stellt, kann man die Aussage retten.

Die Notwendigkeit solcher Bedingungen wird durch das obige Gegenbeispiel belegt. Es handelt sich insbesondere also auch um eine nicht–triviale Aussage; ein Beweis ist unbedingt erforderlich.

Zur Formulierung der Bedingungen benötigen wir zwei Begriffe, die auch sonst von großer Wichtigkeit sind. Es handelt sich um die Begriffe *kompakt* und *Hausdorff–Raum*, die wir jetzt diskutieren wollen.

Doch zunächst notieren wir der Vollständigkeit halber noch eine Vokabel. Man sagt, daß eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X *abgeschlossen* ist, wenn die *komplementäre* Menge

$$CA := \{\, x \in X \mid x \notin A \,\}$$

eine offene Menge in X ist.

Es gilt also: Das Komplement einer offenen Menge ist abgeschlossen; und das Komplement einer abgeschlossenen Menge ist offen.

Es gilt auch (warum?), daß man Stetigkeit durch abgeschlossene Mengen charakterisieren kann: Eine Abbildung von topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn sie die Bedingung erfüllt: *Urbilder von abgeschlossenen Mengen sind wieder abgeschlossen.*

Kompakte Räume und Hausdorff–Räume

Ein topologischer Raum X wird als *Hausdorff–Raum* bezeichnet, wenn er die folgende Bedingung erfüllt: Zu je zwei Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$, gibt es offene Mengen O_x und O_y mit

$$x \in O_x \ , \ y \in O_y \ \text{ und } \ O_x \cap O_y = \emptyset \ ;$$

man sagt auch: *Punkte lassen sich durch offene Mengen trennen*.

Auf den ersten Blick mag die Eigenschaft (oder vielmehr die Tatsache, daß man sie als *spezielle* Eigenschaft ausdrücklich fordert) ein wenig kurios erscheinen. Metrische Räume haben die Eigenschaft selbstverständlich (davon werden wir uns sogleich überzeugen). Man mag sich wundern, daß hier ein *Raum*–Begriff überhaupt Gegenstand der Betrachtung ist, wo diese Bedingung nicht automatisch eingebaut ist. Das hat aber ganz pragmatische Gründe. So ist es bei der Quotientenraum–Konstruktion keineswegs so, daß das Resultat automatisch immer ein Hausdorff–Raum wäre. Wenn man nun etwa darauf bestanden hätte, daß “Raum” automatisch schon “Hausdorff–Raum” bedeuten solle, so hätte das die fatale Konsequenz, daß die Quotientenraum–Konstruktion nicht einmal allgemein definiert wäre! Man hätte dann z.B. auch erhebliche Schwierigkeiten, die wichtige Tatsache zu diskutieren, daß in einigen besonders interessanten Situationen die Quotientenraum–Konstruktion tatsächlich immer auf Hausdorff–Räume führt.

Metrische Räume haben die Hausdorff–Eigenschaft, wie schon angedeutet wurde. Denn sei M metrischer Raum, seien $x, y \in M$ und $\varepsilon = d(x, y)$. Wenn $x \neq y$, dann ist $\varepsilon > 0$. Wir definieren $O_x = U\big(x, \frac{\varepsilon}{2}\big)$, $O_y = U\big(y, \frac{\varepsilon}{2}\big)$. Dann sind O_x und O_y offene Mengen (nämlich offene Kugeln) und punktfremd.

Auch Unterräume von Hausdorff–Räumen sind wieder Hausdorff–Räume. Denn sei X Hausdorff–Raum und $Y \subset X$ Unterraum. Seien $x, y \in Y$. Nach Voraussetzung über X existieren offene Mengen O und O' in X , die x und y trennen. Dann sind $O \cap Y$ und $O' \cap Y$ offene Mengen in Y , die x und y trennen.

Bei topologischen Räumen schlechthin bedeutet die Hausdorff–Eigenschaft andererseits eine arge Einschränkung der Allgemeinheit. Auch dies kann man illustrieren an dem beliebten Spielmaterial der Räume mit endlich vielen Punkten: Ist X topologischer Raum mit nur endlich vielen Punkten und gleichzeitig ein Hausdorff–Raum, dann ist X ein *diskreter* Raum (d.h., *jede* Teilmenge von X ist eine offene Menge). Hierzu genügt es, zu wissen, daß für jedes $x \in X$ die Teilmenge $\{x\}$ offen ist (denn jede andere Teilmenge ist Vereinigung von solchen Mengen, und eine Vereinigung von offenen Mengen ist wieder offen). Wegen der Voraussetzung “Hausdorff” nun gibt es zu jedem $y \in X$ eine offene Menge $O_{x,y}$ mit $x \in O_{x,y}$, $y \notin O_{x,y}$. Dann ist

$$\{x\} \ = \ \bigcap_{y,\, y \neq x} O_{x,y}$$

ein Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen, und daher selbst offen.

Ich komme jetzt zum Begriff der *Kompaktheit*. Sie kennen diesen Begriff aus der Analysis: Er garantiert, daß jede Folge mindestens einen Häufungspunkt hat. Die meisten von Ihnen werden wohl noch wissen, daß es mehrere Möglichkeiten gibt, zu definieren, wann eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ kompakt sein soll; und daß alle diese Möglichkeiten auf denselben Begriff führen.

Gegenwärtig hantieren wir aber mit "Räumen" sehr allgemeiner Art, und da ist es nicht überraschend, daß diese verschiedenen Begriffe nicht mehr ganz äquivalent sind. Deshalb brauchen wir hier verschiedene Namen.

Man sagt, ein Raum X ist *folgen–kompakt*, wenn er die Bolzano–Weierstraß Eigenschaft hat; d.h., wenn gilt, daß jede Folge in X mindestens einen Häufungspunkt in X hat. (In manchen Texten wird hier auch die (stärkere) Eigenschaft verlangt, daß jede Folge in X tatsächlich eine konvergente Teilfolge haben soll.)

Der "bessere" Begriff, zu dem ich jetzt komme, postuliert die sogenannte *Überdeckungs–Eigenschaft*. Auch dazu ist die Terminologie in der Literatur nicht ganz einheitlich. Das kommt daher, daß man sich festlegen muß, ob *kompakt* die Hausdorff–Eigenschaft beinhalten soll oder nicht (d.h., ob "kompakter Raum" gleichbedeutend sein soll mit "kompakter Hausdorff–Raum"). Wir wollen das so machen, und wir brauchen deshalb für die Überdeckungseigenschaft selbst einen gesonderten Namen.

Wir benötigen noch einige Vokabeln. Sei X ein topologischer Raum. Eine *offene Überdeckung von* X soll einfach eine indizierte Menge von offenen Mengen bezeichnen, die insgesamt den Raum überdecken,

$$\{O_i\}_{i\in I} \ , \ O_i \textit{ offen in } X \ , \quad \bigcup_{i\in I} O_i \ = \ X \ .$$

Eine *Teil–Überdeckung* der offenen Überdeckung $\{O_i\}_{i\in I}$ bedeutet ein Teilsystem dieser offenen Mengen, das immer noch ganz X überdeckt; d.h. also, eine Teilmenge $J \subset I$ mit

$$\bigcup_{i\in J} O_i \ = \ X \ .$$

Eine (Teil–)Überdeckung heißt *endlich*, wenn die Indexmenge J eine endliche Menge ist.

Definition. Sei X topologischer Raum. X heißt *quasi–kompakt*, wenn gilt: Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung.

Definition. Sei X topologischer Raum. X heißt *kompakt*, wenn gilt: X ist quasi–kompakt und ein Hausdorff–Raum.

Folgender Sachverhalt ist sicher schon aus der Analysis bekannt. Er soll trotzdem hier noch einmal behandelt werden. Er ist sehr wichtig.

Satz. *Der Raum* $[0,1]$ *ist kompakt.*

Beweis. Die Hausdorff–Eigenschaft ist klar, denn $[0,1]$ ist metrischer Raum. Es bleibt zu zeigen, daß $[0,1]$ quasi–kompakt ist. Sei also $\{O_i\}_{i\in I}$ eine vorgegebene offene Überdeckung von $[0,1]$. Wir wollen zeigen, daß diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dazu betrachten wir Teilintervalle der Art $[0,a]\subset[0,1]$. Wir werden sagen, daß der Punkt a *gut* ist, wenn das Teilintervall $[0,a]$ überdeckt werden kann durch endlich viele der offenen Mengen O_i . Es bezeichne G die Menge der guten a . In dieser Sprache ist dann unsere Behauptung gerade die, daß $1\in G$. Um die Behauptung einzusehen, werden wir die Menge G ein wenig studieren.

Es gilt $0\in G$ (denn $[0,0]$ liegt in einem der O_i) , und wenn $b<a$ und $a\in G$, dann ist auch $b\in G$ (denn wenn $[0,a]$ schon in endlich vielen der $\{O_i\}_{i\in I}$ enthalten ist, dann auch der Teil $[0,b]$ davon). Daher ist G ein Intervall, also entweder $G=[0,g)$ oder $G=[0,g]$. Unsere Behauptung ist, daß $G=[0,1]$ ist. Wir werden zeigen, daß die anderen Fälle nicht möglich sind. Diese (zwei) anderen Fälle sind:

1. *Fall.* $G=[0,g)$ (insbesondere $g\notin G$) . Weil $[0,1]=\bigcup_{i\in I}O_i$, existiert ein i_0 mit $g\in O_{i_0}$. Dies ist eine offene Menge, enthält deshalb eine Umgebung von g und insbesondere auch ein Intervall $[g',g]$, $g'<g$. Wegen $g'<g$ ist $g'\in G$. Nach Definition von G existiert also eine endliche Teilmenge $J\subset I$ mit

$$[0,g']\subset\bigcup_{i\in J}O_i\ .$$

Es folgt $[0,g]=[0,g']\cup[g',g]\subset\bigcup_{i\in J}O_i\cup O_{i_0}$. Aber $J\cup\{i_0\}$ ist auch endliche Menge. Somit erhalten wir einen Widerspruch dazu, daß $g\notin G$.

2. *Fall.* $G=[0,g]$ und $g<1$. Nach Voraussetzung existiert eine endliche Teilmenge $K\subset I$ mit

$$[0,g]\subset\bigcup_{i\in K}O_i=O\ .$$

Weil O offen ist, enthält O mit g auch noch eine Umgebung von g , insbesondere deshalb auch ein Intervall $[g,g'']$, $g<g''\le1$. Es folgt

$$[0,g'']=[0,g]\cup[g,g'']\subset O=\bigcup_{i\in K}O_i\ .$$

Also ist $g''\in G$. Das widerspricht aber der Voraussetzung des 2. Falles (daß g nämlich maximal sein soll unter den *guten* Punkten). □

Satz. *Jedes abgeschlossene Intervall* $[a,b]\subset\mathbb{R}$ *ist kompakt.*

Beweis. Man kann den obigen Beweis übernehmen. Man kann aber auch so schließen:

1. Für alle a,b mit $a<b$ ist $[a,b]$ topologisch äquivalent zu $[0,1]$.

2. Wenn X kompakt ist und Y topologisch äquivalent zu X , dann ist Y ebenfalls kompakt. □

Satz. *Sei* X *topologischer Raum und* $Y \subset X$ *ein Unterraum* (mit der Unterraumtopologie). *Sei* X *quasi–kompakt. Wenn* Y abgeschlossen *in* X *ist, dann ist auch* Y *quasi–kompakt.*

Beweis. Sei $\{O'_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y . Nach Definition der Unterraumtopologie gibt es zu jedem O'_i eine offene Menge O_i in X mit $O_i \cap Y = O'_i$. Das Komplement CY ist offen in X (Y ist abgeschlossen in X , und abgeschlossene Mengen sind ja *nach Definition* solche, deren Komplement offen ist). Also ist

$$\{CY\} \cup \{O_i\}_{i\in I}$$

eine offene Überdeckung von $CY \cup Y = X$. Da X quasi–kompakt ist, gibt es von *jeder* offenen Überdeckung, *speziell also auch von dieser*, eine endliche Teilüberdeckung. Das nun heißt nichts anderes als daß eine endliche Untermenge $J \subset I$ existiert mit $CY \cup \bigcup_{i\in J} O_i = X$. Weil $CY \cap Y = \emptyset$, folgt, daß schon $\{O_i \cap Y\}_{i\in J}$ eine Überdeckung von Y sein muß. $\{O'_i\}_{i\in J}$ ist also endliche Teilüberdeckung der vorgegebenen offenen Überdeckung $\{O'_i\}_{i\in I}$. □

Korollar. *Sei* X *kompakter topologischer Raum und* $Y \subset X$ *abgeschlossener Unterraum. Dann ist* Y *kompakt.*

Beweis. Unsere Sprache ist so, daß "*kompakt*" = "*quasi–kompakt*" + "*Haussdorff*". Nach dem Satz ist Y quasi–kompakt. Und wir haben früher schon notiert, daß ein Unterraum von einem Hausdorff–Raum auch wieder die Hausdorff–Eigenschaft hat. □

Satz. *Sei* X *ein Hausdorff–Raum und* $Y \subset X$ *Unterraum.* Y *sei* (*quasi–*)*kompakt. Dann ist* Y *abgeschlossener Unterraum von* X *.*

Bemerkung. Dieser Satz ist gewissermaßen die Umkehrung des vorherigen Satzes. Zusammen liefern diese beiden Sätze folgende Aussage: Sei X ein kompakter Raum. Sei $Y \subset X$. Dann sind äquivalent:

- Y ist abgeschlossene Teilmenge in X .
- Der Unterraum Y (Unterraumtopologie!) ist kompakt.

Wie wir in Kürze sehen werden, kann man diesen Sachverhalt auffassen als eine abstrakte Version (und Verallgemeinerung) des Satzes von Heine–Borel, daß eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. *In der Situation des obigen Satzes* ($Y \subset X$ (quasi–)kompakt, X Hausdorff) *gilt: Zu jedem Punkt* $x \in X - Y$ *existieren offene Teilmengen* $O_{x,Y}$ *und* $O'_{x,Y}$ *von* X *mit* $x \in O_{x,Y}$, $Y \subset O'_{x,Y}$, $O_{x,Y} \cap O'_{x,Y} = \emptyset$.

Beweis. Sei $x \in X - Y$ vorgegeben. Zu jedem Punkt $y \in Y$ finden wir offene Mengen $O_{x,y}$ und $O'_{x,y}$ in X mit $x \in O_{x,y}$, $y \in O'_{x,y}$, $O_{x,y} \cap O'_{x,y} = \emptyset$ (dies benutzt die Hausdorff–Eigenschaft von X). $\left\{O'_{x,y} \cap Y\right\}_{y\in Y}$ ist nun eine offene Überdeckung von Y , wir können deshalb die vorausgesetzte Quasi–Kompaktheit von Y anwenden um zu schließen, daß eine endliche Teilüberdeckung $\left\{O'_{x,y} \cap Y\right\}_{y \in J}$ existiert; mit anderen Worten, wir können schließen, daß eine *endliche* Indexmenge $J \subset Y$ existiert, so daß $Y \subset \bigcup_{y \in J} O'_{x,y}$. Wir setzen

$$O_{x,Y} = \bigcap_{y \in J} O_{x,y} \quad , \quad O'_{x,Y} = \bigcup_{y \in J} O'_{x,y} \quad .$$

Die Endlichkeit von J ergibt dann, daß $O_{x,Y}$ als Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen wieder offen ist. Schließlich ist $O'_{x,Y} \cap O_{x,Y} = \emptyset$, denn

$$O'_{x,Y} \cap O_{x,Y} = \Big(\bigcup_{y \in J} O'_{x,y}\Big) \cap \Big(\bigcap_{z \in J} O_{x,z}\Big) = \bigcup_{y \in J} \Big(O'_{x,y} \cap \bigcap_{z \in J} O_{x,z} \Big)$$

und jede der Mengen $O'_{x,y} \cap \bigcap_{z \in J} O_{x,z}$ ist $= \emptyset$, da schon $O'_{x,y} \cap O_{x,y} = \emptyset$ ist. □

Beweis des Satzes. Zu zeigen ist, daß das Komplement CY eine offene Menge ist. Nach dem Hilfssatz ist aber

$$CY = \bigcup_{x \in CY} O_{x,Y} \ ,$$

was als Vereinigung von offenen Mengen wieder offen ist. □

Der folgende Satz ist ein schönes Beispiel für einen nicht–trivialen (und wichtigen) Satz mit einem recht trivialen Beweis (dies illustriert, wie nützlich eine angemessene Sprache sein kann!). Der Satz kann aufgefaßt werden als abstrakte Version des *Maximum–Prinzips*, daß nämlich jede stetige reelle Funktion auf $[0,1]$ ihr Maximum wirklich annimmt.

Satz. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ stetige surjektive Abbildung. Sei X quasi–kompakt. Dann ist auch Y quasi–kompakt.*

Beweis. Wir testen dies an einer vorgegebenen offenen Überdeckung $\{O_i\}_{i \in I}$ von Y . Wegen der Stetigkeit von f nun ist $f^{-1}(O_i)$ offen in X ; das bedeutet, daß das System $\left\{f^{-1}(O_i)\right\}_{i \in I}$ auch eine offene Überdeckung von X ist. Da X quasi–kompakt ist, existiert von dieser Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung; das heißt, es gibt eine endliche Indexmenge $J \subset I$, so daß

$$X = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(O_i) \ .$$

Weil f surjektiv ist, folgt

$$Y = f(X) = \bigcup_{i \in J} O_i \ ;$$

die Überdeckung von Y hat also ebenfalls eine endliche Teilüberdeckung, wie behauptet. □

Durch Zusammenbauen der vorherigen Sätze erhalten wir eine wichtige Aussage, die vielseitig verwendbar ist. Insbesondere die nachfolgenden Korollare dieses Satzes werden oft gebraucht.

SATZ. *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *eine stetige Abbildung. Es gelte*

— X *ist quasi–kompakt*

— Y *ist Hausdorff*

Dann ist f *eine abgeschlossene Abbildung*, d.h., f hat die folgende Eigenschaft: *Ist* A *abgeschlossene Menge in* X *, dann ist* $f(A)$ *abgeschlossene Menge in* Y *.*

BEWEIS. $$A \subset X \text{ abgeschlossen} \underset{(X \text{ quasi–kompakt})}{\Longrightarrow} A \text{ quasi–kompakt}$$
$$\Longrightarrow f(A) \text{ quasi–kompakt} \underset{(Y \text{ Hausdorff})}{\Longrightarrow} f(A) \text{ abgeschlossen.}$$ □

KOROLLAR 1. *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *stetige bijektive Abbildung. Sei* X *quasi–kompakt und* Y *Hausdorff. Dann ist* f *topologische Äquivalenz.*

BEWEIS. Es ist zu zeigen, daß die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist. Aber

$$f^{-1} \textit{ stetig} \iff \textit{für offenes } O \textit{ in } X \textit{ ist } \left(f^{-1}\right)^{-1}(O) \textit{ offen in } Y\,.$$

Per Übergang zum Komplement ist das gleichbedeutend damit, daß

$$\textit{für abgeschlossenes } A \textit{ in } X \textit{ ist } \left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A) \textit{ abgeschlossen in } Y\,;$$

d.h., daß f *abgeschlossene Abbildung* ist. Das sagt aber gerade der Satz. □

BEISPIEL. Das Korollar sagt, daß die stetige Abbildung $g : [0,1]\,/\,0{\sim}1 \longrightarrow S^1$ eine topologische Äquivalenz ist. □

KOROLLAR 2. (*Quotientenraum–Kriterium*). *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *stetige surjektive Abbildung. Sei* X *quasi–kompakt und* Y *Hausdorff. Dann ist* Y *Quotientenraum von* X (das heißt, Y trägt die Quotientenraumtopologie).

BEWEIS. Es ist zu zeigen, eine Teilmenge $O \subset Y$ ist genau dann offen, wenn $f^{-1}(O)$ offen in X ist; oder, was auf dasselbe hinausläuft (per Übergang zum Komplement), eine Teilmenge $A \subset Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X ist. Die Implikation

$$A \textit{ abgeschlossen in } Y \Longrightarrow f^{-1}(A) \textit{ abgeschlossen in } X$$

ist einfach die Stetigkeit von f . Die Implikation

$$f^{-1}(A) \textit{ abgeschlossen in } X \Longrightarrow A = f\left(f^{-1}(A)\right) \textit{ abgeschlossen in } Y$$

ist durch den Satz gegeben. □

BEISPIEL. Angewandt auf die Abbildung $f : [0,1] \longrightarrow S^1$, $t \longmapsto f(t) = e^{2\pi i t}$, sagt das Korollar, daß S^1 als Quotientenraum von $[0,1]$ aufgefaßt werden kann. □

Neben der Hausdorff–Eigenschaft, die ein kompakter Raum ja (nach Definition) hat, besitzt er noch eine weitere sogenannte *Trennungseigenschaft*, die manchmal nützlich ist; diese soll jetzt diskutiert werden.

DEFINITION. Ein topologischer Raum heißt *normal*, wenn er nicht nur die Hausdorff–Eigenschaft hat, sondern zusätzlich auch noch folgende Eigenschaft: Seien $Y, Z \subset X$ abgeschlossen, $Y \cap Z = \emptyset$. Dann existieren offene Mengen $O, O' \subset X$ mit

$$Z \subset O \ , \ Y \subset O' \ , \ O \cap O' = \emptyset \ ;$$

man sagt hierfür auch, *punktfremde abgeschlossene Mengen lassen sich durch offene Mengen trennen.*

SATZ. *Jeder kompakte Raum ist normal.*

BEWEIS. Der Beweis beruht auf ganz genau demselben Trick, wie der des Hilfssatzes auf S. 26, nur daß dieser Trick jetzt *zweimal* angewendet werden muß. Die erste Anwendung besteht einfach darin, daß der Hilfssatz zunächst zitiert wird: Nach diesem Hilfssatz existieren nämlich für jedes $z \in Z$ offene Mengen $O_{z,Y}$, $O'_{z,Y}$ mit

$$z \in O_{z,Y} \ , \ Y \subset O'_{z,Y} \ , \ O_{z,Y} \cap O'_{z,Y} = \emptyset \ .$$

$\{Z \cap O_{z,Y}\}_{z \in Z}$ nun ist offene Überdeckung von Z . Wegen der Kompaktheit von Z gibt es also eine endliche Teilüberdeckung $\{Z \cap O_{z,Y}\}_{z \in K}$ hiervon; mit anderen Worten, es gibt eine endliche Indexmenge $K \subset Z$ so daß $Z \subset \bigcup_{z \in K} O_{z,Y}$. Wir setzen

$$O_{Z,Y} = \bigcup_{z \in K} O_{z,Y} \quad , \quad O'_{Z,Y} = \bigcap_{z \in K} O'_{z,Y} \ .$$

Als Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist $O'_{Z,Y}$ wieder offen. Schließlich ist $O_{Z,Y} \cap O'_{Z,Y} = \emptyset$, denn

$$O_{Z,Y} \cap O'_{Z,Y} \ = \ \big(\bigcup_{z \in K} O_{z,Y}\big) \cap \big(\bigcap_{z' \in K} O'_{z',Y}\big) \ = \ \bigcup_{z \in K} \big(O_{z,Y} \cap \bigcap_{z' \in K} O'_{z',Y}\big) \ ,$$

und jede der Mengen $O_{z,Y} \cap \bigcap_{z' \in K} O'_{z',Y}$ ist $= \emptyset$, da schon $O_{z,Y} \cap O'_{z,Y} = \emptyset$. □

Als Anwendung des vorhergehenden Satzes wollen wir nun auch ein Kriterium dafür herleiten, daß ein Quotientenraum eines Hausdorff–Raumes wieder ein Hausdorff–Raum ist. Das Kriterium ist formuliert für Quotientenräume von *kompakten* Räumen. Das ist einerseits der wichtigste (Spezial–)Fall, andererseits kann man aber auch das Kriterium bisweilen in anderen Situationen anwenden, indem man in geschickter Weise Unterräume heranzieht.

Satz. *Der Raum* X *sei kompakt* (quasi–kompakt und Hausdorff). Z *sei Quotientenraum von* X *, mit Projektion* $q : X \longrightarrow Z$ *. Dann sind äquivalent:*

- Z *ist Hausdorff–Raum*
- q *ist abgeschlossene Abbildung.*

Beweis. Die eine Richtung haben wir schon früher als Satz kennengelernt (S. 28). Wir zeigen hier die Umkehrung. Wir nehmen also jetzt an, daß q abgeschlossene Abbildung ist. Wir werden uns davon überzeugen, daß dann Z die Hausdorff–Eigenschaft hat.

Zunächst notieren wir, daß für jeden Punkt $z \in Z$ die einpunktige Menge $\{z\}$ *abgeschlossen* ist. Der Grund ist der: Für jedes $x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen (denn wegen der Hausdorff–Eigenschaft von X ist das Komplement Vereinigung von offenen Mengen). $\{z\}$ nun ist das Bild einer solchen Menge, daher wieder abgeschlossen wegen der vorausgesetzten Abgeschlossenheit der Abbildung q .

Wir müssen die Abgeschlossenheit der Abbildung q noch in einer andern Weise ausnutzen, die ein wenig raffinierter ist. Dazu führen wir eine Begriffsbildung ein. Wir sagen nämlich, daß eine Untermenge W von X *saturiert* ist, wenn sie die Bedingung erfüllt

$$W \;=\; q^{-1}(\,q(W)\,)$$

oder was dasselbe ist in Worten: wenn ein Punkt aus X denselben Bildpunkt hat wie ein Punkt aus W , dann ist er schon in W enthalten. Mit dieser Begriffsbildung können wir nun eine Behauptung formulieren.

Behauptung. *Sei* A *abgeschlossene Menge in* X *, die saturiert ist. Sei* U *offene Menge in* X *, die* A *enthält. Dann existiert in* U *eine offene Menge* V *, die auch noch* A *enthält und die saturiert ist.*

Beweis. Das Komplement CU ist abgeschlossen (weil U als offen vorausgesetzt war). Also ist auch das Bild $q(CU)$ abgeschlossen (weil die Abbildung q als abgeschlossen vorausgesetzt war). Also ist auch dessen Urbild $q^{-1}(\,q(CU)\,)$ abgeschlossen (weil q stetig ist). Dieses Urbild nun ist saturiert (Urbilder haben immer diese Eigenschaft) und es ist punktfremd zu der Menge A (das Bild $q(CU)$ ist punktfremd zu $q(A)$, weil $CU \cap A \,=\, \emptyset$ und weil A saturiert ist; also ist $q^{-1}(\,q(CU)\,)$ punktfremd zu $q^{-1}(\,q(A)\,) \;=\; A$). Das Komplement $V \;=\; C(\,q^{-1}(\,q(CU)\,)\,)$ hat dann die gewünschten Eigenschaften. □

Wir können nun den Beweis des Satzes zu Ende führen. Was wir zeigen müssen, ist dies: Wenn $z_1, z_2 \in Z$, $z_1 \neq z_2$, dann existieren offene Mengen O_1, O_2 in Z mit $z_1 \in O_1$, $z_2 \in O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Sei $Y_1 = q^{-1}\,(z_1)$ und $Y_2 = q^{-1}\,(z_2)$. Wie eingangs notiert, sind Y_1 und Y_2 Urbilder abgeschlossener Mengen, daher selbst abgeschlossen. Wir nutzen jetzt die Normalität von X aus (*ein kompakter Raum ist normal*). Es gibt also punktfremde offene Mengen O'_1 und O'_2 , die Y_1 und Y_2 trennen. Diese offenen Mengen sind möglicherweise nicht saturiert, wir können sie aber durch kleinere saturierte ersetzen (das sagt die obige Behauptung). Wir brauchen jetzt nur noch anzumerken, daß das Bild einer *saturierten* offenen Menge in X immer eine offene Menge in Z ist. Die beiden Bildmengen sind die gewünschten offenen Mengen O_1 und O_2 . □

Anschließend möchte ich noch einen Fall der Quotientenraum–Konstruktion diskutieren, der besonders wichtig ist. Sei X ein Raum und $Y \subset X$ eine nicht–leere Teilmenge. Es bezeichne X/Y den folgenden (Quotienten–)Raum: Die Punkte von X/Y sind

— die Menge Y
— die einpunktigen Mengen $\{x\}$, $x \in X - Y$.

Die Abbildung $q : X \longrightarrow X/Y$ ist definiert als diejenige Abbildung, die jedem Punkt aus X seine Äquivalenzklasse zuordnet. Wenn $A \subset X$, so ist also

$$q^{-1}\,(\,q(A)\,) \;=\; \begin{cases} A\,, & \text{wenn } \; A \cap Y \,=\, \emptyset \\ A \cup Y\,, & \text{wenn } \; A \cap Y \,\neq\, \emptyset \;. \end{cases}$$

Satz. Sei X kompakt und $Y \subset X$. Es sind äquivalent:

- Y ist abgeschlossen in X
- X/Y ist Hausdorff–Raum.

Beweis. Wenn Y abgeschlossen ist, so ist für abgeschlossenes $A \subset X$ die Menge

$$q^{-1}(\,q(A)\,) \;=\; \begin{cases} A \quad \text{bzw.} \\ A \cup Y \end{cases}$$

auch abgeschlossen. Nach Definition der Quotiententopologie ist q also *abgeschlossene* Abbildung. Der vorige Satz sagt, daß, folglich, der Quotientenraum die Hausdorff–Eigenschaft hat.

Wenn andererseits der Quotientenraum Hausdorff–Raum ist, so ist (wie wir bei früherer Gelegenheit auch schon notiert haben) jede einpunktige Menge darin abgeschlossen. Speziell gilt das für den Punkt “ Y ”. Die Menge Y ist das Urbild dieses Punktes, sie ist somit abgeschlossen. $\square$

Den Raum X/Y kann man seltsamerweise auch in dem Fall definieren, wo der Unterraum Y die leere Menge ist (böse Zungen könnten das so kommentieren, daß Topologen sich nicht scheuen, selbst leere Mengen noch zu kollabieren!). Wie oben sind auch in diesem Fall die Punkte von X/Y gegeben durch die Menge Y einerseits und die einpunktigen Mengen $\{x\}$, $x \in X - Y$, andererseits.

$X/\emptyset$ ist aber nicht Quotientenraum von X . Es hat nämlich einen zusätzlichen Punkt, eben “ $\emptyset$ ”; als Raum ist $X/\emptyset$ die disjunkte Vereinigung $X/\emptyset \;=\; X \,\dot{\cup}\, \{\emptyset\}$.

Die soeben benutzte Begriffsbildung bedeutet, allgemein gesprochen, dies. Wenn X_1 und X_2 topologische Räume sind, dann bezeichnet $X_1 \dot{\cup} X_2$ die *disjunkte Vereinigung* der beiden Räume. Die unterliegende Menge davon ist, nach Definition, die disjunkte Vereinigung derjenigen von X_1 und X_2 ; die topologische Struktur ist so definiert: Eine Menge $A \subset X_1 \dot{\cup} X_2$ ist offen in $X_1 \dot{\cup} X_2$ genau dann, wenn ihre Schnitte mit X_1 und X_2 jeweils offen sind.

Wir betrachten noch ein Beispiel einer etwas seltsamen Verklebe–Konstruktion. Wir verkleben nämlich zwei Kopien des abgeschlossenen Intervalls $[0,1]$ entlang dem halboffenen Intervall $[0,1)$; d.h., wir bilden den Quotientenraum von $[0,1] \mathbin{\dot{\cup}} [0,1]$ bezüglich der Äquivalenzrelation, die erzeugt ist von der Vorschrift:

$$(x;1) \sim (x';2) \quad \Longleftrightarrow \quad x = x' \ , \ \ x < 1$$

(dabei soll $(x;1)$ den x entsprechenden Punkt aus der ersten Kopie von $[0,1]$ bezeichnen; und $(x';2)$ den x' entsprechenden Punkt aus der zweiten Kopie). Der entstandene Raum kann aufgefaßt werden als das Intervall $[0,1]$ mit einem zusätzlichen Punkt. Er ist aber *nicht* die disjunkte Vereinigung; er ist nicht einmal ein Hausdorff–Raum. Das sieht man z.B. durch Anwendung des obigen Satzes auf die Quotientenraum–Konstruktion. So hat die abgeschlossene Teilmenge $[0,1] \mathbin{\dot{\cup}} \emptyset$ von $[0,1] \mathbin{\dot{\cup}} [0,1]$ ein Bild, das nicht abgeschlossen ist; denn dessen Urbild ist die nicht–abgeschlossene Menge

$$q^{-1}\big(\, q\big(\, [0,1] \mathbin{\dot{\cup}} \emptyset \,\big)\big) \ = \ [0,1] \mathbin{\dot{\cup}} [0,1) \ .$$

In dem Beispiel hat die Quotientenraum–Konstruktion die Eigenschaft, daß die Urbilder von Punkten zweipunktige oder einpunktige Mengen sind (also kompakt und deshalb abgeschlossen). Das Beispiel illustriert deshalb auch, daß es z.B. *nicht* hinreichend für die Hausdorff–Eigenschaft eines Quotientenraumes Z von X ist, wenn man etwa fordert, daß die Quotientenabbildung $q : X \longrightarrow Z$ die Bedingung erfüllt: “*Urbilder von Punkten sind abgeschlossen*”.

Produkte

Wenn X_1 und X_2 *Mengen* sind, dann ist die *Produktmenge* $X_1 \times X_2$ definiert als die Menge der Paare

$$X_1 \times X_2 \;=\; \{\,(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1\,,\; x_2 \in X_2\,\}\;.$$

Wenn X_1 und X_2 topologische Räume sind, dann kann $X_1 \times X_2$ auf naheliegende Weise wieder als topologischer Raum aufgefaßt werden; die Details dazu werden wir in Kürze zur Kenntnis nehmen.

Man braucht Produkte unter anderem, um *Funktionen von mehreren Variablen* zu betrachten.

Mit Hilfe von Produkten kann man auch neue Räume aus alten konstruieren. Ein Aspekt dabei ist, daß diese "neuen" Räume oft ohnehin schon da sind; sie als Produkte zu erkennen, kann interessante zusätzliche Information sein.

Beispiel. Der *Kreisring* K sei gegeben durch

$$K \;=\; \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 2\Big\}\;.$$

Die Punkte von K kann man alternativ beschreiben durch ihre *Polarkoordinaten*. Die Angabe der Polarkoordinaten kann aufgefaßt werden als Abbildung

$$K \;\longrightarrow\; [1, 2] \times S^1\;,\quad (x, y) \longmapsto (r, \rho)\;,\quad \text{wo}\;\; r = \sqrt{x^2 + y^2}\;,\;\; \rho = \big(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\big)\;;$$

diese Abbildung ist bijektiv (die Abbildung ist sogar eine topologische Äquivalenz — was z.B. folgt, sobald wir wissen, daß die Abbildung stetig ist, K kompakt und der Zielraum Hausdorff-Raum). □

Um die Produkt–Topologie zu definieren, lassen wir uns leiten von dem speziellen Fall metrischer Räume. Sind X_1 und X_2 metrische Räume mit Abstandsfunktionen $d_1(-,-)$ und $d_2(-,-)$, so kann $X_1 \times X_2$ aufgefaßt werden als metrischer Raum mit der Abstandsfunktion

$$d(\,(x_1, x_2)\,,\,(y_1, y_2)\,) \;=\; \max\,(\,d_1(x_1, y_1)\,,\,d_2(x_2, y_2)\,)\;.$$

Die *Kugeln* bezüglich dieser Metrik auf $X \times Y$ sind eigentlich eher *Kästchen*; sie sind vom Typ

$$U_1(x_1, \varepsilon) \times U_2(x_2, \varepsilon)\;.$$

Man kann nun offene Mengen auf folgende Weise charakterisieren. Sei $O \subset X_1 \times X_2$. Dann sind äquivalent

— O ist offene Teilmenge des metrischen Raumes $X_1 \times X_2$

— für jedes $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_1(x_1, \varepsilon) \times U_2(x_2, \varepsilon) \subset O$.

Dies können wir auch formulieren, ohne die Metrik explizit zu nennen. Unter Ausnutzung dessen, daß jede Umgebung noch eine offene Umgebung enthält, erhalten wir:

Seien X_1, X_2 metrische Räume. Eine Teilmenge $O \subset X_1 \times X_2$ ist genau dann offen, wenn für jedes $(x_1, x_2) \in O$ offene Mengen $A \subset X_1$, $B \subset X_2$ existieren, so daß

$$x_1 \in A \ , \ x_2 \in B \ , \quad A \times B \ \subset \ O \ .$$

Wir nehmen das zum Anlaß für die nachfolgende Definition.

Definition. Seien X_1, X_2 topologische Räume. Die *Produkt–Topologie* auf $X_1 \times X_2$ ist gegeben durch die folgende Vorschrift. Eine Menge $O \subset X_1 \times X_2$ ist *offene Menge* in $X_1 \times X_2$ genau dann, wenn gilt: für jedes $(x_1, x_2) \in O$ existieren offene Mengen $A \subset X_1$, $B \subset X_2$ mit

$$x_1 \in A \ , \ x_2 \in B \ , \quad A \times B \ \subset \ O \ .$$

Die Definition sagt, mit anderen Worten, daß die offenen Mengen von $X_1 \times X_2$ genau diejenigen sind, die sich als Vereinigung von Kästchen–Mengen $A \times B$ darstellen lassen (wo A und B offene Mengen in X_1 bzw. X_2 sind).

In dem Zusammenhang ist es angebracht, eine Vokabel zu nennen. Sei Y ein topologischer Raum, sei $\mathcal{B}$ ein System von offenen Mengen in Y . Man sagt, $\mathcal{B}$ ist eine *Basis der Topologie* von Y , wenn sich jede offene Menge in Y darstellen läßt als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$. In dieser Sprache läuft die Definition der Produkttopologie darauf hinaus, daß die genannten Kästchen–Mengen eine Basis der Topologie in dem Produkt–Raum bilden.

Die Definition der Produkttopologie beinhaltet noch eine stillschweigende Behauptung, wie wir uns jetzt klarmachen; das ist die folgende

Behauptung. *Das oben definierte System von offenen Mengen ist tatsächlich eine topologische Struktur auf* $X_1 \times X_2$; das heißt, *es erfüllt die Axiome* O1 – O4.

(Beweis. Übungsaufgabe.)

Wir können jedem Punkt (x_1, x_2) aus $X_1 \times X_2$ seine *erste Koordinate*, d.h., den Punkt $x_1 \in X_1$ zuordnen. Das gibt eine Abbildung, die *erste Projektion*, $pr_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$. *Diese Abbildung ist stetig.* Denn sei $A \subset X_1$ offen. Dann ist $pr_1^{-1}(A) \ = \ A \times X_2$, und das ist offen in $X_1 \times X_2$ nach Definition der Produkttopologie. Entsprechend haben wir die *zweite Projektion* $pr_2 \ : \ X_1 \times X_2 \ \to \ X_2$, $(x_1, x_2) \ \mapsto \ x_2$; diese ist ebenfalls stetig.

Satz. *Seien* X_1, X_2 *und* Z *topologische Räume,* $X_1 \times X_2$ *sei mit der Produkttopologie versehen. Sei* $f : Z \longrightarrow X_1 \times X_2$ *eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

— f *ist stetig*

— *die Abbildungen* $f_1 \ = \ pr_1 \circ f \ : \ Z \longrightarrow X_1$, $f_2 \ = \ pr_2 \circ f \ : \ Z \longrightarrow X_2$ *sind stetig.*

Beweis. Wenn f stetig ist, so ist $f_1 = pr_1 \circ f$ als Komposition stetiger Abbildungen wieder stetig; f_2 ebenso.

Für die Gegenrichtung nehmen wir nun an, daß f_1 und f_2 stetig sind. Sei O offene Teilmenge von $X_1 \times X_2$, wir wollen zeigen, daß $f^{-1}(O)$ offen in Z ist. Nach Definition der offenen Mengen in $X_1 \times X_2$ ist O Vereinigung von Mengen des Typs $A \times B$. Es folgt, daß $f^{-1}(O)$ Vereinigung von Mengen des Typs $f^{-1}(A \times B)$ ist. Es genügt deshalb zu zeigen, daß $f^{-1}(A \times B)$ offen ist, wenn A offen in X_1, B offen in X_2. Nun ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \times B) &= \{ z \in Z \mid f(z) \in A \times B \} \\ &= \{ z \in Z \mid f_1(z) \in A, f_2(z) \in B \} \\ &= {f_1}^{-1}(A) \cap {f_2}^{-1}(B) . \end{aligned}$$

Das ist der Durchschnitt von zwei Mengen, die beide offen sind wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f_1 und f_2; der Durchschnitt ist also auch offen. $\square$

Beispiel. Die oben betrachtete Abbildung

$$K \longrightarrow [1,2] \times S^1 \quad , \quad (x,y) \longmapsto (r, \rho)$$

ist stetig; denn die beiden Abbildungen

$$K \longrightarrow [1,2] , \quad (x,y) \longmapsto r \quad , \qquad K \longrightarrow S^1 , \quad (x,y) \longmapsto \rho$$

sind stetig. $\square$

Man kann Produkte allgemeiner betrachten. Die Anzahl der Faktoren braucht nicht einmal endlich zu sein.

Dazu sei $i \longmapsto X_i$, $i \in I$, eine indizierte Menge von Mengen. Die *Produktmenge* $\prod_{i \in I} X_i$ ist definiert als die Menge der "*Tupel*",

$$\prod_{i \in I} X_i = \{\{x_i\}_{i \in I} \mid x_i \in X_i\} .$$

Ist zum Beispiel I die Menge $\{1, \ldots, n\}$, dann ist das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ die Menge

$$\{ (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n .$$

Ist $I = \{1, 2, \ldots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen, so ist das Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ die Menge der Folgen

$$(x_1, x_2, \ldots) , \; x_i \in X_i .$$

Es sei nun $i \longmapsto X_i$, $i \in I$, eine indizierte Menge von topologischen Räumen. Wir möchten das Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ ebenfalls als topologischen Raum auffassen, und zwar in der Weise, daß folgendes gilt:

- *Jede der Projektionen* $pr_j : \left(\prod_{i\in I} X_i \right) \longrightarrow X_j$, $\{x_i\}_{i\in I} \longmapsto x_j$ *ist stetig.*
- *Die topologische Struktur von* $\prod_{i\in I} X_i$ *soll durch die topologischen Strukturen der Faktoren* X_i *vollständig bestimmt sein.*

Die erste dieser Aussagen impliziert: *Ist* A_j *offene Menge in* X_j *, dann ist* $pr_j{}^{-1}(A_j)$ *offene Menge in* $\prod_{i\in I} X_i$; d.h., die Menge derjenigen Tupel, deren j–te Komponente in A_j liegt,

$$pr_j{}^{-1}(A_j) \;=\; A_j \times \prod_{i\in I,\, i\neq j} X_i \ ,$$

ist offen.

Die zweite der Aussagen sagt, daß es nicht mehr offene Mengen geben soll als diejenigen, deren Existenz durch das gerade Gesagte zusammen mit den Axiomen O1 – O4 erzwungen ist.

Was das bedeutet, können wir ein klein wenig besser formulieren, wenn wir geeignete Vokabeln benutzen, nämlich die Begriffe *Basis* und *Subbasis*. Die erste der beiden folgenden Definitionen kennen wir schon:

Definition. Sei X topologischer Raum. Ein System $\mathcal{B}$ von offenen Mengen in X heißt *Basis der Topologie*, wenn jede offene Menge in X sich darstellen läßt als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$.

Definition. Sei X topologischer Raum. Ein Sytem $\mathcal{S}$ von offenen Mengen in X heißt *Subbasis der Topologie*, wenn gilt: Die endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$, d.h. die Mengen der Art $\bigcap_{k\in K} A_k$, $A_k \in \mathcal{S}$, K *endlich*, bilden eine Basis der Topologie.

Es folgt aus diesen beiden Definitionen, daß sich jede offene Menge in X darstellen läßt als Vereinigung endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$; d.h., sie läßt sich darstellen in der Form

$$(*) \qquad \bigcup_{\ell\in L} \Big(\bigcap_{k\in K_\ell} A_{k,\ell} \Big) \qquad (\textit{ wobei } A_{k,\ell} \in \mathcal{S} \ , \ K_\ell \textit{ endlich für alle } \ell \ ) \ .$$

Umgekehrt kann man folgendes sagen: Sei X' eine Menge, sei $\mathcal{S}$ ein System von Teilmengen von X' , das die Bedingung erfüllt

$$\emptyset \in \mathcal{S} \ , \quad X' \in \mathcal{S} \ .$$

Man definiert ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X' wie folgt: Eine Teilmenge A von X' soll zu $\mathcal{A}$ gehören, wenn sie sich in der Art $(*)$ darstellen läßt; also als Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$.

Das System $\mathcal{A}$ seinerseits ist dann abgeschlossen gegenüber der Bildung von Vereinigungen und endlichen Durchschnitten. M.a.W.

Behauptung. *Das System* $\mathcal{A}$ *erfüllt die Axiome* O1 – O4 (das System $\mathcal{A}$ ist also eine topologische Struktur auf X').

(Beweis. Übungsaufgabe.)

Für die so konstruierte topologische Struktur ist das ursprüngliche System $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie. Die beschriebene Konstruktion leistet das, was oben als wünschenswert vorgestellt wurde; nämlich eine Topologie anzugeben, die als offene Mengen enthält

- die Mengen aus $\mathcal{S}$
- und was durch diese und die Axiome O1 – O4 erzwungen ist.

Wir können die allgemeine Beschreibung der Produkttopologie nun so präzisieren:

Definition. *Eine Subbasis der Topologie von* $\prod_{i\in I} X_i$ *ist gegeben durch die Mengen vom Typ*

$$A_j \times \prod_{i\in I,\, i\neq j} X_i \ , \qquad A_j \subset X_j \ \text{ offen.}$$

Es ist andererseits natürlich auch möglich, eine Basis der Topologie direkt anzugeben; das ist nur wenig komplizierter. Wir betrachten Fälle.

(a) $I = \{1, 2\}$. Seien $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$ offen. Dann ist

$$A_1 \times A_2 \ = \ A_1 \times X_2 \ \cap \ X_1 \times A_2 \ .$$

Die Mengen dieses Typs sind bereits abgeschlossen gegenüber der Bildung von endlichen Durchschnitten. Sie bilden daher eine Basis (nicht nur eine Subbasis) der Topologie auf $X_1 \times X_2$. Das ist natürlich genau die Topologie auf $X_1 \times X_2$, die wir schon kennengelernt haben.

(b) *Allgemeiner*: Sei $I = \{1, 2 \ldots, n\}$ und $A_i \subset X_i$ offen; dann ist

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \ = \ & A_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \ \cap \ X_1 \times A_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n \ \cap \\ & \cdots \ \cap \ X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1} \times A_n \end{aligned}$$

offen in $\prod_{i\in I} X_i$. Wie in (a) bilden die Mengen dieses Typs schon eine Basis der Topologie auf $X_1 \times \cdots \times X_n$.

(c) *Ganz allgemein*: Sei I beliebig. Die Mengen vom Typ

$$\prod_{k \in K} A_k \times \prod_{i \in I,\, i \notin K} X_i \ , \qquad A_k \subset X_k \ \textit{offen}\,, \quad K \subset I \ \textit{endlich}\,,$$

bilden eine Basis der Topologie auf $\prod_{i \in I} X_i$. — Wenn andererseits aber $J \subset I$ eine *nicht–endliche* Menge ist und A_i offene Menge in X_i , $\emptyset \neq A_i \neq X_i$, dann ist die Menge

$$\prod_{i \in J} A_i \times \prod_{i \in I,\, i \notin J} X_i$$

nicht offene Menge im Produktraum (denn sie enthält keine(!) nicht–leere Basismenge der Topologie). Insbesondere folgt auch, daß ein nicht–endliches Produkt diskreter Räume (mit jeweils mehr als nur einem Punkt) nicht wieder diskret sein kann. Wir betrachten einen speziellen Fall als Beispiel.

Beispiel. Sei X topologischer Raum und I Indexmenge. Es bezeichne

$$X^I = \prod_{i \in I} X_i \ , \qquad \textit{wobei} \ \ X_i = X \ \ \textit{für alle} \ \ i \ .$$

Sei jetzt

$$X = \{0, 1\} \quad (= \textit{diskreter Raum mit } 2 \textit{ Punkten})$$

und

$$I = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad (= \textit{Menge der natürlichen Zahlen}) \ .$$

Der sog. *Raum der* $0{-}1{-}$*Folgen* ist nun, nach Definition, der Produktraum

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

Dieser Raum ist, wie schon bemerkt, nicht diskret. Kann man mehr darüber sagen? Ja, der Raum ist topologisch äquivalent zur Cantor–Menge! (s. Übungszettel Nr. 6). □

Wir kehren zur Beschreibung der Produkttopologie mit Hilfe von Subbasen zurück. Dazu wollen wir einen einfachen Sachverhalt zur Kenntnis nehmen. Um eine Subbasis der Topologie des Produktraums zu erhalten, braucht man nämlich nicht, wie oben, *alle* der offenen Mengen $A_j \subset X_j$, es langt vielmehr, wenn das A_j seinerseits nur eine spezifizierte Subbasis der Topologie von X_j durchläuft, wie wir nun als Satz formulieren wollen. Natürlich wird die erhaltene Subbasis i.a. eine andere sein als vorher.

Satz. *Sei* $\{X_i\}_{i\in I}$ *eine Familie von topologischen Räumen. Sei* $\mathcal{S}_i$ *eine Subbasis von* X_i *. Dann ist eine Subbasis der Topologie von* $\prod_{i\in I} X_i$ *gegeben durch die Mengen vom Typ*

$$A_j \times \prod_{i\in I,\, i\neq j} X_i \quad , \qquad A_j \in \mathcal{S}_j \ .$$

Beweis. Für die Zwecke dieses Beweises bezeichne eine *Auffüllung* eines Mengensystems den folgenden Prozeß: man darf *beliebige Vereinigungen von endlichen Durchschnitten* zu dem System hinzufügen. In dieser Sprache können wir die weiter oben formulierte Behauptung auch so aussprechen, daß aus einer Subbasis durch Auffüllung eine topologische Struktur wird. Eine topologische Struktur andererseits läßt sich nicht weiter auffüllen: die beliebigen Vereinigungen von endlichen Durchschnitten sind alle schon da.

Das können wir auch so formulieren: Wenn man schon einmal aufgefüllt hat, dann bewirkt eine weitere Auffüllung keinen Unterschied mehr; oder: Es macht keinen Unterschied, ob man einmal auffüllt oder gleich zweimal hintereinander.

Wenn man aber zweimal hintereinander auffüllen darf, so ist es offensichtlich, daß man aus dem in dem Satz angegebenen Mengensystem alles verlangte erhält: Da $\mathcal{S}_j$ Subbasis von X_j ist, liefern die Mengen des Satzes bei einer ersten Auffüllung schon alle die Mengen vom Typ

$$A_j \times \prod_{i\in I,\, i\neq j} X_i$$

wo A_j *offene Teilmenge von* X_j ist (der Index j wird hier als festgehalten betrachtet). Bei einer zweiten Auffüllung (j wird nicht mehr als fest betrachtet) liefern letztere schließlich *alle* offenen Mengen des Produktraumes, da sie ja, nach Definition der Produkttopologie, eine Subbasis bilden. □

Als Anwendung nehmen wir zur Kenntnis, daß ein Produkt von mehr als zwei Räumen auch als *iteriertes Produkt* aufgefaßt werden kann.

Bemerkung. *Seien* $X_1 , \ldots, X_n$ *topologische Räume. Es gibt eine topologische Äquivalenz*

$$X_1 \times \ \ldots \ \times X_n \quad \longrightarrow \quad (\, X_1 \times \ \ldots \ \times X_{n-1}\,) \ \times \ X_n \ .$$

Beweis. Die Abbildung ordnet dem n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ das Paar zu, das besteht aus dem $(n-1)-$Tupel $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ und dem Punkt x_n . Die Abbildung ist bijektiv. Die Bijektion respektiert die topologische Struktur. Denn die Mengen vom Typ

$$A_j \times \prod_{i\,\in\,\{1,..,n\}\,,\,i\,\neq\,j} X_i$$

bilden, nach dem gerade beschriebenen Satz, auch für den Zielraum eine Subbasis der Topologie. □

Über Produkte allgemein gibt es den berühmten Satz von Tychonoff, der besagt, daß das Produkt einer Familie von kompakten Räumen auch wieder ein kompakter Raum ist. Wir werden den Satz in dieser Allgemeinheit nicht benötigen. Wir beschränken uns deshalb auf den Spezialfall *endlicher* Produkte, da dieser Spezialfall erheblich einfacher zu behandeln ist. Per Induktion kann man den Spezialfall endlich vieler Faktoren zurückführen auf den noch spezielleren Fall von nur zwei Faktoren.

SATZ. *Seien* X, Y *kompakte Räume. Der Produktraum* $X \times Y$ *ist kompakt.*

KOROLLAR. *Seien* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *kompakte Räume. Dann ist* $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ *ebenfalls kompakt.*

BEWEIS. Per Induktion über n können wir annehmen, daß $X_1 \times \ldots \times X_{n-1}$ kompakt ist. Nach dem Satz ist

$$(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$$

dann auch kompakt. $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ ist zu diesem Produktraum topologisch äquivalent (s. oben), also ebenfalls kompakt. $\square$

BEWEIS DES SATZES. Wir prüfen zunächst die Hausdorff–Eigenschaft nach: Sind X, Y Hausdorff–Räume, dann auch der Produktraum $X \times Y$. Das ist aber klar, denn seien (x, y) , (x', y') zwei Punkte aus $X \times Y$. Wenn $(x, y) \neq (x', y')$, dann ist entweder $x \neq x'$ oder $y \neq y'$. Sei etwa $x \neq x'$. Da X Hausdorff–Raum ist, gibt es offene Mengen A_x , $A_{x'}$ in X mit

$$x \in A_x \ , \ x' \in A_{x'} \ , \ A_x \cap A_{x'} = \emptyset \ .$$

$A_x \times Y$ und $A_{x'} \times Y$ sind dann offene Mengen in $X \times Y$ von der geforderten Art.

Nun zur Überdeckungseigenschaft: Seien X und Y als quasi–kompakt vorausgesetzt. Sei $\{O_i\}_{i \in I}$ offene Überdeckung von $X \times Y$. Wir wollen zeigen, es gibt eine *endliche Teilmenge* $J \subset I$ mit $\bigcup_{i \in J} O_i = X \times Y$.

Es ist, nach Definition der Produkttopologie, jede offene Menge in dem Produktraum darstellbar als Vereinigung von offenen Mengen spezieller Art (*Kästchen–Mengen*). Speziell gilt das für die Mengen O_i . Wir dürfen also annehmen (und wir werden das sogleich auch tun), daß jede der Mengen O_i auf irgendeine Weise in dieser Form tatsächlich dargestellt ist,

$$O_i \ = \ \bigcup_{k \in K_i} A^i_k \times B^i_k \ , \qquad A^i_k \text{ offen in } X \ , \ B^i_k \text{ offen in } Y \ .$$

Wir definieren nun eine neue Indexmenge (die *disjunkte Vereinigung* der K_i)

$$K \ = \ \dot{\bigcup_{i \in I}} K_i \ = \ \{ (i, k) \mid k \in K_i \} \ .$$

Dann ist

$$\bigcup_{(i,k)\,\in\,K} A_k^i \times B_k^i \;=\; \bigcup_{i\in I}\Big(\bigcup_{k\in K_i} A_k^i \times B_k^i\Big) \;=\; \bigcup_{i\in I} O_i \;=\; X\times Y \;.$$

Deshalb ist $\left\{A_k^i \times B_k^i\right\}_{(i,k)\,\in\,K}$ ebenfalls eine offene Überdeckung von $X\times Y$. *Es wird nun genügen, zu zeigen, daß diese* (!) *Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.* Denn jede der Mengen davon ist enthalten in einer der Mengen O_i , und wenn man die Mengen einer Überdeckung vergrößert, so erhält man wieder eine Überdeckung. Man braucht also zum Schluß nur die fraglichen endlich vielen Kästchen durch die passenden O_i zu ersetzen, um die gewünschte endliche Teilüberdeckung von $\{O_i\}_{i\in I}$ zu erhalten.

Wir ändern jetzt die Notation und fangen noch einmal von vorne an. Sei also I eine Indexmenge und sei $\{A_i \times B_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, mit den Eigenschaften

$$A_i \subset X \;\; \textit{offen}\,, \quad B_i \subset Y \;\; \textit{offen}\,, \quad \textstyle\bigcup_{i\in I}\; A_i \times B_i \;=\; X\times Y \;.$$

Wir wollen zeigen, daß diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

Hilfssatz. *Sei* $x\in X$. *Es existiert eine endliche Teilmenge* $I_x \subset I$ *mit*

$$\bigcup_{i\in I_x} A_i \times B_i \;\;\supset\;\; \{x\}\times Y \;.$$

Beweis. Zunächst merken wir an, daß der Unterraum $\{x\}\times Y$ von $X\times Y$ topologisch äquivalent ist zu Y . Denn wegen der Definition von Produkttopologie einerseits und Unterraumtopologie andererseits läßt sich jede offene Mengen in $\{x\}\times Y$ darstellen in der Form

$$(\{x\}\times Y)\;\cap\;\big(\textstyle\bigcup_{\ell\in L}(A_\ell\times B_\ell)\big) \quad=\quad \textstyle\bigcup_{\ell\in L}\,(\{x\}\times Y)\cap(A_\ell\times B_\ell)$$

(wo A_ℓ und B_ℓ offene Mengen aus X bzw. Y bezeichnen). Es gilt auch

$$(\{x\}\times Y)\cap(A_\ell\times B_\ell) \quad=\quad \begin{cases}\{x\}\times B_\ell & \text{falls } x\in A_\ell\\ \emptyset & \text{falls } x\notin A_\ell\;.\end{cases}$$

Die Bijektion $\{x\}\times Y \to Y$, $(x,y)\mapsto y$, bildet also offene Mengen auf offene Mengen ab; sie ist daher eine topologische Äquivalenz.

Nun war Y als quasi–kompakt vorausgesetzt. Es folgt, daß $\{x\}\times Y$ quasi–kompakt ist. Die offene Überdeckung

$$\{\;(A_i\times B_i)\cap(\{x\}\cap Y)\;\}_{i\in I}$$

hat also eine endliche Teilüberdeckung, d.h., es gibt die behauptete endliche Teilmenge $I_x\subset I$ mit $\bigcup_{i\in I_x} A_i\times B_i \;\supset\; \{x\}\times Y$. Der Hilfssatz ist damit bewiesen. □

Sei weiterhin $x \in X$ ein fester Punkt. Sei I_x die durch den Hilfssatz gegebene Untermenge der Indexmenge. Wir können annehmen, daß $x \in A_i$ für alle $i \in I_x$ (denn die $A_i \times B_i$ mit $x \notin A_i$ tragen zur Überdeckung von $\{x\} \times Y$ ja gar nichts bei; wir könnten sie notfalls einfach weglassen). Es ist dann

$$x \in A_x := \bigcap_{i \in I_x} A_i \ ,$$

und A_x ist als *endlicher* Durchschnitt von offenen Mengen wieder offen in X .

Andererseits ist $Y \subset \bigcup_{i \in I_x} B_i$. Denn aus $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i \in I_x} A_i \times B_i$ folgt ja

$$\{x\} \times Y \subset \{x\} \times \bigcup_{i \in I_x} B_i \ .$$

Da weiterhin A_x in jedem der A_i , $i \in I_x$, enthalten ist, folgt somit, daß der gesamte "Streifen" $A_x \times Y$ von endlich vielen der Mengen $A_i \times B_i$ schon überdeckt wird: es ist

$$A_x \times Y \subset \bigcup_{i \in I_x} A_i \times B_i \ .$$

Wir brauchen nun nur noch die Quasi–Kompaktheit von X auszunutzen: Die offene Überdeckung $\{A_x\}_{x \in X}$ von X hat eine endliche Teilüberdeckung $\{A_x\}_{x \in K}$. Damit ist nun

$$\{A_i \times B_i\}_{i \in I_x \, , \, x \in K}$$

endliche Überdeckung von $X \times Y$. Es ist dies eine Teilüberdeckung der vorgegebenen Überdeckung $\{A_i \times B_i\}_{i \in I}$ bis allenfalls auf die Tatsache, daß möglicherweise einige Mengen davon nun mehrfach gezählt worden sind (bedingt durch die andere Indizierung). Solche Mehrfachnennungen können wir gegebenenfalls einfach weglassen, wir erhalten dann eine Teilüberdeckung. Der Satz ist bewiesen. $\square$

Als Anwendung des Satzes (oder des Korollars) wollen wir die kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ behandeln (Satz von Heine–Borel).

Bezeichne ein *Quader* das Produkt von endlich vielen abgeschlossenen Intervallen,

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \ .$$

Behauptung. *Dieser Raum ist topologisch äquivalent zu dem entsprechenden Unterraum des* $\mathbb{R}^n$,

$$\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i \} \ .$$

Zusatz zu S. 40-42

(eine etwas andere Formulierung des Beweises von:)

Satz. *Sind* X, Y *quasi-kompakt, dann auch ihr Produkt* $X \times Y$.

Beweis. Sei $\{O_i\}_{i \in I}$ offene Überdeckung von $X \times Y$. Wir wollen zeigen, es gibt eine *endliche Teilmenge* $J \subset I$ mit $\bigcup_{i \in J} O_i = X \times Y$.

Wir verschaffen uns eine neue Überdeckung $\{O_z\}_{z \in X \times Y}$ dadurch, daß wir zu jedem Punkt $z \in X \times Y$ eine der Mengen O_i auswählen, die z wirklich enthält (so eine Menge gibt es!) und diese Menge dann mit O_z bezeichnen. Es wird nun genügen zu zeigen, daß *diese* Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat. Denn es könnte letztlich allenfalls passieren, daß unter den schließlich erhaltenen endlich vielen O_z irgendwelche der O_i vielleicht mehrfach vorkommen; solche Mehrfachnennungen können wir gegebenenfalls natürlich einfach weglassen.

Zu jedem Punkt $z \in X \times Y$ verschaffen wir uns nun offene Mengen $A_z \subset X$ und $B_z \subset Y$, so daß

$$A_z \times B_z \subset O_z \quad \text{und} \quad z \in A_z \times B_z$$

(das geht, da ja die Kästchen-Mengen eine Basis der Produkttopologie bilden). Es wird nun genügen zu zeigen, daß die Überdeckung $\{A_z \times B_z\}_{z \in X \times Y}$ eine endliche Teilüberdeckung hat. Denn wenn $\bigcup_{z \in J} A_z \times B_z$ schon ganz $X \times Y$ ist, dann natürlich auch $\bigcup_{z \in J} O_z$, da ja $A_z \times B_z \subset O_z$ für alle z .

Beweis. Die offensichtliche Abbildung (nämlich das $i-$te Intervall wird mit seinem Bild im $i-$ten Faktor von $\mathbb{R}^n$ identifiziert) ist bijektiv. Wir überlegen uns, daß die Abbildung eine topologische Äquivalenz ist.

1. *Beweis.* Der Quader als Produktraum, bzw. der Quader als Unterraum von $\mathbb{R}^n$ haben dieselbe topologische Struktur. Denn in beiden Fällen ist eine Basis der Topologie gegeben durch *Kästchen–Mengen*, wo der $i-$te Faktor des Kästchens ein relativ–offenes Intervall im $i-$ten Faktor des Quaders ist.

2. *Beweis.* Die Abbildung vom Quader in den $\mathbb{R}^n$ ist stetig nach dem Kriterium dafür, wann eine Abbildung in einen Produktraum stetig ist; denn jede der Komponenten–Abbildungen ist stetig: die $i-$te Komponentenabbildung ist die Komposition der Projektion des Quaders auf seinen $i-$ten Intervall–Faktor mit der Inklusion dieses Faktors in die $i-$te Koordinate von $\mathbb{R}^n$. Die resultierende stetige bijektive Abbildung vom Quader auf seinen Bildraum in $\mathbb{R}^n$ ist eine topologische Äquivalenz nach dem fundamentalen Kriterium, das wir hergeleitet haben; denn der Zielraum ist Hausdorff–Raum (als Unterraum des $\mathbb{R}^n$), und der Quellenraum ist kompakt (als endliches Produkt von kompakten Räumen, nämlich von Intervallen). □

Von jetzt an werden wir gelegentlich einen Quader auch stillschweigend identifizieren mit dem entsprechenden Unterraum eines $\mathbb{R}^n$.

Satz. (Satz von Heine–Borel). *Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. Wenn $X \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, dann existiert ein Quader in $\mathbb{R}^n$, der X enthält. Wenn X in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, dann ist X auch abgeschlossen in diesem Quader. Wir haben erhalten, daß X *abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes* (des Quaders) ist. Wie wir wissen, impliziert dies, daß X selbst kompakt ist.

Sei umgekehrt X als kompakt vorausgesetzt. Da $\mathbb{R}^n$ Hausdorff–Raum ist, folgt, wie wir wissen, daß X abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist. Um weiter die Beschränktheit von X einzusehen, argumentieren wir explizit mit einer Überdeckung. Nämlich wir überdecken $\mathbb{R}^n$ durch *Einheitsquader* (Würfel der Kantenlänge 1 , deren Eckpunkte ganz–zahlige Koordinaten haben). Wäre dies eine offene Überdeckung, so könnten wir die induzierte Überdeckung von X betrachten; aus der (Quasi–)Kompaktheit von X würde dann folgen, daß X schon in (der Vereinigung von) endlich vielen der Einheitsquader enthalten sein muß, also beschränkt ist. Nun bilden die Einheitsquader natürlich keine *offene* Überdeckung, da ja ein Quader nicht offene (sondern abgeschlossene) Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist. Wir müssen das Argument also modifizieren. Eine ganz kleine Modifikation ist ausreichend: wir ersetzen jeden der Quader durch eine ein wenig größere *offene* Menge, die ihn enthält (z.B. einen offenen Quader der Kantenlänge 2). Aus der Kompaktheit von X folgt tatsächlich nun, daß X in der Vereinigung von endlich vielen der modifizierten Quader enthalten ist; also beschränkt ist. □

Beispiele von Produkten.

Beispiel (a) $S^1 \times S^1$. Die Abbildung $f: \ [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$, induziert eine topologische Äquivalenz

$$g: \ [0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi \ \stackrel{\approx}{\longrightarrow} \ \mathit{Bild}\,(f) \ = \ S^1 \ = \ \big\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x^2+y^2 = 1\,\big\}$$

(das folgt z.B. aus dem Satz: “$X \to Y$ *surjektiv,* X *kompakt,* Y *Hausdorff*” impliziert “Y *trägt die Quotiententopologie*”). Es folgt hieraus, per Produktbildung, daß $S^1 \times S^1$ topologisch äquivalent ist zu

$$(\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,) \ \times \ (\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,) \ .$$

Andererseits gibt es auch eine surjektive Abbildung (Produkt der Projektionen)

$$[0,2\pi] \times [0,2\pi] \ \longrightarrow \ (\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,) \ \times \ (\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,) \ .$$

Anwendung desselben Satzes wie oben liefert nun: $(\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,) \times (\,[0,2\pi]\,/\,0{\sim}2\pi\,)$ (und damit auch $S^1 \times S^1$) ist topologisch äquivalent zu dem Quotientenraum

$$(\,[0,2\pi] \times [0,2\pi]\,) \ / \ (s,0){\sim}(s,2\pi) \ , \ (0,t){\sim}(2\pi,t) \ ;$$

mit anderen Worten: $S^1 \times S^1$ ist topologisch äquivalent zu dem Raum, den man aus dem Quadrat erhält durch “Verkleben” von je zwei gegenüberliegenden Seiten.

Für eine weitere Beschreibung von $S^1 \times S^1$ definieren wir eine Abbildung

$$h: \ [0,2\pi] \times [0,2\pi] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^3 \ , \quad (s,t) \ \longmapsto \ (\ (\cos s)(2+\cos t)\,, \ (\sin s)(2+\cos t)\,, \ \sin t\ )$$

diese Abbildung hat die Eigenschaft:

$$h(s,t) \ = \ h(s',t') \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (s,t) \ = \ (s',t') \quad \text{oder} \\ s=0 \ , \ s'=2\pi \ \ \text{(oder umgekehrt)}\,, \ t \ \text{ beliebig } \ \text{oder} \\ t=0 \ , \ t'=2\pi \ \ \text{(oder umgekehrt)}\,, \ s \ \text{ beliebig}\ . \end{cases}$$

Mit Hilfe des oben zitierten Satzes erhalten wir: *der Raum*

$$(\,[0,2\pi] \times [0,2\pi]\,) \ / \ (s,0){\sim}(s,2\pi) \ , \ (0,t){\sim}(2\pi,t) \ ;$$

ist topologisch äquivalent zu dem Raum $\mathit{Bild}\,(h)$. Anschaulich gesprochen, erhält man diesen Raum $\mathit{Bild}\,(h)$, indem man den Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(2,0,0)$ um die z –Achse rotiert (“$S^1 \times S^1$ ist ein *Torus*”).

Beispiel (b) “*Abgeschlossener Kreisring*”. Sei $0 < a < b$. Die Abbildung

$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; a \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq b \} \quad \longrightarrow \quad S^1 \times [a,b]$$

$$(x,y) \quad \longmapsto \quad \Big(\big(\tfrac{x}{r} \,,\, \tfrac{y}{r} \big) \;,\; r = \sqrt{x^2+y^2} \Big)$$

ist eine topologische Äquivalenz (denn sie ist eine stetige bijektive Abbildung mit kompaktem Definitionsbereich und Hausdorff–Raum als Wertebereich).

Beispiel (c) “*Offener Kreisring*”. Sei wieder $0 < a < b$. Die Abbildung

$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; a < \sqrt{x^2+y^2} < b \} \quad \longrightarrow \quad S^1 \times (a,b)$$

definiert wie oben ist auch eine topologische Äquivalenz; denn sie ist bijektiv und sie ist die Einschränkung einer topologischen Äquivalenz (nämlich der vorigen).

Beispiel (d) “*Punktierte Ebene*”. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 - 0 \quad \longrightarrow \quad S^1 \times (0,\infty) \quad , \quad (x,y) \longmapsto \big(\big(\tfrac{x}{r} \,,\, \tfrac{y}{r} \big) \;,\; r \big)$$

ist ebenfalls eine topologische Äquivalenz. Denn einmal ist die Abbildung bijektiv, zum andern ist die Stetigkeit der Abbildung bzw. ihrer Umkehrabbildung eine lokale Eigenschaft; sie folgt daher aus der Stetigkeit im vorigen Beispiel. Im Detail:

Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Wähle a, b so daß $0 < a < r < b$. Dann ist $S^1 \times (a,b)$ offene Umgebung von *Bild* (x,y) . Nach dem vorigen Beispiel ist die Umkehrabbildung stetig in dieser Umgebung von *Bild* (x,y) , deshalb insbesondere auch stetig im Punkt *Bild* (x,y) . Ähnlich erhält man die Stetigkeit der Abbildung selbst.

Beispiel (e) $S^1 \times \mathbb{R}$. Weil $\mathbb{R}$ topologisch äquivalent ist zu $(0,\infty)$, folgt auch

$$S^1 \times \mathbb{R} \quad \approx \quad S^1 \times (0,\infty) \quad \approx \quad \mathbb{R}^2 - 0 \,.$$

Allgemeine Versionen dieser topologischen Äquivalenzen.

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\|x\| = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}$ die euklidische Norm. Die *n–dimensionale Sphäre* S^n ist definiert durch

$$S^n \quad = \quad \{ \; x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\mid\; \|x\| = 1 \; \}$$

(b′) Sei $0 < a$. Die Abbildung

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \;\mid\; a \leq \|x\| \leq b \} \;\longrightarrow\; S^{n-1} \times [a,b] \;, \quad x \longmapsto \big(\tfrac{x}{\|x\|} \,,\, \|x\| \big)$$

ist stetig und bijektiv. Sie hat kompakten Definitionsbereich und Hausdorffschen Zielbereich, sie ist also eine topologische Äquivalenz.

(c′) Sei $0 < a$. Die Abbildung

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \ \mid\ a < \|x\| < b \,\} \quad \longrightarrow \quad S^{n-1} \times (a,b)$$

ist definiert wie die vorige. Sie ist bijektiv und ist als Einschränkung einer topologischen Äquivalenz ebenfalls wieder eine topologische Äquivalenz.

(d′) Sei $0 \leq a < b \leq \infty$. Die Abbildung

$$\{\, x \in \mathbb{R}^n \ \mid\ a < \|x\| < b \,\} \quad \longrightarrow \quad S^{n-1} \times (a,b)$$

ist bijektiv, und sie stimmt "lokal" mit der vorigen Abbildung überein; damit ist auch sie eine topologische Äquivalenz.

(e′) Mit $\mathbb{R} \approx (0,\infty)$ folgt schließlich noch:

$$S^{n-1} \times \mathbb{R} \quad \approx \quad S^{n-1} \times (0,\infty) \quad \approx \quad \mathbb{R}^n - 0$$

Verklebe–Konstruktionen

Die *disjunkte Vereinigung* topologischer Räume wurde früher schon angesprochen. Wir nehmen sie hier in allgemeiner Form zur Kenntnis.

Wenn $i \longmapsto X_i$, $i \in I$, eine indizierte Familie von Mengen ist, dann bezeichnet die *disjunkte Vereinigung* die Menge der Paare

$$\amalg_{i \in I} X_i \;=\; \{ (i,x) \mid i \in I \;,\; x \in X_i \} \;.$$

Für jedes $j \in I$ enthält diese Menge eine Kopie der Menge X_j ; nämlich die Untermenge

$$\{ (j,x) \mid x \in X_j \} \;,$$

die ja zu X_j kanonisch (= *in ganz bestimmter, ausgezeichneter Weise*) isomorph ist.

Definition. Wenn die X_i topologische Räume sind, dann sei die disjunkte Vereinigung auf die folgende Weise mit einer topologischen Struktur versehen: eine Teilmenge $A \subset \amalg_{i \in I} X_i$ ist *offen* dann und nur dann, wenn für jedes $j \in I$ die Menge

$$A \,\cap\, X_j$$

offen in X_j ist (dabei haben wir X_j identifiziert mit $\{ (j,x) \mid x \in X_j \}$) .

Aus der Definition folgt auch: Für jedes j ist die Untermenge $\{ (j,x) \mid x \in X_j \}$ von $\amalg_{i \in I} X_i$ eine *offene Untermenge*, und sie ist (als Unterraum) kanonisch isomorph zu X_j ; die Abbildung $x \mapsto (j,x)$ definiert eine topologische Äquivalenz von X_j zu diesem Unterraum,

$$X_j \;\longrightarrow\; \{ (j,x) \mid x \in X_j \} \;.$$

Solange das nicht zu Mißverständnissen führt, können (und wollen wir gelegentlich auch) so tun, als sei X_j dasselbe wie der angesprochene Unterraum.

Ein nicht sonderlich interessantes Beispiel für die Konstruktion ist das, wo jeder der Räume X_i nur aus einem einzigen Punkt besteht. In diesem Falle ist $\amalg_{i \in I} X_i$ dasselbe (oder, wenn man es ganz genau nehmen will, “*dasselbe bis auf kanonische Isomorphie*”) wie die Menge I mit der diskreten Topologie.

Einer der interessantesten Fälle für die Konstruktion ist der auch früher schon angesprochene Fall, wo die Indexmenge gerade zwei Elemente hat, etwa $I = \{1,2\}$. Wir wollen für diesen Fall eine andere Notation einführen; nämlich statt $\amalg_{i \in \{1,2\}} X_i$ werden wir auch schreiben $X_1 \,\dot\cup\, X_2$ (oder sogar einfach nur $X_1 \cup X_2$; was allerdings zu Mißverständnissen führen kann, wenn man nicht aufpaßt).

Satz. *X sei topologischer Raum. Es sind äquivalent*:
- *X ist nicht zusammenhängend*
- *X ist topologisch äquivalent zu einer* (nicht–trivialen) *disjunkten Vereinigung.*

Beweis. Wir schauen nach, was die Definitionen bedeuten. Die Aussage “X *ist nicht zusammenhängend*” heißt, daß es nicht–leere offene Mengen $A_1, A_2 \subset X$ gibt, mit $A_1 \cup A_2 = X$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Es folgt, daß die Abbildung

$$A_1 \dot{\cup} A_2 \longrightarrow A_1 \cup A_2 = X \,, \quad (i, x) \longmapsto x \,,$$

bijektiv ist, stetig, und auch offen (weil ja A_1 und A_2 offen in X sind). Die Abbildung ist also eine topologische Äquivalenz.

Sei umgekehrt $X = \amalg_{i \in I} X_i$ und sei $j \in I$. Dann sind X_j und $\amalg_{i \in I, \, i \neq j} X_i$ offen in X , und disjunkt. □

Bemerkung. Wenn X ein topologischer Raum ist, und $x \in X$ ein Punkt darin, so kann man einen Raum X_x definieren, die sogenannte *Zusammenhangskomponente* von x in X . Nach Definition ist dies der größte zusammenhängende Unterraum von X , der x enthält (es ist übrigens gar nicht selbstverständlich, daß ein solcher Unterraum überhaupt existiert, der Beweis für die Existenz ist auch nicht trivial). Man muß sich nun hüten vor der Annahme, daß etwa jeder topologische Raum so etwas wäre, wie die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten; Gegenbeispiel: der *Raum* $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen* (mit Unterraumtopologie als Unterraum von $\mathbb{R}$) ist *total unzusammenhängend* in dem Sinn, daß je zwei Punkte in *verschiedenen* Zusammenhangskomponenten liegen (denn zwischen je zwei rationalen Zahlen x_1 und x_2 liegt ja immer noch eine irrationale Zahl x_3) . Die *Zusammenhangskomponenten* sind also schlicht einpunktige Mengen in dem Fall. Andererseits ist die Unterraumtopologie auf den rationalen Zahlen selbstverständlich *nicht* die diskrete Topologie; anders ausgedrückt: es gibt sicherlich auch Funktionen auf $\mathbb{Q}$, die nicht stetig sind!

Ein noch einfacheres Beispiel dieses Typs ist die Menge $\big\{0\big\} \cup \big\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\big\}$, versehen mit der Unterraumtopologie als Unterraum des Intervalls. □

Wir wollen untersuchen, wann eine disjunkte Vereinigung kompakterRäume wieder kompakt ist. Sei also $\{X_i\}_{i \in I}$, eine Familie kompakter Räume. Aus der Definition der Topologie von $\amalg_{i \in I} X_i$ und aus der Hausdorff–Eigenschaft der X_i erhält man sofort, daß $\amalg_{i \in I} X_i$ auch ein Hausdorff–Raum ist.

Nun zur Überdeckungs–Eigenschaft: Wenn I nicht endlich ist, und wenn $X_i \neq \emptyset$ für alle i , dann ist $\amalg_{i \in I} X_i$ sicherlich nicht quasi–kompakt. Denn z.B. $\{X_i\}_{i \in I}$ ist eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Wir haben aber:

Satz. *Sei* $\{X_i\}_{i \in I}$ *eine Familie von Räumen. Die Indexmenge* I *sei endlich, und für jedes* $i \in I$ *sei* X_i *ein kompakter Raum. Dann ist die disjunkte Vereinigung* $\amalg_{i \in I} X_i$ *ebenfalls kompakt.*

Beweis. Sei $\{A_k\}_{k \in K}$ eine vorgegebene offene Überdeckung von $\amalg_{i \in I} X_i$. Wir wollen zeigen, daß diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Da X_i offen in $\amalg_{i\in I} X_i$ (Definition der disjunkten Vereinigung), ist

$$\{X_i \cap A_k\}_{i\in I,\, k\in K}$$

ebenfalls offene Überdeckung. Wegen der Kompaktheit von X_i existiert eine endliche Teilmenge $K_i \subset K$ mit

$$X_i \quad \subset \quad \bigcup_{k\in K_j} X_i \cap A_k \ .$$

Es folgt, daß $\{X_i \cap A_k\}_{i\in I,\, k\in K_i}$ endliche Überdeckung von $\amalg_{i\in I} X_i$ ist. Durch Ersetzen der $\{X_i \cap A_k\}$ durch die entsprechenden $\{A_k\}$ erhält man hieraus die gesuchte endliche Teilüberdeckung von $\{A_k\}_{k\in K}$. □

Interessanter als der doch sehr spezielle Fall einer *Vereinigung ohne Durchschnitt* ist der allgemeinere Fall einer *Vereinigung mit Durchschnitt*,

$$X \;=\; X_1 \cup X_2 \ , \quad X_1 \cap X_2 \;=\; X_0 \ ,$$

wo eben, möglicherweise, $X_0 \neq \emptyset$.

Beispiel. Die 2–Sphäre ist die Vereinigung ihrer *nördlichen* und *südlichen Halbkugeln*; der Durchschnitt der beiden ist die gemeinsame Randkurve, der *Äquator*. Bis auf topologische Äquivalenz kann man das auch so formulieren, daß die 2-Sphäre die Vereinigung von zwei Kreisscheiben ist, deren Durchschnitt wiederum eine 1-Sphäre ist. □

Beispiele wie dieses suggerieren die folgende Frage.

Frage. *Ist die topologische Struktur von X vollständig bestimmt durch*

- X_1, X_2 *und*
- *die Weise, wie $X_0 = X_1 \cap X_2$ in X_1 und X_2 enthalten ist?*

Anders gefragt: *Wie sinnvoll ist es, in einer solchen Situation zu sagen,* “ *X entsteht aus X_1 und X_2 durch Verkleben entlang X_0* ” ?

Zunächst müssen wir diskutieren, was hier mit *Verklebung* gemeint sein soll. Dazu seien X_1, X_0, X_2 irgendwelche topologischen Räume und

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_2} X_2$$

irgendwelche stetigen Abbildungen. Wir definieren einen neuen Raum (einen Quotientenraum der disjunkten Vereinigung),

$$X_1 \cup_{X_0} X_2 \;:=\; X_1 \dot{\cup} X_2 \,/_{f_1(x)\sim f_2(x)\,;\, x\in X_0} \ .$$

Wir möchten diese Konstruktion interpretieren können als “Verkleben von X_1 und X_2 entlang X_0 ”. Das sollte die Konsequenz haben, daß der Raum $X_1 \cup_{X_0} X_2$ die Räume X_1, X_0, X_2 als Unterräume enthält. Wir betrachten Bedingungen, die das sicherstellen.

Für die Identifikation von X_1 mit einem Unterraum gibt es einen Kandidaten, nämlich die zusammengesetzte Abbildung

$$X_1 \longrightarrow X_1 \stackrel{\cdot}{\cup} X_2 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$$

(d.h., die Inklusion von X_1 in die disjunkte Vereinigung, gefolgt von der Quotientenraumprojektion). Dies ist offenbar auch die einzig vernünftige Möglichkeit, X_1 mit $X_1 \cup_{X_0} X_2$ in Beziehung zu bringen.

Wir wollen Bedingungen über die "Verklebe–Abbildungen" f_1 und f_2 formulieren, die garantieren, daß diese Abbildung $X_1 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ und die analoge Abbildung $X_2 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ die Eigenschaften haben, die sie haben sollen.

- die Abbildung $f_2 : X_0 \longrightarrow X_2$ sei injektiv.

Die Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung, $f_1(x) \sim f_2(x)$ *für* $x \in X_0$, sagt dann vielleicht noch alles mögliche, aber sicher sind keine zwei verschiedenen Punkte aus X_1 jetzt äquivalent, also ist die Abbildung $X_1 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ injektiv.

- die Abbildung $f_1 : X_0 \longrightarrow X_1$ sei injektiv.

Wie gerade eben impliziert dies, daß $X_2 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ injektiv ist.

- Die bijektive Abbildung $f_2 : X_0 \longrightarrow \mathit{Bild}\,(f_2)$ (Unterraum von X_2) sei eine topologische Äquivalenz.

Behauptung. *Die bijektive Abbildung*

$$X_1 \longrightarrow \mathit{Bild}(X_1) \quad \text{(Unterraum von } X_1 \cup_{X_0} X_2)$$

ist dann auch eine topologische Äquivalenz.

Beweis. Zu zeigen ist, daß die Abbildung offen ist: wenn A offene Teilmenge von X_1 ist, dann gibt es eine offene Teilmenge B in $X_1 \cup_{X_0} X_2$ mit

$$B \cap \mathit{Bild}\,(X_1) \;=\; \mathit{Bild}\,(A) \;.$$

Nun ist $f_1^{-1}(A)$ offen in X_0 (Stetigkeit von f_1), deshalb ist $f_2\left(f_1^{-1}(A)\right)$ offen in $\mathit{Bild}\,(f_2)$ (wegen der über f_2 gemachten Voraussetzung); das heißt also, es gibt eine offene Teilmenge $B' \subset X_2$ mit $B' \cap \mathit{Bild}\,(f_2) = f_2\left(f_1^{-1}(A)\right)$. Damit erhalten wir

$$B \cap \mathit{Bild}\,(X_1) \;=\; \mathit{Bild}\,(A) \;,$$

wobei $B := B' \cup A$ (aufgefaßt als Vereinigung von Mengen in $X_1 \cup_{X_0} X_2$). Daß die Menge B nun offen in $X_1 \cup_{X_0} X_2$ ist, wie gewünscht, folgt sofort aus der Definition der Quotiententopologie, denn das Urbild von B in $X_1 \stackrel{\cdot}{\cup} X_2$ ist die Menge $A \stackrel{\cdot}{\cup} B'$, und diese ist offen in $X_1 \stackrel{\cdot}{\cup} X_2$, da B' offen in X_2 ist, und A offen in X_1. $\square$

- Die bijektive Abbildung $f_1 : X_0 \longrightarrow \mathit{Bild}\,(f_1)$ sei eine topologische Äquivalenz.

Ähnlich wie gerade eben impliziert dies, daß auch die Abbildung

$$X_2 \longrightarrow \mathit{Bild}\,(X_2) \quad \text{(Unterraum von } X_1 \cup_{X_0} X_2)$$

eine topologische Äquivalenz ist.

Zusatz zu S. 50

Zur Verklebe–Konstruktion

$$X_1 \cup_{X_0} X_2 \ := \ X_1 \dot{\cup} X_2 \,/_{f_1(x) \sim f_2(x)\,;\, x \in X_0}$$

ist dort angemerkt:

- die Abbildung $f_2 : X_0 \longrightarrow X_2$ sei injektiv.

Die Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung, $f_1(x) \sim f_2(x)$ *für* $x \in X_0$, sagt dann vielleicht noch alles mögliche, aber sicher sind keine zwei verschiedenen Punkte aus X_1 jetzt äquivalent, also ist die Abbildung $X_1 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ injektiv.

Hier ist eine etwas detailliertere Begründung dafür.

Die von “ $f_1(x) \sim f_2(x)$ für $x \in X_0$ ” erzeugte Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung läßt sich für die Punkte aus X_1 so beschreiben:

$x,\, y \in X_1$ *sind äquivalent genau dann, wenn es eine Kette von Punkten gibt,*

$$x = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots\ ,\ x_{4k+1} = y$$

mit

$$x_1 = f_1(x_2)\,,\ f_2(x_2) \ = \ x_3 \ = \ f_2(x_4)\,,\ f_1(x_4) \ = \ x_5 \ \ \ldots\ .$$

In der vorliegenden Situation (f_2 *injektiv*) schließen wir, daß in einer solchen Kette notwendigerweise die beiden Punkte

$$x_2\,,\ x_4 \ \in \ X_0$$

zueinander gleich sind, da sie ja dasselbe Bild $x_3 \in X_2$ haben. Also muß auch

$$x_1 \ = \ x_5$$

sein. — Usw.

Über den Raum X_0 notieren wir noch folgendes. Die beiden zusammengesetzten Abbildungen in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ {\scriptstyle f_2}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & X_1 \cup_{X_0} X_2 \end{array}$$

sind identisch und induzieren eine bijektive Abbildung $X_0 \longrightarrow \mathit{Bild}\,(X_0)$; auch diese Abbildung ist eine topologische Äquivalenz (denn weil X_0 Unterraum von X_1 und X_1 Unterraum von $X_1 \cup_{X_0} X_2$, folgt, daß auch X_0 Unterraum von $X_1 \cup_{X_0} X_2$ ist). Schließlich ist noch

$$\mathit{Bild}\,(X_0) \;=\; \mathit{Bild}\,(X_1) \cap \mathit{Bild}\,(X_2)$$

(als Unterräume von $X_1 \cup_{X_0} X_2$). Unter den angegebenen Bedingungen führt unsere Konstruktion mithin tatsächlich auf das, was wir von dem Verklebeprozeß erwarten.

Wir kommen zu unserer Frage von vorhin zurück, die wir jetzt etwas anders formulieren wollen. Sei X topologischer Raum. Seien X_1 und X_2 Unterräume von X , so daß $X_1 \cup X_2 = X$. Wir setzen $X_0 = X_1 \cap X_2$. Die beiden Inklusions–Abbildungen $j_1 : X_1 \longrightarrow X$ und $j_2 : X_2 \longrightarrow X$ induzieren dann eine surjektive stetige Abbildung

$$g : X_1 \mathbin{\dot\cup} X_2 \;\longrightarrow\; X \ .$$

Wir bilden den "zusammengeklebten" Raum $X_1 \cup_{X_0} X_2$, wobei die Abbildungen

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_2} X_2$$

durch die Inklusionen gegeben seien. Für $x \in X_0$ gilt dann $g(f_1(x)) \,=\, g(f_2(x))$, die Abbildung g faktorisiert deshalb über eine stetige Abbildung

$$f : X_1 \cup_{X_0} X_2 \longrightarrow X \,,$$

und diese Abbildung ist *bijektiv*. Unsere obige Frage läßt sich jetzt so präzisieren:

FRAGE: *Wann ist die Abbildung f eine topologische Äquivalenz ?*

Das ist sicherlich nicht der Fall ohne zusätzliche Bedingungen, wie man an folgendem Sachverhalt sehen kann. Sei X zusammenhängender Raum, sei X_1 Unterraum von X , $\emptyset \neq X_1 \neq X$, sei X_2 das Komplement von X_1 in X . Wenn wieder X_0 den Durchschnitt von X_1 und X_2 bezeichnet, so ist im gegenwärtigen Fall $X_0 = \emptyset$, also $X_1 \cup_{X_0} X_2 \;\approx\; X_1 \mathbin{\dot\cup} X_2$. Die Abbildung $X_1 \cup_{X_0} X_2 \;\longrightarrow\; X$ kann also in diesem Fall keine topologische Äquivalenz sein, da X als zusammenhängend vorausgesetzt war und deshalb nicht disjunkte Vereinigung in nicht–trivialer Weise sein kann.

SATZ. *Hinreichend dafür, daß f topologische Äquivalenz ist, ist, daß X_1 und X_2 beide abgeschlossen in X sind. — Ebenfalls hinreichend ist, daß sie beide offen sind.*

Beweis. Eine stetige bijektive Abbildung ist genau dann eine topologische Äquivalenz, wenn sie zusätzlich noch die Eigenschaft hat, eine *offene Abbildung* zu sein (oder, was in diesem Fall dasselbe bedeutet, eine *abgeschlossene Abbildung*). Wir behandeln den einen der beiden Fälle. Das Argument im andern Fall ist wörtlich dasselbe — abgesehen davon, natürlich, daß in dem Argument das Wort "abgeschlossen" zu ersetzen ist durch das Wort "offen".

Wir setzen also jetzt voraus, daß X_1 und X_2 abgeschlossene Unterräume in X sind. Wir werden zeigen, daß dann f eine *abgeschlossene Abbildung* ist; d.h., daß folgendes gilt:

Sei $A \subset X$, $f^{-1}(A)$ *abgeschlossen in* $X_1 \cup_{X_0} X_2$. *Dann ist* A *abgeschlossen in* X .

Dazu sei $A_1 = A \cap X_1$ und $A_2 = A \cap X_2$, also $A = A_1 \cup A_2$. Daß $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in $X_1 \cup_{X_0} X_2$ ist, heißt (nach Definition der Quotiententopologie), daß $q^{-1}(f^{-1}(A))$ abgeschlossen in $X_1 \dot\cup X_2$ ist, wobei $q : X_1 \dot\cup X_2 \longrightarrow X_1 \cup_{X_0} X_2$ die Quotientenraumprojektion bezeichnet. Nun ist

$$q^{-1}\left(f^{-1}(A)\right) \;=\; A_1 \dot\cup A_2 \;.$$

Wir schließen, daß $A_1 \dot\cup A_2$ abgeschlossen in $X_1 \dot\cup X_2$ ist. Nach Definition der Topologie der disjunkten Vereinigung heißt dies, daß erstens A_1 abgeschlossen in X_1 ist und zweitens auch A_2 abgeschlossen in X_2 . Nach Voraussetzung nun waren X_1 und X_2 abgeschlossene Unterräume von X . Es folgt, daß auch A_1 und A_2 in X abgeschlossen sind (denn ein abgeschlossener Unterraum in einem abgeschlossenen Unterraum ist auch in dem Gesamtraum abgeschlossen). Also ist auch die Vereinigungsmenge $A = A_1 \cup A_2$ abgeschlossen in X . Der Beweis ist fertig. □

Bemerkung. Die Notation $X_1 \cup_{X_0} X_2$ ist sehr bequem und sie ist auch ganz üblich. Man sollte aber nicht vergessen, daß sie auch ein wenig ungenau ist, da die Verklebeabbildungen

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_0 \xrightarrow{f_2} X_2$$

ja ausdrücklich nicht spezifiziert werden.

So kann man etwa sehr viele Räume angeben, die sich in der Form $D^n \cup_{D^n} D^n$ darstellen lassen, wo D^n den $n-$*dimensionalen Ball* bezeichnet, $D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$.

Zum Beispiel $D^1 \cup_{D^1} D^1$ kann bedeuten:

- eine Strecke (die zu verklebenden $1-$Bälle werden in ihrer ganzen Länge identifiziert)
- eine "Ypsilon"–artige Figur (von den zu verklebenden Intervallen werden nur die unteren Hälften identifiziert).

Oder $D^2 \cup_{D^2} D^2$ kann bedeuten:

- eine Scheibe (die zu verklebenden $2-$Bälle werden insgesamt identifiziert)
- eine "Jojo"–artige Figur (die beiden zu verklebenden Scheiben werden nur entlang einer kleineren konzentrischen Scheibe identifiziert).

Für ein weiteres Beispiel erinnern wir uns daran, daß die S^2 in der Form $D^2 \cup_{S^1} D^2$ dargestellt werden kann; dabei werden die beiden Verklebe–Abbildungen

$$D^2 \xleftarrow{f_1} S^1 \xrightarrow{f_2} D^2$$

benutzt, die jeweils die S^1 mit der Randkurve der einen oder der anderen Scheibe identifizieren. Wir nehmen jetzt dieselben Räume, aber andere Verklebe–Abbildungen; nämlich f_1 sei wie zuvor, aber f_2 möge die S^1 mit einem konzentrischen Kreis in D^2 identifizieren. Der durch diese Verklebung entstehende Raum ist nicht wieder die 2– Sphäre; er ist vielmehr so etwas wie die Oberfläche des Saturn mit aufgesetztem Ring. □

Wir wollen noch kurz diskutieren, was geschieht, wenn man beim Verklebe–Prozeß die beteiligten Räume durch topologisch äquivalente Räume ersetzt. Wir erwarten, daß dann auch das Resultat des Verklebeprozesses wieder dasselbe sein wird — jedenfalls bis auf topologische Äquivalenz. Sei also

$$X_1 \xleftarrow{f_0} X_0 \xrightarrow{f_2} X_2$$

ein Diagramm derart, wie wir es beim Verkleben benutzt haben. Wir wollen X_1, X_0, X_2 durch topologisch äquivalente Räume X_1', X_0', X_2' ersetzen; wir möchten schließen, daß $X_1 \cup_{X_0} X_2$ topologisch äquivalent ist zu $X_1' \cup_{X_0'} X_2'$. Dabei müssen wir aufpassen, was die Verklebeabbildungen

$$X_1' \xleftarrow{f_1'} X_0' \xrightarrow{f_2'} X_2'$$

angeht: die obigen Beispiele zeigen, daß sonst wohl nur wenig Chance dafür bestünde, daß $X_1 \cup_{X_0} X_2$ topologisch äquivalent zu $X_1' \cup_{X_0'} X_2'$ sein wird.

Am besten wird es wohl sein, wenn wir uns die f_1' auf geeignete Weise aus den anderen Daten verschaffen.

Seien also zusätzlich zu den Verklebeabbildungen f_1 und f_2 noch topologische Äquivalenzen $h_i : X_i \longrightarrow X_i'$ fixiert. Wir können diese Daten zusammenfassen in einem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
X_1 & \xleftarrow{f_1} & X_0 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\
\downarrow h_1 & & \downarrow h_0 & & \downarrow h_2 \\
X_1' & & X_0' & & X_2'
\end{array}$$

Dieses Diagramm wiederum können wir ergänzen zu einem *kommutativen* Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
X_1 & \xleftarrow{f_1} & X_0 & \xrightarrow{f_2} & X_2 \\
\downarrow h_1 & & \downarrow h_0 & & \downarrow h_2 \\
X_1' & \xleftarrow{f_1'} & X_0' & \xrightarrow{f_2'} & X_2'
\end{array}$$

indem wir einfach definieren

$$f_1' \ := \ h_1 \circ f_1 \circ h_0^{-1} \ , \quad f_2' \ := \ h_2 \circ f_2 \circ f_0^{-1}$$

(wobei wir benutzen, das h_0 topologische Äquivalenz ist; daß also die stetige Umkehrabbildung h_0^{-1} existiert). Die Kommutativität des Diagramms besagt hier natürlich nichts anderes als die Gleichheit der Abbildungen:

$$h_1 \circ f_1 = f_1' \circ h_0 : \ X_0 \longrightarrow X_1' \ , \quad h_2 \circ f_2 = f_2' \circ h_0 : \ X_0 \longrightarrow X_2' \ .$$

Wir können eine ganz bestimmte "kanonische" Abbildung definieren

$$h : \ X_1 \cup_{X_0} X_2 \longrightarrow X_1' \cup_{X_0'} X_2' \ ,$$

nämlich

$$h(x) \ = \ \begin{cases} h_1(x) & \text{wenn} \quad x \in X_1 \\ h_0(x) & \text{wenn} \quad x \in X_0 \\ h_2(x) & \text{wenn} \quad x \in X_2 \end{cases} .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert (wegen der Kommutativität des obigen Diagramms). Sie ist stetig, weil die zusammengesetzte Abbildung

$$X_1 \ \dot\cup \ X_2 \ \longrightarrow \ X_1 \cup_{X_0} X_2 \ \longrightarrow \ X_1' \cup_{X_0'} X_2'$$

stetig ist (Stetigkeit von h_1 und h_2) und wegen der Definition von $X_1 \cup_{X_0} X_2$ als Quotientenraum von $X_1 \ \dot\cup \ X_2$.

Wir wollen zeigen, daß h eine topologische Äquivalenz ist, also eine Umkehrabbildung hat. Dies erfordert keine neuen Argumente: weil h_1, h_0, h_2 topologische Äquivalenzen sind, können wir das obige Diagramm "rückwärts" lesen, d.h. wir haben ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X_1' \arrow[d, "h_1^{-1}"] & X_0' \arrow[l, "f_1'"'] \arrow[r, "f_2'"] \arrow[d, "h_0^{-1}"] & X_2' \arrow[d, "h_2^{-1}"] \\
X_1 & X_0 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[r, "f_2"] & X_2
\end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm nun kommutiert ebenfalls (das folgt aus der Kommutativität des obigen Diagramms), und wie vorher erhalten wir deshalb eine ganz bestimmte Abbildung

$$h' : \ X_1' \cup_{X_0'} X_2' \ \longrightarrow \ X_1 \cup_{X_0} X_2 \ ,$$

die wiederum stetig ist. Wir brauchen nun nur noch die nicht sehr überraschende Tatsache nachzuprüfen, daß h' zu h invers ist; z.B., wenn $x \in X_1$, dann ist

$$h'(h(x)) \ = \ h'\,(h_1(x)) \ = \ h_1^{-1}\,(h_1(x)) \ = \ x \ ,$$

und wenn $x \in X_1'$ dann ist

$$h(h'(x)) \ = \ h\left(h_1^{-1}(x)\right) \ = \ h_1\left(h_1^{-1}(x)\right) \ = \ x \ .$$

Die konstruierte Abbildung h ist also eine topologische Äquivalenz von $X_1 \cup_{X_0} X_2$ zu $X_1' \cup_{X_0'} X_2'$.

Deformationsklassen von Schlingen

Im Rahmen der Einführung hatten wir seinerzeit skizzenhaft zur Kenntnis genommen, daß man in einigen interessanten Fällen topologische Räume dadurch als verschieden erkennen kann (genauer: als nicht topologisch äquivalent), daß man "Schlingen" in diesen Räumen betrachtet, oder vielmehr Deformationsklassen von solchen (vgl. Seiten 11–12). Nachdem wir die hierfür benötigten Hilfsmittel uns nunmehr verschafft haben, wollen wir diese Dinge jetzt näher anschauen.

Definition. Bezeichne S^1 den Kreis. Eine *Schlinge* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung $f : S^1 \to X$.

Wie angedeutet (vgl. S. 12), sollen zwei Schlingen f_0 und f_1 als "deformations–äquivalent" (oder "homotop") bezeichnet werden, wenn eine "Deformation" von der einen Schlinge in die andere existiert. Das präzisieren wir jetzt wie folgt:

Definition. Seien f_0, f_1 Schlingen in X . Eine *Deformation* von f_0 zu f_1 ist eine stetige Abbildung

$$F : S^1 \times [0,1] \longrightarrow X ,$$

mit

$$F \mid S^1{\times}0 = f_0 , \quad F \mid S^1{\times}1 = f_1 .$$

Definition. Seien f und f' Schlingen in X . f und f' heißen *homotop*, wenn eine Deformation von f zu f' existiert.

Satz. *Homotopie von Schlingen ist eine Äquivalenz–Relation.*

Beweis. Die Behauptung ist, daß die Relation *homotop* schon die Eigenschaften hat, die eine Äquivalenzrelation ausmachen: Reflexivität, Symmetrie, Transitivität. Der Beweis dafür läuft auf die Angabe geeigneter Homotopien hinaus.

— *Reflexivität.* Ist $f : S^1 \to X$ eine Schlinge, dann ist die *konstante Deformation*, d.h. die Abbildung

$$S^1{\times}[0,1] \xrightarrow{\mathrm{pr}} S^1 \xrightarrow{f} X , \quad (x,t) \mapsto x \mapsto f(x)$$

eine Deformation von f zu sich selbst.

— *Symmetrie.* Seien f_0, f_1 Schlingen derart, daß eine Deformation von f_0 zu f_1 existiert; sei $F : S^1 \times [0,1] \to X$ eine solche Deformation. Durch das "Umflippen" von F erhält man dann auch eine Deformation F' von f_1 zu f_0 . Im Detail: F' ist die zusammengesetzte Abbildung

$$S^1{\times}[0,1] \xrightarrow{\mathrm{id}_{S^1}\times\tau} S^1{\times}[0,1] \xrightarrow{F} X$$

wobei der “Flip” gegeben ist durch

$$\tau : \ [0,1] \longrightarrow [0,1] \ , \quad \tau(t) \ = \ 1{-}t \ .$$

— *Transitivität.* Sei F eine Deformation von f_0 zu f_1 , und G eine Deformation von f_1 zu f_2 . Man erhält eine Deformation H von f_0 zu f_2 durch *Zusammensetzen* von F und G . Im Detail: für $s \in S^1$ und $t \in [0,1]$ definiert man

$$H(s,t) \ = \ \begin{cases} F(s,\, 2t) & \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s,\, 2t{-}1) & \text{für} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Definition. Sei X topologischer Raum. Es bezeichnet $\mathcal{S}(X)$ die *Menge der Homotopieklassen von Schlingen in* X , d.h. die Menge der Schlingen in X modulo der soeben eingeführten Äquivalenz–Relation “*homotop*”.

Beispiel. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *hat nur ein Element.* — Denn sind $f_0,\, f_1 : S^1 \to \mathbb{R}^n$ zwei Schlingen, dann ist

$$F(s,t) \ = \ (1{-}t) f_0(s) + t\, f_1(s)$$

eine Deformation von f_0 zu f_1 ; je zwei Schlingen sind also homotop.

Wie schon erwähnt, ist unser Ziel, zumindest in einigen Fällen Räume dadurch als verschieden (*als nicht topologisch äquivalent*) zu erkennen, daß wir die Mengen $\mathcal{S}(\dots)$ wirklich ausrechnen (und feststellen, daß sie verschieden sind). Das beruht auf dem folgenden Sachverhalt.

Satz: *Wenn* X *und* X' *topologisch äquivalente Räume sind, dann sind* $\mathcal{S}(X)$ *und* $\mathcal{S}(X')$ *äquivalente Mengen.*

Dies ist ein Aspekt der sogenannten *Funktorialität* der Zuordnung $X \mapsto \mathcal{S}(X)$. Was das bedeutet, ist schon in der Einführung (S. 8 – 11) anhand der Konstruktion $X \mapsto \pi_0 X$ (*Menge der Weg–Zusammenhangs–Komponenten von* X) beschrieben worden. Der wesentliche Punkt ist der, daß eine Konstruktion nicht nur für *Objekte* vorliegt (hier: jedem Raum ist eine Menge zugeordnet), sondern *gleichzeitig auch für Abbildungen zwischen diesen* (hier: jeder *Abbildung von Räumen* (stetige Abbildung!) ist auch eine *Abbildung von Mengen* zugeordnet); und daß schließlich diese Zuordnung noch die vernünftigen Eigenschaften hat, die man erwarten kann. Wir gehen die Dinge noch einmal durch.

— *Eine Abbildung* $\varphi : X \to Y$ *induziert eine Abbildung* $\varphi_* \colon \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Y)$. Diese ist definiert durch

$$\varphi_*([f]) := \ [\varphi \circ f] \ .$$

Mit anderen Worten, φ_* ist in der offensichtlichen Weise für Repräsentanten definiert, $\big(f : S^1 \to X\big) \longmapsto \big(\varphi{\circ}f : S^1 \to Y\big)$. Und damit dies die gewünschte Abbildung auf den Homotopieklassen gibt, prüft man nach, daß die Zuordnung die Äquivalenz–Relation "homotop" respektiert. Das ist aber klar, denn ist $F: S^1 \times [0,1] \to X$ eine Deformation von f_0 zu f_1, dann ist $\varphi \circ F: S^1 \times [0,1] \to Y$ eine Deformation von $\varphi \circ f_0$ zu $\varphi \circ f_1$.

— *Die Zuordnung* $\varphi \mapsto \varphi_*$ *ist mit der Komposition von Abbildungen verträglich.* Das heißt, wenn φ und ψ zusammensetzbare Abbildungen von Räumen sind,

$$X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \ ,$$

so gilt $(\psi \circ \varphi)_* \ = \ \psi_* \circ \varphi_*$ (Gleichheit von Abbildungen $\mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Z)$). Daß dies richtig ist, folgt aber unmittelbar aus den Definitionen von $(\psi \circ \varphi)_*$, ψ_* und φ_* ,

$$(\psi \circ \varphi)_*(\,[f]\,) \ = \ [\,(\psi \circ \varphi) \circ f\,] \ = \ \psi_*(\,[\varphi \circ f]\,) \ = \ \psi_*(\varphi_*(\,[f]\,)) \ .$$

— *Die Zuordnung* $\varphi \mapsto \varphi_*$ *respektiert identische Abbildungen.* Das heißt, für jeden Raum X ist (klar!)

$$(Id_X)_* \ = \ Id_{\mathcal{S}(X)} \ .$$

Beweis des Satzes. Sei $\varphi : X \to X'$ topologische Äquivalenz; $\psi : X' \to X$ sei zu φ inverse Abbildung. Dann ist

$$Id_{\mathcal{S}(X)} \ = \ (Id_X)_* \ = \ (\psi \circ \varphi)_* \ = \ \psi_* \circ \varphi_* \ .$$

Ähnlich auch $Id_{\mathcal{S}(X')} = \varphi_* \circ \psi_*$. Das heißt aber nichts anderes, als daß φ_* und ψ_* zueinander inverse Abbildungen zwischen $\mathcal{S}(X)$ und $\mathcal{S}(X')$ sind. □

Der folgende Satz beinhaltet eine weitere nützliche Tatsache geringen Tiefgangs.

Satz. *Seien* X, Y *topologische Räume und* $X \times Y$ *ihr Produkt. Es ist*

$$\mathcal{S}(X \times Y) \ \approx \ \mathcal{S}(X) \times \mathcal{S}(Y) \ .$$

Beweis. Eine Schlinge in $X \times Y$ ist, nach Definition, eine Abbildung

$$h: S^1 \ \longrightarrow \ X \times Y \ .$$

Per Übergang zu den Komponentenabbildungen entspricht sie einem Paar

$$f: S^1 \to X \ , \quad g: S^1 \to Y \ ; \qquad f \ = \ pr_1 \circ h \ , \ \ g \ = \ pr_2 \circ h$$

und, wie wir wissen (S. 34), gilt auch: h *stetig* $\iff$ f *stetig und* g *stetig*. Die resultierende Bijektion

$$(\text{Schlingen in } X \times Y) \ \xrightarrow{\approx} \ (\text{Schlingen in } X) \times (\text{Schlingen in } Y)$$

respektiert zudem die Äquivalenz–Relation, denn eine Deformation von h_0 zu h_1 ist ja, wieder nach Definition, eine Abbildung

$$H: \ S^1 \times [0,1] \ \longrightarrow \ X \times Y$$

mit $H \mid S^1{\times}0 = h_0$, $H \mid S^1{\times}1 = h_1$. Sie entspricht damit, wie oben, einem Paar von Abbildungen

$$F\colon S^1{\times}[0,1] \longrightarrow X \ , \quad G\colon S^1{\times}[0,1] \longrightarrow Y$$

mit $F \mid S^1{\times}0 = f_0$, $F \mid S^1{\times}1 = f_1$ und $G \mid S^1{\times}0 = g_0$, $G \mid S^1{\times}1 = g_1$; d.h. sie entspricht einem Paar von Deformationen von f_0 zu f_1 und von g_0 zu g_1 . □

Weil $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nur ein Element hat (s. oben) erhalten wir

KOROLLAR. *Für jeden topologischen Raum X gilt*

$$\mathcal{S}(X{\times}\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\approx} \mathcal{S}(X) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\approx} \mathcal{S}(X) \ .$$

BEISPIEL. Wir wissen, $\mathbb{R}^n - 0$ ist topologisch äquivalent zu $S^{n-1} \times \mathbb{R}^1$. Es folgt

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n - 0) \approx \mathcal{S}\left(S^{n-1} \times \mathbb{R}^1\right) \approx \mathcal{S}\left(S^{n-1}\right) \ .$$

Unser Programm für die nächste Zukunft ist es, folgendes zu zeigen:

- $\mathcal{S}(S^n)$, *für* $n \geq 2$, *hat nur ein Element.*
- $\mathcal{S}(S^1)$ *hat (abzählbar) unendlich viele Elemente.*

Als Folgerung hiervon werden wir die folgenden Klassifikationssätze haben.

SATZ. S^1 *ist nicht topologisch äquivalent zu* S^n *wenn* $n \geq 2$.
Denn sonst würde ja folgen

$$\mathcal{S}(S^1) \approx \mathcal{S}(S^n) \qquad (\,??\,)$$

was aber der angegebenen Berechnung widerspricht.

SATZ. $\mathbb{R}^2$ *ist nicht topologisch äquivalent zu* $\mathbb{R}^n$ *wenn* $n \geq 3$.
Denn andernfalls wäre auch $\mathbb{R}^2 - 0$ topologisch äquivalent zu $\mathbb{R}^n - 0$ und das hätte zur Folge

$$\mathcal{S}(S^1) \approx \mathcal{S}(\mathbb{R}^2 - 0) \approx \mathcal{S}(\mathbb{R}^n - 0) \approx \mathcal{S}(S^{n-1}) \qquad (\,??\,)$$

was wiederum der Berechnung widerspricht.

SATZ. S^2 *ist nicht topologisch äquivalent zum Torus.*
Denn da der Torus topologisch äquivalent ist zu $S^1 \times S^1$, würde andernfalls folgen

$$\mathcal{S}(S^2) \approx \mathcal{S}(S^1 \times S^1) \approx \mathcal{S}(S^1) \times \mathcal{S}(S^1) \qquad (\,??\,)$$

was aber auch nicht sein kann.

Wir wollen jetzt mit dem Beweis des Satzes beginnen, daß $\mathbb{S}(S^n)$, für $n \geq 2$, nur ein einziges Element hat; daß, mit anderen Worten, je zwei Schlingen in S^n ineinander deformiert werden können, wenn $n \geq 2$. Das Argument geht in mehreren Schritten, wobei zunächst nur Schlingen spezieller Art betrachtet werden, und wobei jeweils der folgende Fall dann auf den vorherigen zurückgeführt wird.

1. Fall. Bezeichne eine *triviale Schlinge* eine solche, die durch eine *konstante Abbildung* $f: S^1 \to X$ gegeben ist, d.h. wo das Bild $f(S^1)$ nur aus einem einzigen Punkt besteht. Da S^n wegzusammenhängend ist (wenn $n \geq 1$) sind je zwei triviale Schlingen in S^n homotop. (Denn sei $w: [0,1] \to S^n$ ein Weg, dann ist die Abbildung

$$S^1 \times [0,1] \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} [0,1] \xrightarrow{w} S^n$$

eine Deformation zwischen den trivialen Schlingen mit Werten $w(0)$ und $w(1)$). Es wird also genügen zu zeigen, daß jede Schlinge in S^n in eine triviale Schlinge deformiert werden kann, wenn $n \geq 2$. Damit befassen sich die beiden folgenden Fälle.

2. Fall. Es sei $f: S^1 \to S^n$ eine Schlinge mit der Eigenschaft, daß $f(S^1) \neq S^n$ (d.h., die Abbildung f ist nicht surjektiv). Es wird gezeigt, daß f in eine triviale Schlinge deformiert werden kann. (Hierbei ist der Fall $n = 1$ zugelassen). Das Argument beruht auf dem folgenden Sachverhalt.

Satz. *Sei* $z \in S^n$. *Es gibt eine topologische Äquivalenz* $\phi: S^n - \{z\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Beweis. Es ist nicht immer so, daß man eine topologische Äquivalenz tatsächlich auch explizit hinschreiben kann, aber es ist so im vorliegenden Fall. Die Abbildung ϕ ist gegeben durch die sogenannte *stereographische Projektion*, die folgendermaßen definiert ist. Wir fassen S^n auf als die Einheits–Sphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$, und $\mathbb{R}^n$ als den zu dem Vektor z orthogonalen Unterraum. Zu einem Punkt $x \in S^n$, $x \neq z$, wird nun der Bildpunkt $y = \phi(x)$ so bestimmt, daß

— y auf der Geraden durch z und x liegt, also $y = z + a\,(x - z)$

— y zu z orthogonal ist, also $y \cdot z = 0$ (Skalarprodukt von Vektoren).

Die Zahl a bestimmt sich dann durch die Gleichung

$$0 = y \cdot z = z \cdot z + a\,(x - z) \cdot z$$

(sowie $z \cdot z = 1$). Es ergibt sich $a = \frac{-1}{(x-z)\cdot z}$ und

$$y = z - \frac{1}{(x - z) \cdot z}\,(x - z) \ .$$

Die Umkehrabbildung ψ läßt sich ähnlich explizit angeben. Sei nämlich y ein Punkt in dem zu z orthogonalen Unterraum. Der Punkt $x = \psi(y)$ ist dann gegeben als der (andere) Schnittpunkt der Einheits–Sphäre mit der Geraden durch y und z . Um ihn explizit anzugeben, bemerken wir, daß der Punkt in der Mitte zwischen x und z

derjenige Punkt auf der Geraden ist, der dem Ursprung am nächsten liegt. Wenn wir also den Ansatz machen

$$x \ = \ z + 2b\,(y-z) \ ,$$

so bestimmt sich die Zahl b durch die Gleichung

$$(\,z + b\,(y-z)\,) \cdot (y-z) \ = \ 0$$

(sowie $z \cdot (y{-}z) \ = \ -1$). Es ergibt sich $b \ = \ \frac{1}{(y-z)\cdot(y-z)}$ und

$$x \ = \ z \ + \ \frac{2}{(y-z)\cdot(y-z)}\,(y-z) \ .$$

Daß die Abbildungen ϕ und ψ stetig sind, ist klar. Daß sie zueinander invers sind, ergibt sich aus ihrer Herleitung; mit ein wenig Geduld könnte man es auch durch Einsetzen nachprüfen (dabei benutzt man, daß $(x{-}z)\cdot(x{+}z) = 0$). $\square$

Zurück nun zu der Situation des 2. Falles. Wir wollen uns davon überzeugen, daß eine vorgegebene Schlinge $f : S^1 \to S^n$ in eine triviale Schlinge deformiert werden kann, wenn wir noch zusätzlich voraussetzen, daß es einen Punkt $z \in S^n$ gibt, der nicht im Bild von f liegt.

Der wesentliche Punkt hierbei ist, daß wir f auch auffassen können als Abbildung in den Unterraum $S^n{-}\{z\}$; oder, um es genau zu nehmen, wir schreiben f jetzt als Komposition

$$f \ = \ j \circ f' \ ,$$

wo $j : S^n{-}\{z\} \to S^n$ die Inklusion des Unterraumes bezeichnet, und $f' : S^1 \to S^n{-}\{z\}$ eine Schlinge in diesem Unterraum.

Es wird genügen, eine Homotopie

$$F' : \ S^1 \times [0,1] \ \longrightarrow \ S^n{-}\{z\}$$

von der Abbildung f' zu einer trivialen Schlinge anzugeben; denn die zusammengesetzte Abbildung $j \circ F'$ ist dann die gewünschte Homotopie für die Schlinge f selbst. Die Homotopie F' verschaffen wir uns über die topologische Äquivalenz von $S^n{-}\{z\}$ zu $\mathbb{R}^n$. Wir benutzen die oben beschriebenen Abbildungen ϕ und ψ (die stereographische Projektion und ihre Inverse). Zunächst ist $\phi \circ f'$ eine Schlinge in $\mathbb{R}^n$. Diese ist deformierbar in eine triviale Schlinge (etwa mit Wert 0); eine Homotopie, die das leistet, ist gegeben durch

$$F : \ S^1 \times [0,1] \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^n \ , \qquad F(s,t) \ = \ (1-t)\ \phi(f'(s)) \ .$$

Die zusammengesetzte Abbildung $\psi \circ F$ ist dann die gewünschte Homotopie F' .

3. Fall (*der allgemeine Fall*). Unser Ziel ist, diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen. Dazu werden wir folgendes zeigen. *Sei* $f : S^1 \to S^n$ *eine Schlinge. Wenn* $n \geq 2$, *dann gibt es eine Deformation von* f *zu einer Schlinge* f' *mit der Eigenschaft* $f'(S^1) \neq S^n$. Der Beweis ist eine Variante des Arguments aus dem vorigen Fall. Es wird nämlich in einem ersten Schritt gezeigt, daß sich S^1 durch endlich viele Teilbögen überdecken läßt

$$S^1 \;=\; B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_m$$

mit der Eigenschaft, daß jede einzelne der eingeschränkten Abbildungen $f|B_j : B_j \to S^n$ *nicht* surjektiv ist. Im zweiten Schritt werden dann die Abbildungen $f|B_j$ einzeln auf geeignete Weise deformiert.

Der erste Schritt beruht auf einem ganz allgemeinen Sachverhalt. Dies ist ein wichtiger Satz, den wir später auch in anderem Zusammenhang noch oft benötigen werden.

Satz (Lebesgue'scher Überdeckungssatz). *Sei* M *kompakter metrischer Raum. Sei* $\{O_i\}_{i\in I}$ *offene Überdeckung von* M . *Dann existiert ein* $\varepsilon > 0$ *mit der folgenden Eigenschaft. Für jeden Punkt* $x \in M$ *existiert ein* $i \in I$, *so daß die* ε*–Kugel um* x *ganz enthalten ist in der offenen Menge* O_i .

Beweis. Bezeichne $(x, y) \mapsto d(x, y)$ die Distanzfunktion auf dem metrischen Raum M . Ist $A \subset M$ nicht–leere Teilmenge, so definiert man eine Funktion $d_A : M \to \mathbb{R}_+$ ("*Distanz zu* A ") durch

$$d_A(x) \;=\; \inf_{z\in A} d(x, z) \; .$$

Die Gleichung $d_A(x) = 0$ charakterisiert dann diejenigen Punkte x aus M , die Adhärenzpunkte von A sind; wenn speziell A eine abgeschlossene Menge in M ist, so charakterisiert diese Gleichung die Punkte von A selbst. Die Distanzfunktion $d_A : M \to \mathbb{R}_+$ ist eine *stetige Funktion*. Denn für $x, y \in M$ und für alle $z \in A$ ist ja $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Hieraus folgt

$$d_A(x) \;\leq\; d(x, y) + d_A(y) \; .$$

Die Ungleichungen $d_A(x) \leq d_A(y) + d(x, y)$ und (analog) $d_A(y) \leq d_A(x) + d(x, y)$ zusammen besagen dann, daß $|\, d_A(x) - d_A(y)\,| \leq d(x, y)$.

Die vorgegebene Überdeckung $\{O_i\}_{i\in I}$ hat eine endliche Teilüberdeckung $\{O_i\}_{i\in J}$ (weil M kompakt ist). Es wird genügen, die vorgegebene Überdeckung durch die Teilüberdeckung zu ersetzen und die Behauptung des Satzes für diese zu beweisen. Dazu betrachten wir die Funktionen $d_i := d_{CO_i}$,

$$d_i(x) \;=\; \textit{Abstand von } x \textit{ zum Komplement von } O_i \; .$$

Weil das Komplement CO_i *abgeschlossene* Menge ist, sind die Punkte aus O_i charakterisiert durch die Tatsache

$$d_i(x) \;>\; 0 \; .$$

Nun ist jeder Punkt aus M enthalten in einer der Mengen O_i (die Mengen bilden ja eine Überdeckung), also ist auch mindestens eine der Funktionen d_i dort > 0 . Es folgt, daß das Supremum dieser Funktionen

$$s(x) \;=\; \sup_{i \in J} d_i(x)$$

überall einen Wert > 0 hat. Andererseits ist s als Supremum endlich vieler stetiger Funktionen auch wieder eine stetige Funktion, und als stetige Funktion auf einem Kompaktum (nämlich M) nimmt die Funktion s ihr Infimum wirklich an. Wenn wir also die Zahl α definieren als

$$\alpha \;=\; \inf_{x \in M} s(x) \; ,$$

so ist $\alpha > 0$ (denn α ist Funktionswert von s), und es ist $s(x) \geq \alpha$ für alle x . Nach Definition von $s(x)$ als Supremum heißt dies: für jedes $x \in M$ gibt es ein i , so daß $d_i(x) \geq \alpha$; mit anderen Worten: es gibt ein i , so daß die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius α ganz enthalten ist in der offenen Menge O_i . Mit $\varepsilon = \alpha$ ist die Behauptung des Satzes jetzt bewiesen. $\square$

Zurück nun zur Situation des 3. Falles. Sei $f : S^1 \to S^n$ eine vorgegebene Schlinge. Wir wählen zwei verschiedene Punkte z_1 und z_2 in S^n und setzen

$$A_1 \;=\; S^n - \{z_1\} \;, \quad A_2 \;=\; S^n - \{z_2\} \; .$$

Wir definieren nun

$$O_1 \;=\; f^{-1}(A_1) \;, \quad O_2 \;=\; f^{-1}(A_2) \; .$$

Diese beiden sind *offene* Teilmengen in S^1 (weil f stetige Abbildung ist), und das System $\{O_1, O_2\}$ ist *Überdeckung* von S^1 (weil $\{A_1, A_2\}$ eine Überdeckung von S^n ist). Um den Lebesgueschen Überdeckungssatz anwenden zu können, notieren wir, daß S^1 nicht nur kompakt ist, sondern natürlich auch ein metrischer Raum (die Unterraumtopologie von S^1 in $\mathbb{R}^2$ ist dieselbe wie die von der Distanzfunktion auf $\mathbb{R}^2$ per Einschränkung gegebene Topologie). Nach dem Lebesgueschen Satz existiert also ein $\varepsilon > 0$, so daß $\ldots$.

Wir wählen eine Unterteilung von S^1 in m gleichlange Bögen $B_1, \ldots, B_m$. Wenn m groß genug ist (z.B. wenn $m \geq \frac{2}{\varepsilon}$), dann ist jeder dieser Bögen enthalten in einer ε–Kugel in S^1 (= *Durchschnitt von* S^1 *mit einer* ε*–Kugel in* $\mathbb{R}^2$ *mit Mittelpunkt auf* S^1). Nach der Konstruktion von ε über den Lebesgueschen Satz folgt deshalb, daß jeder der Bögen B_j auch ganz in O_1 oder ganz in O_2 enthalten ist (oder in beiden). Wegen $O_1 = f^{-1}(A_1)$, $O_2 = f^{-1}(A_2)$ besagt dies, *daß für jeden der Bögen* $B_1, \ldots, B_m$ *die eingeschränkte Abbildung* $f|B_j$ *ihr Bild ganz in* A_1 $(= S^n - \{z_1\})$ *oder ganz in* A_2 $(= S^n - \{z_2\})$ *hat.*

Die Abbildung f wollen wir nun dadurch verbessern, daß wir die eingeschränkten Abbildungen $f|B_j$ einzeln deformieren. Dabei müssen wir darauf achten, daß die zu konstruierenden Deformationen an den Endpunkten der Bögen auch zusammenpassen.

Dies läßt sich am bequemsten dadurch erreichen, daß die Deformationen an den Endpunkten als *konstant* gewählt werden (m.a.W., die Endpunkte selbst werden gar nicht deformiert). Diese Dinge sollen zunächst jetzt genauer formuliert werden.

Bezeichne ein *Bogen* einen topologischen Raum, der topologisch äquivalent ist zu $[0,1]$ (z.B. die obigen Bögen B_j). Sei B ein Bogen. Ein *Weg* in einem topologischen Raum X ist eine stetige Abbildung

$$w: \ B \longrightarrow X \ .$$

Eine *Deformation, relativ zu den Endpunkten*, von dem Weg w_0 zu dem Weg w_1 ist eine stetige Abbildung

$$W: \ B \times [0,1] \ \longrightarrow \ X \ ,$$

die zum einen eine Deformation von w_0 zu w_1 ist, d.h., es ist

$$W \mid B{\times}0 \ = \ w_0 \ , \quad W \mid B{\times}1 \ = \ w_1 \ ,$$

und die zum andern die Eigenschaft hat, daß für den Anfangspunkt a von B und den Endpunkt e von B , und für alle $t \in [0,1]$, gilt

$$W(a,0) \ = \ W(a,1) \ = \ W(a,t) \ \ , \quad W(e,0) \ = \ W(e,1) \ = \ W(e,t) \ \ .$$

Mit anderen Worten, alle Wege in der parametrisierten Familie

$$t \ \longmapsto \ w_t \ = \ W|B{\times}t$$

haben denselben Anfangspunkt und denselben Endpunkt. (Damit eine solche Deformation existieren kann, müssen insbesondere natürlich auch die beiden Wege w_0 und w_1 denselben Anfangs- und Endpunkt haben.)

Definition. Zwei Wege sind *homotop relativ zu den Endpunkten*, wenn es eine solche Deformation gibt.

Satz. *Wenn zwei Wege in* $\mathbb{R}^n$ *denselben Anfangs- und Endpunkt haben, dann sind sie homotop relativ zu den Endpunkten.*

Beweis. Seien $w_0, w_1 : B \to \mathbb{R}^n$ solche Wege. Die verlangte Deformation ist gegeben durch

$$W(s,t) \ \ = \ \ (1{-}t)\, w_0(s) + t\, w_1(s) \ ,$$

(wobei $s \in B$, $t \in [0,1]$). Für den Anfangspunkt a gilt

$$\begin{aligned} W(a,t) \ &= \ (1{-}t)\, w_0(a) + t\, w_1(a) \\ &= \ (1{-}t)\, w_0(a) + t\, w_0(a) \ = \ w_0(a) \end{aligned}$$

und analog auch für den Endpunkt. □

Korollar. Y *sei topologisch äquivalent zu* $\mathbb{R}^n$. *Je zwei Wege in* Y *mit demselben Anfangs- und Endpunkt sind homotop relativ zu den Endpunkten.*

BEWEIS. Seien $v_0, v_1 : B \to Y$ solche Wege. Seien $\phi\colon Y \to \mathbb{R}^n$ und $\psi\colon \mathbb{R}^n \to Y$ zueinander inverse topologische Äquivalenzen. Eine Deformation von v_0 zu v_1 ist gegeben durch $V(s,t) \;=\; \psi\big(\,(1-t)\,\phi(v_0(s)) + t\,\phi(v_1(s))\,\big)$. □

Wir werden das Korollar in Kürze anwenden auf die Abbildungen von Bögen, die wir oben aus unserer vorgegebenen Schlinge durch Einschränkung bekommen haben. Dazu notieren wir noch (der folgende Satz), daß wir tatsächlich eine Deformation der vorgegebenen Schlinge f erhalten können, indem wir die Bögen $B_1, \dots, B_m$ einzeln hernehmen und die eingeschränkten Abbildungen $f|B_j$ deformieren.

SATZ. *Seien $f_0, f_1 : S^1 \to X$ zwei Schlingen. S^1 sei unterteilt in Bögen $B_1, \dots, B_m$. Es gelte für jedes j , daß die beiden Wege*

$$f_0|B_j\,,\ f_1|B_j\,:\ B_j \longrightarrow X$$

homotop sind relativ zu den Endpunkten. Dann ist f_0 homotop zu f_1 .

BEWEIS. Die Deformation, relativ zu den Endpunkten, des j–ten Wegepaares sei gegeben durch

$$W_j\,:\ B_j \times [0,1] \longrightarrow X\ .$$

Die Deformation von f_0 zu f_1 ist dann gegeben durch die Abbildung $S^1 \times [0,1] \to X$,

$$F(s,t) \quad = \quad \begin{cases} W_1(s,t)\ , & s \in B_1 \\ W_2(s,t)\ , & s \in B_2 \\ \quad\vdots & \end{cases} \qquad .$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn $s \in B_1 \cap B_2$ z.B. heißt ja, daß s der Endpunkt von B_1 und der Anfangspunkt von B_2 ist, deshalb ist in dem Fall

$$W_1(s,t) \;=\; W_1(s,0) \;=\; f_0(s) \;=\; W_2(s,0) \;=\; W_2(s,t)$$

(für alle $t \in [0,1]$). F ist auch eine *stetige* Abbildung. Denn es ist zusammengebaut aus stetigen Abbildungen (den W_i) auf Unterräumen (den $B_j \times [0,1]$), die sämtlich *abgeschlossene* Unterräume sind. (s. Übungszettel 7, Aufgabe 1). □

Zurück nun zu unserer vorgegebenen Schlinge $f : S^1 \to S^n$. Nach dem Lebesgueschen Überdeckungssatz konnten wir S^1 unterteilen in Bögen $B_1, \dots, B_m$, so daß jede der eingeschränkten Abbildungen $f|B_j$ mindestens einen Punkt der S^n freiläßt, also aufgefaßt werden kann als Abbildung zu $S^n - \{Punkt\}$; oder, um es ganz genau zu sagen, diese eingeschränkte Abbildung kann als Komposition geschrieben werden von einer Abbildung $B_j \to S^n - \{Punkt\}$ einerseits und der Inklusion $S^n - \{Punkt\} \to S^n$ andererseits.

Nun ist $S^n - \{Punkt\}$ topologisch äquivalent zu $\mathbb{R}^n$, daher wissen wir, wie oben diskutiert, daß $f|B_j$ homotop ist, relativ zu den Endpunkten, zu einem *beliebig* vorgegebenen Weg in $S^n - \{Punkt\}$, sofern dieser andere Weg nur wieder denselben Anfangspunkt und denselben Endpunkt hat wie der Weg $f|B_j$; z.B. können wir eine Abbildung von B_j auf den Bogen eines Großkreises zwischen eben diesen Punkten nehmen (ein *Großkreis* in der S^n ist, nach Definition, der Durchschnitt von S^n mit einem zwei–dimensionalen Untervektorraum in $\mathbb{R}^{n+1}$). Die Homotopien für all diese eingeschränkten Abbildungen setzen sich schließlich zusammen, wie auch schon oben diskutiert, zu einer Homotopie der gesamten Abbildung f ; also zu einer Deformation der vorgegebenen Schlinge. Wir fassen zusammen:

Sei $f : S^1 \to S^n$ eine Schlinge. Es gibt eine zu f homotope Schlinge f' mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine Unterteilung von S^1 in Bögen $B_1, \ldots, B_m$ und jede der Abbildungen $f'|B_j$ hat als Bild einen Kreisbogen (Stück eines Großkreises) *in S^n .*

Abschluss des Beweises (*dafür, daß $\mathcal{S}(S^n)$ für $n \geq 2$ nur 1 Element hat*):

Wie gerade notiert, gibt es zu einer vorgegebenen Schlinge $f : S^1 \to S^n$ eine homotope Schlinge f' , so daß das Bild $f'(S^1)$ eine Vereinigung von endlich vielen Kreisbögen ist. Wenn $n \geq 2$ (diese Voraussetzung wird hier wirklich benötigt!) dann kann eine Vereinigung von endlich vielen Kreisbögen nicht die ganze S^n sein. Wir wissen aber bereits (der 2. Fall und der 1. Fall), daß eine Abbildung $f' : S^1 \to S^n$, die *nicht* surjektiv ist, in eine triviale Schlinge deformiert werden kann, und daß je zwei triviale Schlingen in S^n homotop sind. □

Nachdem wir uns davon überzeugt haben, daß die Menge $\mathcal{S}(S^n)$ für $n \geq 2$ nur ein einziges Element hat, wollen wir uns nun der Bestimmung von $\mathcal{S}(S^1)$ zuwenden. Der Satz, den wir beweisen wollen, sagt, daß $\mathcal{S}(S^1)$ *abzählbar unendlich viele* Elemente hat. Beim Beweis dieses Satzes werden wir auch eine ganz bestimmte Aufzählung der Elemente von $\mathcal{S}(S^1)$ kennenlernen. Wir werden nämlich jeder Schlinge eine ganze Zahl zuordnen (ihre sogenannte *Windungszahl*). Wir werden zeigen, daß die Windungszahl bereits die Homotopieklasse der Schlinge charakterisiert (d.h. wenn zwei Schlingen die gleiche Windungszahl haben, dann sind sie homotop), und schließlich werden wir auch zeigen, daß die Windungszahl umgekehrt nur von der Homotopieklasse der Schlinge abhängt (oder anders gesagt: wenn zwei Schlingen verschiedene Windungszahlen haben, dann sind sie auch nicht homotop). Insgesamt werden wir also eine 1–1 Beziehung herstellen zwischen den Elementen von $\mathcal{S}(S^1)$ und den ganzen Zahlen, eben über die Windungszahl.

Nach Definition nun sind Schlingen in S^1 nichts anderes als stetige Abbildungen von S^1 zu sich selbst. Wir geben zunächst eine Auflistung besonders schöner solcher Abbildungen. Dazu identifizieren wir S^1 mit den komplexen Zahlen vom Betrag 1 ,

$$S^1 \ = \ \{ \, z \in \mathbb{C} \ | \ |z| = 1 \, \} \ .$$

Für jede ganze Zahl k haben wir die Abbildung $S^1 \ \to \ S^1$,

$$z \longmapsto z^k \ ,$$

die wir uns vorstellen wollen als die *k–te Standard–Abbildung*. Wie wir später sehen werden, handelt es sich hierbei tatsächlich auch um eine Abbildung mit der Windungszahl k .

Wir wollen diese Standard–Abbildungen noch anders beschreiben. Für die andere Beschreibung benötigen wir die Exponentialfunktion einerseits und eine Identifizierung von S^1 mit einem Quotientenraum vom Intervall $[0,1]$ bzw. von der ganzen Geraden $\mathbb{R}$ andererseits.

Satz. *Es bezeichne* $\exp(x) = e^{2\pi i x}$. *Die Abbildungen*

$$[0,1] \xrightarrow{\text{Inklusion}} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} S^1$$

induzieren topologische Äquivalenzen

$$[0,1]\,/\,0{\sim}1 \quad\longrightarrow\quad \mathbb{R}\,/\,x \sim x{+}1 \quad\longrightarrow\quad S^1 \ .$$

Beweis. Da $[0,1]\,/\,0{\sim}1$ quasi–kompakt ist und S^1 Hausdorff–Raum, folgt, daß die bijektive stetige Abbildung $[0,1]\,/\,0{\sim}1 \to S^1$ eine topologische Äquivalenz ist (vgl. S. 32). Da $\mathbb{R}\,/\,x{\sim}\,x{+}1 \to S^1$ ebenfalls bijektive stetige Abbildung ist, folgt aus der Hausdorff–Eigenschaft von S^1 nun auch die Hausdorff–Eigenschaft von $\mathbb{R}\,/\,x{\sim}\,x{+}1$. Aus der (Quasi–) Kompaktheit von $[0,1]\,/\,0{\sim}1$ schließlich folgt dann wieder, daß die bijektive stetige Abbildung $[0,1]\,/\,0{\sim}1 \to \mathbb{R}\,/\,x{\sim}\,x{+}1$ auch eine topologische Äquivalenz ist. Es ist klar (oder?), daß aus diesen Dingen insgesamt folgt, daß die letzte der Abbildungen

$$\mathbb{R}\,/\,x \sim x{+}1 \quad\longrightarrow\quad S^1$$

ebenfalls eine topologische Äquivalenz ist. $\square$

Es sei nun k eine ganze Zahl. Die Abbildung “*Multiplikation mit* k ”

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad s \longmapsto k \cdot s$$

induziert eine Abbildung

$$[0,1]\,/\,0{\sim}1 \;\longrightarrow\; \mathbb{R}\,/\,x{\sim}\,x{+}1$$

denn es ist $[\,k\cdot 0\,] = [\,k \cdot 1\,]$ in $\mathbb{R}\,/\,x{\sim}\,x{+}1$, weil ja k eine *ganze* Zahl ist.

Behauptung. *Unter den oben definierten topologischen Äquivalenzen*

$$[0,1]\,/\,0{\sim}1 \;\longrightarrow\; S^1 \quad \mathit{und} \quad \mathbb{R}\,/\,x \sim x{+}1 \;\longrightarrow\; S^1$$

geht diese Abbildung über in die k *–te Standard Abbildung.* — Klar, weil das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{s \,\longmapsto\, k\cdot s} & \mathbb{R} \\ \big\downarrow \exp & & \big\downarrow \exp \\ S^1 & \xrightarrow{z \,\longmapsto\, z^k} & S^1 \end{array}$$

kommutiert: es ist

$$(\exp(s))^k = \left(e^{2\pi is}\right)^k = e^{2\pi isk} = \exp(k \cdot s) .$$

Wir wollen uns jetzt überlegen, daß das soeben benutzte Diagramm nicht nur dazu taugt, neues über Standard–Abbildungen zu lernen, sondern daß es uns auch gestattet, Abbildungen allgemein zu studieren. Dazu benötigen wir eine später zu rechtfertigende Hypothese der Art, daß zu einer Abbildung $f: S^1 \to S^1$ ein solches Diagramm überhaupt existiert.

HYPOTHESE. *Es gibt eine Abbildung* $g:\ [0,1] \to \mathbb{R}$ *, so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} [0,1] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\ S^1 \arrow[r, "f"] & S^1 \end{tikzcd}$$

kommutiert.

SATZ. *Sei* $f: S^1 \to S^1$ *eine Abbildung, die diese Hypothese erfüllt. Dann gilt*
(i) $k = g(1) - g(0)$ *ist eine ganze Zahl*
(ii) f *ist homotop zur* k*–ten Standard–Abbildung.*

BEWEIS. (i) Die Kommutativität des Diagramms besagt, daß $\exp(g(s)) = f(\exp(s))$ für alle $s \in [0,1]$. Weil $\exp(1) = 1 = \exp(0)$, folgt $\exp(g(1)) = \exp(g(0))$, d.h.

$$1 = \exp(g(1)) \cdot \exp(g(0))^{-1} = e^{2\pi i(g(1)-g(0))} .$$

Daher ist $g(1) - g(0)$ eine ganze Zahl.

(ii) Wir wissen, daß zwei Wege in $\mathbb{R}$ mit gleichen Anfangs– und Endpunkten zueinander homotop sind relativ zu den Endpunkten. Insbesondere ist deshalb die Abbildung g homotop, relativ zu den Endpunkten, zu der Abbildung $g_1:\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g_1(s) = g(0) + k \cdot s .$$

Die Homotopie von g zu g_1 ist eine Abbildung $G:\ [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $G(0,t) = G(0,0)$ und $G(1,t) = G(1,0)$ für alle t . Sei

$$H:\ [0,1] \times [0,1] \longrightarrow S^1$$

definiert als die zusammengesetzte Abbildung $H = \exp \circ G$. Dann ist

$$H(1,t) = H(1,0) = f(\exp(1)) = f(\exp(0)) = H(0,0) = H(0,t)$$

für alle t , also faktorisiert H über eine Abbildung H' des Quotientenraumes

$$([0,1] \times [0,1]) / (0,t) \sim (1,t) \quad \approx \quad ([0,1] / 0{\sim}1) \times [0,1] \quad \approx \quad S^1 \times [0,1] \ .$$

Die so konstruierte Abbildung

$$H' : \ S^1 \times [0,1] \ \longrightarrow \ S^1$$

ist eine Homotopie von Abbildungen $S^1 \to S^1$; und zwar ist dies eine Homotopie von der Abbildung f zu der Abbildung f_1 , wobei (wegen $\exp(g(0)) = f(\exp(0)) = f(1)$)

$$f_1(s) \underset{\text{(def)}}{=} \exp(g_1(s)) \ = \ \exp(g(0)) \cdot \exp(k \cdot s) \ = \ f(1) \cdot \exp(k \cdot s) \ .$$

Wenn $f(1) = 1 \in S^1$, dann ist f_1 schon die k –te Standard–Abbildung. Im allgemeinen Fall kann man es durch eine weitere Homotopie (eine starre Drehung der S^1) in die Standard–Abbildung überführen. □

Um die oben formulierte Hypothese zu diskutieren, werden wir eine bemerkenswerte Eigenschaft der Exponentialfunktion benutzen. Nämlich, die Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ ist zwar keine topologische Äquivalenz, sie besitzt aber lokale (!) Umkehrfunktionen in folgendem Sinne:

Satz. *Zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ existieren Umgebungen V von x und W von $\exp(x)$, so daß die Einschränkung von $\exp$ eine topologische Äquivalenz von V zu W ist.*

Beweis. Sei V ein offenes Intervall der Länge < 1 , das den Punkt x enthält. Dann hat V die behaupteten Eigenschaften. Denn sei V' der Abschluß von V . Da die Intervall–Länge als < 1 vorausgesetzt war, ist die auf V' eingeschränkte Abbildung *injektiv*. Sie definiert daher eine bijektive stetige Abbildung von V' auf den Bildraum. Nun ist V' kompakt, und der Bildraum ist Hausdorff–Raum (als Unterraum von S^1). Also ist die eingeschränkte Abbildung eine topologische Äquivalenz. □

Zusatz. *Zu jedem Punkt y in S^1 gibt es eine Umgebung U , so daß für jeden Punkt aus $\exp^{-1}(y)$ die lokale Umkehrfunktion des Satzes auf ganz U definiert ist.*

Beweis. Im Beweis des vorstehenden Satzes nimmt man für V ein offenes Intervall der Länge $\frac{1}{2}$, mit x als Mittelpunkt. Das Bild W ist in dem Fall ein offener Halbkreis mit y als mittlerem Punkt. Das so erhaltene W hängt nur von y ab, es ist dasselbe für alle $x \in \exp^{-1}(y)$. □

Bemerkung. Es ist plausibel, daß es sich bei diesen *lokalen Umkehrfunktionen* um vertraute Funktionen handeln sollte. Das ist auch der Fall: es handelt sich dabei (bis auf den Faktor $\frac{1}{2\pi i}$) um die *Logarithmus*–Funktion. Sei a eine komplexe Zahl $\neq 0$. Es ist

$$\begin{aligned} \log x \ &= \ \log (a - (a{-}x)) \ = \ \log a + \log (1 - (1{-}\tfrac{x}{a})) \\ &= \ \log a \ - \ \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \left(1{-}\tfrac{x}{a} \right)^n \ . \end{aligned}$$

Dies ist eine Potenzreihe, die für diejenigen x konvergiert, welche im Innern des Kreises mit Radius $|a|$ um den Punkt a liegen. Die additive Konstante $\log a$ ist wohldefiniert nur *bis auf ganzzahlige Vielfache von* $2\pi i$. Was die Werte der additiven Konstante $\log a$ angeht, so ist $\log 1 = 0$ (bis auf ...), und wenn z.B. $|1{-}a| < 1$, dann kann $\log a$ ausgerechnet werden mit Hilfe der obigen Potenzreihe als $\log(1 - (1{-}a))$. Wie schon betont wurde, so ist die additive Konstante $\log a$ nur *wohldefiniert bis auf ganzzahlige Vielfache von* $2\pi i$. Das heißt konkret einfach dieses: wenn man etwa versucht, unter den möglichen Werten für die additive Konstante ein für alle mal eine Auswahl zu treffen, so kommt man in Schwierigkeiten, sobald man z.B. den Punkt a entlang dem Einheitskreis variieren läßt — die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ hat nun einmal keine globale Umkehrfunktion. $\square$

Wir prüfen jetzt nach, daß die oben als *Hypothese* formulierte Eigenschaft tatsächlich immer erfüllt ist.

SATZ. *Sei* $f\colon S^1 \to S^1$ *eine Abbildung. Es existiert eine Abbildung* $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "\exp"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\exp"] \\
S^1 \arrow[r, "f"] & S^1
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

BEWEIS. Zu jedem Punkt in S^1 gibt es eine offene Umgebung U , auf der die lokalen Umkehrfunktionen von $\exp$ definiert sind (der vorige Satz und Zusatz). Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von S^1 durch solche offenen Mengen. Mit Hilfe der zusammengesetzten Abbildung

$$f \circ \exp : \ [0,1] \ \longrightarrow \ S^1$$

können wir diese Überdeckung zurückziehen zu einer Überdeckung von $[0,1]$, nämlich $\big\{ (f\circ\exp)^{-1}(U_i) \big\}_{i\in I}$. Auf diese Überdeckung wenden wir nun den Lebesgue'schen Überdeckungssatz an. Wir schließen, daß es eine Unterteilung von $[0,1]$ in Bögen $B_1, \dots, B_m$ gibt, so daß für jedes j das Bild $f(\exp(B_j))$ ganz enthalten ist in einem von den U_i ; wir bezeichnen es mit $U_{i\,(j)}$.

Die Abbildung g wird jetzt induktiv für die Bögen $B_1, \dots, B_m$ definiert.

• *Definition von* g *auf* B_1 . Die zusammengesetzte Abbildung $B_1 \xrightarrow{\exp} S^1 \xrightarrow{f} S^1$ hat ihr Bild in dem Bereich $U_{i\,(1)}$. In diesem Bereich existieren lokale Umkehrfunktionen für $\exp$. Wir wählen *irgendeine* von diesen lokalen Umkehrfunktionen; etwa die Funktion $u_1 : U_{i\,(1)} \to \mathbb{R}$. Die gesuchte Funktion $g \mid B_1$ wird nun definiert als die Zusammensetzung von $f \circ \exp$ mit der Funktion u_1 . Es ist klar, daß dann

$$\exp\circ g \mid B_1 \ \big(= \ \exp\circ u_1 \circ f \circ \exp \mid B_1 \big) \ = \ f \circ \exp \mid B_1 \ .$$

• *Definition von* g *auf* B_2 . Die zusammengesetzte Abbildung $B_2 \xrightarrow{\exp} S^1 \xrightarrow{f} S^1$ hat ihr Bild in dem Bereich $U_{i\,(2)}$. Auch hier existieren lokale Umkehrfunktionen für $\exp$. Wir wählen nun *eine ganz bestimmte* unter diesen lokalen Umkehrfunktionen aus; es wird in Kürze präzisiert werden, welche. Die gesuchte Funktion $g \mid B_2$ wird wieder definiert als die Zusammensetzung von $f \circ \exp$ mit der lokalen Umkehrfunktion u_2 , und es ist wieder klar, daß

$$\exp \circ\, g \mid B_2 \;=\; f \circ \exp \mid B_2 \ .$$

Es ist aber zunächst gar nicht klar, daß diese Definition von $g \mid B_2$ überhaupt verträglich ist mit der vorher erfolgten Definition von $g \mid B_1$. Denn die Bögen B_1 und B_2 haben ja einen gemeinsamen Punkt: der Endpunkt von B_1 ist gleich dem Anfangspunkt von B_2 . Wir müssen also darauf achten, daß wir an dieser Stelle nicht aus Versehen die Funktion auf zwei verschiedene Weisen definieren. Dazu müssen wir aber nur darauf achten, daß die lokale Umkehrfunktion $u_2 \colon U_{i\,(2)} \to \mathbb{R}$ in der folgenden Weise gewählt wird: Sei x der gemeinsame Punkt von B_1 und B_2 , sei $y = f(\exp(x))$ sein Bildpunkt. Dann ist y enthalten sowohl in $U_{i\,(1)}$ als auch in $U_{i\,(2)}$, und wir werden jetzt darauf bestehen, daß u_2 diejenige lokale Umkehrfunktion ist, die die Bedingung

$$u_2(y) \;=\; u_1(y)$$

erfüllt.

• *Definition von* g *auf* $B_3, \ldots, B_m$. Diese Definitionen gehen analog zu der Definition von g auf B_2 . $\square$

Mit Hilfe dieses Satzes (früher als "Hypothese" formuliert) hatten wir uns eine gewisse ganze Zahl k (nämlich $k = g(1) - g(0)$) verschafft, und wir hatten uns überlegt, daß diese Zahl k die Homotopieklasse von f bereits charakterisiert.

Wir wollen uns nun überlegen, daß umgekehrt die Homotopieklasse von f auch die Zahl k schon eindeutig festlegt. Dazu benötigen wir den folgenden Sachverhalt.

Satz. *Sei* $F \colon S^1 \times [0,1] \to S^1$ *eine Abbildung* (mit anderen Worten, eine Homotopie von Schlingen in S^1). *Es existiert eine Abbildung* $G \colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, *so daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \times [0,1] & \overset{G}{\dashrightarrow} & \mathbb{R} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \exp \times \mathrm{id}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \exp} \\ S^1 \times [0,1] & \xrightarrow{\quad F \quad} & S^1 \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis: Das Argument ist ganz analog zu dem im Beweis des vorigen Satzes. Wir fixieren wieder eine Überdeckung von S^1 durch offene Mengen, auf denen lokale Umkehrfunktionen für $\exp$ existieren, $\{U_i\}_{i \in I}$. Mit Hilfe der Abbildung $F \circ (\exp \times \mathrm{id})$ ziehen wir diese Überdeckung zu einer Überdeckung $\{\, (F \circ (\exp \times \mathrm{id}))^{-1}(U_i) \,\}_{i \in I}$ von

$[0,1]\times[0,1]$ zurück. Auf letztere Überdeckung wenden wir den Lebesgueschen Überdeckungssatz an. Das liefert ein ε , so daß … . Wir schließen, daß folgendes gilt: Sei $[0,1]\times[0,1]$ unterteilt in $m \cdot m$ Quadrate der Kantenlänge $\frac{1}{m}$. Wenn m hinreichend groß ist, dann ist jedes dieser Quadrate ganz enthalten in einer ε–Kugel; folglich ist sein Bild unter der Abbildung $F \circ (\exp \times \mathrm{id})$ schon ganz enthalten in einer der offenen Mengen U_i .

Es bleibt nun nur noch, für jedes einzelne der Quadrate die darauf eingeschränkte Abbildung zu liften. Dabei ist, ebenso wie im vorigen Beweis, darauf zu achten, welche der lokalen Umkehrfunktionen jeweils verwendet wird.

Für die Zwecke der Buchführung führen wir Namen ein: Die Teilquadrate seien bezeichnet mit $Q_{p,q}$, wobei die Indizes p und q jeweils von 1 bis m variieren, und wobei wir uns vorstellen wollen, daß der Index p die *horizontale Indizierung* bezeichnet (wachsend von links nach rechts) und der Index q die *vertikale Indizierung* (wachsend von oben nach unten).

Für das Quadrat $Q_{p,q}$ seien folgende Auswahlen getroffen:

• von den offenen Mengen U_i , die das Bild von $Q_{p,q}$ unter der zusammengesetzten Abbildung

$$F \circ (\exp \times \mathrm{id})$$

enthalten, wird eine ausgewählt und hinfort mit $U_{i(p,q)}$ bezeichnet. (Die Konstruktion der kleinen Quadrate über den Lebesgueschen Satz ist gerade so, daß es *mindestens eine* solche offene Menge gibt. Wenn es mehrere geben sollte, stellt es sich als irrelevant heraus, welche Auswahl an dieser Stelle getroffen wird; dieser Punkt braucht im folgenden nicht einmal diskutiert zu werden.)

• von den lokalen Umkehrfunktionen für $\exp$ wird eine ausgewählt (diese Auswahl wird noch zu diskutieren sein),

$$u_{i(p,q)} : \ U_{i(p,q)} \longrightarrow \mathbb{R} \ .$$

Mit Hilfe der so ausgewählten lokalen Umkehrfunktionen wird dann die Einschränkung der gesuchten Abbildung G ,

$$G_{p,q} \quad (= \ G \mid Q_{p,q} \ ) \ ,$$

definiert als die zusammengesetzte Abbildung

$$G_{p,q} \quad = \quad u_{i(p,q)} \circ F \circ (\exp \times \mathrm{id}) \ \mid \ Q_{p,q} \ .$$

Mit dieser Definition wird das in der Formulierung des Satzes genannte Diagramm kommutativ sein zumindest insofern als nun gilt

$$\exp \circ G_{p,q} \quad = \quad \exp \circ u_{i(p,q)} \circ F \circ (\exp \times \mathrm{id}) \ \mid \ Q_{p,q} \quad = \quad F \circ (\exp \times \mathrm{id}) \ \mid \ Q_{p,q} \ .$$

Es bleibt zu diskutieren, wie die konstruierten Abbildungen $G_{p,q}$ zusammengefaßt werden können zu der gewünschten Abbildung G auf dem ganzen Quadrat $[0,1]\times[0,1]$.

Dazu werden wir das Quadrat nun aus seinen Stücken $Q_{p,q}$ aufbauen, indem wir diese Stücke einzeln hernehmen und zu den vorher behandelten dann dazutun. Wir betrachten die Stücke in einer bestimmten Reihenfolge.

- Wir beginnen mit dem Teilquadrat $Q_{1,1}$. Dabei brauchen wir noch nicht auf irgendetwas zu achten: jede Auswahl ist so gut wie jede andere.

- $Q_{1,2}$ wird dazugenommen. Da $Q_{1,2}$ nicht–leeren Durchschnitt mit $Q_{1,1}$ hat, müssen wir darauf achten, daß die Abbildungen $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ auf dem Durchschnitt übereinstimmen. Nun ist

$$Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$$

ein Intervall, und sein Bild unter der Abbildung $F \circ (\exp \times \mathrm{id})$ ist enthalten in

$$U_{1,1} \cap U_{1,2} \ .$$

Durch geeignete Auswahl können wir zumindest erreichen, daß die Abbildungen $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ *an einem einzigen Punkt* des Durchschnitts übereinstimmen (z.B. an dem linken Endpunkt des Intervalls). Denn hierfür wird es genügen, die lokale Umkehrfunktion $u_{1,2}$ so zu wählen, daß die beiden lokalen Umkehrfunktionen $u_{1,1}$ und $u_{1,2}$ an eben dem Bildpunkt dieses Punktes unter der Abbildung $F \circ (\exp \times \mathrm{id})$ denselben Wert haben.

Wir kommen nun zum wesentlichen Punkt des Arguments: *Wenn die Abbildungen $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ auch nur an einem einzigen Punkt des Intervalls $Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$ denselben Wert haben, dann stimmen sie schon auf dem ganzen Intervall überein.* Der Grund ist der: Auf dem Intervall $Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$ können wir die Differenz der beiden reellwertigen Funktionen $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ betrachten. Diese Differenzfunktion nimmt nur ganzzahlige Werte an (denn die Kompositionen von $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ mit $\exp$ geben ja dieselbe Abbildung $F \circ (\exp \times \mathrm{id})$). Andererseits ist die Funktion auch stetig (als Differenz zweier stetiger Funktionen). Wir haben also eine stetige Funktion auf einem Intervall, die nur ganzzahlige Werte annimmt. Eine solche Funktion ist notwendigerweise konstant.

Nachdem die Abbildungen $G_{1,1}$ und $G_{1,2}$ auf dem Durchschnitt $Q_{1,1} \cap Q_{1,2}$ übereinstimmen, ergeben sie eine wohldefinierte Abbildung auf der Vereinigung $Q_{1,1} \cup Q_{1,2}$. Diese Abbildung ist wieder stetig (da sie ja entsteht durch Zusammenbauen von stetigen Abbildungen auf *abgeschlossenen* Unterräumen).

- Das Hinzunehmen der anderen Teilquadrate geht analog. Das ist klar im Fall von $Q_{1,3}, \ldots, Q_{1,m}$. Es ist auch klar im Fall von $Q_{2,1}$ (denn $Q_{2,1}$ trifft die vorher genannten Teilquadrate nur in seinem Durchschnitt mit $G_{1,1}$). Im Falle von $Q_{2,2}$ gibt es ein geringfügig neues Phänomen, denn $Q_{2,2}$ trifft sowohl $Q_{1,2}$ als auch $Q_{2,1}$ jeweils in einem Intervall. Es genügt aber zu bemerken, daß diese beiden Intervalle einen Punkt gemeinsam haben (den linken oberen Eckpunkt von $Q_{2,2}$): sobald die Abbildung $G_{2,2}$ an diesem Punkt den richtigen Wert annimmt, wird das nach dem genannten Argument auch der Fall sein für alle anderen Punkte des Durchschnitts von $Q_{2,2}$ mit der Vereinigung der vorher behandelten Teilquadrate. Die restlichen Teilquadrate schließlich gehen analog zu diesem. □

KOROLLAR. *Die "Windungszahl" k einer Schlinge $f\colon S^1 \to S^1$ hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.*

BEWEIS. Die Windungszahl k war definiert über eine Liftung

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \big\downarrow \exp & & \big\downarrow \exp \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

als die Differenz der Funktionswerte, $k = g(1) - g(0)$. Es sei nun $F\colon S^1 \times [0,1] \to S^1$ eine Homotopie von f zu f' . Nach dem eben bewiesenen Satz existiert eine Liftung

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \times [0,1] & \xrightarrow{G} & \mathbb{R} \\ \big\downarrow \exp \times \mathrm{id} & & \big\downarrow \exp \\ S^1 \times [0,1] & \xrightarrow{F} & S^1 \end{array}$$

Für jedes $t \in [0,1]$ sei die Zahl k_t jetzt definiert als $k_t = G(1,t) - G(0,t)$. Dann ist

$$t \longmapsto k_t$$

eine stetige Funktion auf $[0,1]$. Andererseits nimmt diese Funktion nur ganzzahlige Werte an, weil

$$\exp(G(1,t)) = F(1,t) = \exp(G(0,t)) .$$

Es folgt, daß die Funktion *konstant* sein muß. Das heißt, k_t hängt in Wirklichkeit gar nicht vom Parameter t ab. Insbesondere ist deshalb

$$k_0 = k_1 ,$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

BEMERKUNG. Die vorstehenden Sätze werden wir später erkennen als Spezialfälle eines allgemeinen *Liftungssatzes* im Rahmen der Theorie der *Überlagerungen*.

Fundamentalgruppe

Die "Invariante" $X \longmapsto \mathcal{S}(X)$ taugt dazu, S^1 von S^2 zu unterscheiden (denn, wie wir gesehen haben, sind $\mathcal{S}(S^1)$ und $\mathcal{S}(S^2)$ nicht–isomorphe Mengen; oder, was dasselbe bedeutet, sie haben nicht gleich viele Elemente).

Die Invariante taugt aber nicht ohne weiteres dazu, S^1 von $S^1 \times S^1$ zu unterscheiden. Denn wegen

$$\mathcal{S}(S^1 \times S^1) \quad \approx \quad \mathcal{S}(S^1) \times \mathcal{S}(S^1)$$

hat zwar $\mathcal{S}(S^1 \times S^1)$ auf den ersten Blick mehr Elemente als $\mathcal{S}(S^1)$; das ist aber eine Illusion: das Produkt von zwei abzählbar unendlichen Mengen ist wieder eine abzählbar unendliche Menge — die Mengen $\mathcal{S}(S^1 \times S^1)$ und $\mathcal{S}(S^1)$ sind isomorph.

Nun ist $\mathcal{S}(S^1)$ möglicherweise nicht eine vollkommen unstrukturierte Menge: unsere Ausrechnung ging ja über eine ganz bestimmte Beziehung (die "Windungszahl") zu einer höchst strukturierten Menge, nämlich zu der Menge der ganzen Zahlen. Ist das ein Indiz dafür, daß man die Konstruktion $X \longmapsto \mathcal{S}(X)$ ein wenig modifizieren kann, so daß das Resultat der Modifikation eine eingebaute algebraische Struktur hat? Vielleicht eine Gruppenstruktur?

Im genannten Beispiel würde eine solche Modifikation einen Unterschied machen. Denn für eine *Gruppe* mit abzählbar vielen Elementen (im Gegensatz zu einer *Menge* mit abzählbar vielen Elementen) werden wir im allgemeinen *nicht* die Existenz eines Isomorphismus

$$G \overset{?}{\approx} G \times G$$

erwarten können; z.B. gibt es einen solchen Isomorphismus nicht, wenn G die Gruppe der ganzen Zahlen ist (mit der Addition als Gruppenoperation).

Die angestrebte Modifikation nun existiert. Dies beruht auf der Tatsache, daß man das "Hintereinander–Durchlaufen" von Wegen ausnutzen kann, um ein Kompositionsgesetz für Wege zu definieren.

Natürlich kann man zwei Wege nur dann hintereinander durchlaufen, wenn der Anfangspunkt des zweiten Weges übereinstimmt mit dem Endpunkt des ersten Weges. Und damit Wege *immer* zusammensetzbar sind, braucht man, daß sie *alle* denselben Anfangs– und Endpunkt haben.

Aus dieser Not macht man sogleich eine Tugend. In dem betrachteten Raum zeichnet man nämlich einen Punkt aus als den sogenannten *Basispunkt*, und man betrachtet hinfort nur solche Wege, die in dem Basispunkt sowohl anfangen als auch aufhören. Einen solchen Weg werden wir auch als eine *Schleife* bezeichnen.

Definition. Sei X topologischer Raum und x ein Punkt in X (der Basispunkt). Eine *Schleife in* X *zum Basispunkt* x (oder kurz, eine *Schleife in* (X, x)) ist eine Abbildung von Paaren

$$v : \; ([0,1] \, , \, \{0,1\}) \; \longrightarrow \; (X, \, x)$$

d.h., eine stetige Abbildung $v\colon [0,1] \to X$ mit der Eigenschaft $v(0) = x = v(1)$. *Homotopie von Schleifen* bezeichnet die Homotopie von Wegen relativ zu Anfangs– und Endpunkt.

$$\pi_1(X,x)$$

ist definiert als die *Menge der Homotopieklassen von Schleifen in* (X,x) .

Bemerkung. Es gibt eine 1–1 Beziehung von $\pi_1(X,x)$ zu der *Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von Paaren*

$$w\colon (S^1,1) \longrightarrow (X,x) .$$

Das geht im einzelnen so. Wir fassen S^1 auf als Quotientenraum von $[0,1]$ vermöge der Abbildung $\exp : [0,1] \to S^1$. Wir fixieren den Punkt $1 \in S^1$ als Basispunkt. Die Bedingung $v(0) = v(1) = x$ für eine Schleife v sagt dann gerade, daß die Abbildung

$$v\colon ([0,1], \{0,1\}) \longrightarrow (X, x)$$

aufgefaßt werden kann als die Komposition der Abbildung (von Paaren)

$$\exp : \ ([0,1], \{0,1\}) \longrightarrow (S^1, 1)$$

mit einer Abbildung auf dem Quotientenraum (wieder eine Abbildung von Paaren)

$$w\colon (S^1,1) \longrightarrow (X,x) .$$

Dies ist eine 1–1 Beziehung, denn die Abbildung v (re–)konstruiert sich als die zusammengesetzte Abbildung $w \circ \exp$. Schließlich ist diese 1–1 Beziehung auch verträglich mit dem Übergang zu Homotopieklassen von Abbildungen: Einer Homotopie von Abbildungen $w\colon (S^1,1) \to (X,x)$, die auf dem Basispunkt konstant ist, entspricht eine Homotopie von Wegen $v\colon ([0,1],\{0,1\}) \to (X,x)$, die auf den Endpunkten konstant ist; und umgekehrt. $\square$

Definition und Satz. *Die Menge* $\pi_1(X,x)$ *hat eine* (natürliche) *Gruppenstruktur*. $\pi_1(X,x)$ zusammen mit dieser Gruppenstruktur heißt die *Fundamentalgruppe* (oder *Wegegruppe*) des topologischen Raumes X *am Basispunkt* x .

Dazu. Seien v und v' zwei Schleifen (Wege mit Anfangspunkt und Endpunkt jeweils am Basispunkt). Man definiert den *zusammengesetzten Weg* $v\,v'$ so, wie es der Name suggeriert: erst wird v durchlaufen, dann v' . Wenn man dies mit Hilfe einer Formel ausdrückt, so ist das Resultat ein wenig technischer als man es aufgrund der einfachen Idee erwarten sollte. Der Grund liegt darin, daß man sich ja schon darauf festgelegt hat, daß eine *Schleife* eine Abbildung ist, die als ihren Definitionsbereich das *Einheits*–Intervall hat; daß man also sozusagen für das Durchlaufen der Schleife genau eine Zeiteinheit zur Verfügung hat. Beim Hinschreiben des zusammengesetzten Weges muß man sich deshalb insbesondere nun darauf festlegen, wieviel von der zur Verfügung stehenden Zeiteinheit auf die jeweiligen Teilwege entfallen soll. Wenn man, bei zwei

Wegen, sich entschließt, daß jeder der Teilwege die Hälfte der zur Verfügung stehenden Zeit bekommen soll, und daß er im übrigen auch “mit gleichförmiger Geschwindigkeit” durchlaufen werden soll, so bekommt man für den zusammengesetzten Weg die Formel,

$$v\,v'\,(s) \;=\; \begin{cases} v\,(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ v'(2s{-}1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \;. \end{cases}$$

Die erforderte Festlegung hat auch noch andere unerwünschte Konsequenzen. So ist die Komposition von Schleifen *nicht* assoziativ (denn wenn man zwei Wege zusammensetzt und das Resultat wieder mit einem dritten, so bekommen die ersten beiden Wege von der Gesamtzeit jeweils ein Viertel ab und der dritte Weg die Hälfte; bei anderer Klammerung wäre die Aufteilung anders).

Es bezeichne nun $[v]$ das von v repräsentierte Element in $\pi_1(X,x)$. Das *Produkt* in $\pi_1(X,x)$ ist definiert als

$$[v]\;[v'] \;=\; [v\,v'] \;.$$

Oder, um es deutlicher zu machen: wenn a und b Elemente von $\pi_1(X,x)$ sind, so ist ihr Produkt $a\,b$ in $\pi_1(X,x)$ wie folgt gegeben. Seien v und v' Repräsentanten für a und b , d.h., Schleifen mit $[v] = a$ und $[v'] = b$, dann ist das Produkt $a\,b$ repräsentiert durch die *zusammengesetzte Schleife*, $a\,b = [v\,v']$. Selbstverständlich ist hier nachzuweisen, daß das Produkt in Wirklichkeit nicht abhängt von der Auswahl der benutzten Repräsentanten. Das ist eine Übungsaufgabe (s. Übungszettel 9, Aufgabe 5).

Das Produkt hat die folgenden Eigenschaften (der Beweis besteht jeweils in der Angabe geeigneter Homotopien; s. Übungszettel 9, Aufgabe 5):

- Komposition von Schleifen ist assoziativ *nach Übergang zur Homotopieklasse*.
- Der triviale Weg $\mathrm{tr}\colon [0,1] \to X$, $\mathrm{tr}(s) = x$ für alle s , ist neutrales Element für das Produkt, d.h. es ist $[\mathrm{tr}]\;[v] \;=\; [v] \;=\; [v]\;[\mathrm{tr}]$ für alle v .
- Der Weg $\overline{v}$, $\overline{v}(s) := v(1{-}s)$, ist *invers* zu v , d.h. $[\overline{v}]\;[v] \;=\; [v]\;[\overline{v}] \;=\; [\mathrm{tr}]$.

Die Menge $\pi_1(X,x)$ ist also eine *Gruppe* unter dem angegebenen Kompositionsgesetz.

Ähnlich wie wir es von anderen Konstruktionen schon gewöhnt sind, so ist auch die Konstruktion von $\pi_1(X,x)$ *funktoriell*. Nämlich, wenn $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung ist und wenn zudem f noch den Basispunkt x von X auf den Basispunkt y von Y abbildet oder, wie wir dafür auch sagen wollen, wenn f eine *Abbildung von punktierten Räumen* ist,

$$f :\; (X,x) \;\longrightarrow\; (Y,y) \;,$$

dann gibt es eine induzierte Abbildung

$$f_* :\; \pi_1(X,x) \;\longrightarrow\; \pi_1(Y,y) \;,$$

die definiert ist durch $f_*(\,[v]\,) \;:=\; [\,f{\circ}v\,]$ (wie üblich, so ist hier implizit die Unabhängigkeit von der Auswahl des Repräsentanten v von $[v]$ behauptet). Diese induzierte Abbildung nun ist mit der Gruppenstruktur verträglich oder, was dasselbe bedeutet, f_* ist ein *Gruppenhomomorphismus*,

$$f_*(\,[v]\,[v']\,) \;=\; f_*(\,[v]\,)\,f_*(\,[v']\,) \;.$$

Um dies einzusehen, braucht man nicht einmal Homotopien; eine entsprechende Gleichung gilt schon für geeignete Repräsentanten. Denn wenn v und v' Schleifen in (X,x) sind, so kann man einerseits diese beiden als Schleifen in (X,x) zusammensetzen und das Resultat nach (Y,y) transportieren; das gibt $f\circ(v\,v')$. Zum andern kann man auch zuerst transportieren, das gibt die Schleifen $(f{\circ}v)$ und $(f{\circ}v')$; diese kann man dann zusammensetzen zu $(f{\circ}v)\,(f{\circ}v')$. Man hat aber nun

$$f\circ(v\,v') \;=\; (f{\circ}v)\,(f{\circ}v') \;,$$

denn beide Seiten dieser behaupteten Gleichung beschreiben in Wirklichkeit *dieselbe* Abbildung (Nachprüfen der Definitionen!). □

Wir schauen einige Beispiele an.

Beispiel. Für $n\geq 2$ und für jedes $x\in S^n$ ist $\pi_1(S^n,x)$ die *triviale Gruppe*; d.h. die Gruppe, die nur ein einziges Element, nämlich das *Eins–Element* oder *neutrale Element* hat (das von der *trivialen Schleife* $S^1\longrightarrow\{x\}$ repräsentiert wird).

Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie der Beweis dafür, daß die Menge $\mathcal{S}(S^n)$ für $n\geq 2$ nur ein einziges Element hat. Wir beschreiben Schleifen mit Hilfe von punktierten Abbildungen der S^1 . Den Basispunkt von S^n stellen wir uns als den Südpol vor. Für eine vorgegebenen Schleife $w\colon(S^1,1)\to(S^n,x)$ konstruieren wir, wie früher, eine Homotopie (relative Version!) von w zu einer Abbildung w' , wo $w'(S^1)$ den Nordpol in S^n nicht trifft. Über die topologische Äquivalenz von S^n–Nordpol zu $\mathbb{R}^n$ bekommen wir dann die gewünschte *Nullhomotopie* (= Homotopie zur trivialen Schleife).

Beispiel. Für jeden Basispunkt x in S^1 ist $\pi_1(S^1,x)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$, der *Gruppe der ganzen Zahlen unter der Addition*.

Auch dies haben wir eigentlich schon gezeigt. Bezeichne Z_x das Urbild von $x\in S^1$ unter der Abbildung $\exp$ (wenn z.B. $x=1$ dann ist Z_x die Menge der ganzen Zahlen). Wie früher bei der Bestimmung von $\mathcal{S}(S^1)$ argumentieren wir, daß wir für jede Abbildung $w\colon\ (S^1,1)\to(S^1,x)$ ein Diagramm bekommen können,

$$\begin{array}{ccc}
(\,[0,1]\,,\{0,1\}\,) & \xrightarrow{\;\widetilde{v}\;} & (\mathbb{R},\mathbb{Z}_x) \\
\big\downarrow{\scriptstyle\exp} & & \big\downarrow{\scriptstyle\exp} \\
(S^1,1) & \xrightarrow{\;w\;} & (S^1,x)
\end{array}$$

und wie dort hängt die Zahl $k=\widetilde{v}(1)-\widetilde{v}(0)$ nur von der Homotopieklasse von w ab; umgekehrt ist durch k auch die Abbildung w bis auf Homotopie *relativ zu* $\{0,1\}$ schon festlegt. Wir haben also, wie dort, eine Bijektion

$$\pi_1\left(S^1,x\right) \;\xrightarrow{\;\approx\;}\; \mathbb{Z}\;.$$

Es bleibt zu zeigen, daß diese Bijektion ein *Gruppenisomorphismus* ist. Dazu wird es genügen, den Fall zu betrachten, wo die Schleife

$$v \;=\; w \circ \exp : \; (\,[0,1]\,,\{0,1\}) \;\longrightarrow\; (S^1, x)$$

die Zusammensetzung von zwei Schleifen v_1 und v_2 ist,

$$v \;=\; v_1\, v_2 \;.$$

In diesem Falle ist aber die Liftung $\widetilde{v}$ ebenfalls eine Zusammensetzung

$$\widetilde{v}(s) \;=\; \widetilde{v}_1\, \widetilde{v}_2(s) \;=\; \begin{cases} \widetilde{v}_1\,(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \widetilde{v}_2(2s{-}1) & \frac{1}{2} \le s \le 1 \;. \end{cases}$$

Für die Windungszahl k von w folgt deshalb

$$k \;=\; \widetilde{v}(1) - \widetilde{v}(0) \;=\; \big(\widetilde{v}(\tfrac{1}{2}) - \widetilde{v}(0)\big) \,+\, \big(\widetilde{v}(1) - \widetilde{v}(\tfrac{1}{2})\big) \;=\; k_1 + k_2 \;,$$

wo $k_1 \;=\; \widetilde{v}_1(1) - \widetilde{v}_1(0)$ die Windungszahl von w_1 bezeichnet ($v_1 = w_1 \circ \exp$); und k_2 die Windungszahl von w_2 . $\square$

In diesen beiden Beispielen hängt die Fundamentalgruppe nicht von der Wahl des Basispunktes ab. Das ist kein Zufall:

Satz. *Seien x und x' zwei Punkte in derselben Weg–Zusammenhangs–Komponente von X . Dann ist $\pi_1(X,x)$ isomorph zu $\pi_1(X,x')$.*

Bemerkung. Auf den Wegzusammenhang kann man hier nicht verzichten. Sei z.B. X die disjunkte Vereinigung $S^1 \dot\cup S^2$. Es ist dann

$$\pi_1(\,S^1 \dot\cup S^2,\, x\,) \;=\; \begin{cases} \pi_1(\,S^1,\, x) & \text{wenn } \; x \in S^1 \\ \pi_1(\,S^2,\, x) & \text{wenn } \; x \in S^2 \end{cases}$$

(denn ein in S^1 in $S^1 \dot\cup S^2$ beginnender Weg kann nicht aus S^1 heraus; ebenso kann ein in S^2 beginnender Weg nicht aus S^2 heraus).

Beweis des Satzes. Nach Voraussetzung existiert ein Weg

$$w : \; [0,1] \longrightarrow X \;, \quad \text{mit} \;\; w(0) = x \,, \; w(1) = x' \;.$$

Man definiert eine Abbildung

$$w_* : \; \pi_1(X,x) \;\longrightarrow\; \pi_1(X,x')$$

unter Benutzung dieses Weges, wie folgt. Sei

$$v : \; (\,[0,1]\,,\{0,1\}) \;\longrightarrow\; (X,x)$$

eine Schleife in X zum Basispunkt x . Dann ist eine Schleife in X zum Basispunkt x' gegeben durch

$$v'(s) \quad = \quad \begin{cases} w(1-3s) & 0 \le s \le \frac{1}{3} \\ v(3s-1) & \frac{1}{3} \le s \le \frac{2}{3} \\ w(3s-2) & \frac{2}{3} \le s \le 1 \ . \end{cases}$$

Analog induziert der Weg $\overline{w}$ von x' zu x eine Abbildung

$$\overline{w}_* : \ \pi_1(X, x') \ \longrightarrow \ \pi_1(X, x) \ .$$

Die zusammengesetzte Abbildung $\overline{w}_* \circ w_*$

$$\pi_1(X, x) \ \xrightarrow{w_*} \ \pi_1(X, x') \ \xrightarrow{\overline{w}_*} \ \pi_1(X, x)$$

ist die Identität, denn sie ist gegeben durch Vor– und Nachschalten je einer nullhomotopen Schleife, nämlich von $w\,\overline{w}$ bzw. $\overline{w}\,w$. Ähnlich gilt, daß die zusammengesetzte Abbildung $w_* \circ \overline{w}_*$ die Identität ist.

Es ist klar (oder?), daß der konstruierte Isomorphismus $w_* : \ \pi_1(X, x) \ \to \ \pi_1(X, x')$ mit der Gruppenstruktur verträglich ist; d.h., daß die Konstruktion (*nach* Übergang zu Homotopieklassen) mit der Komposition von Wegen verträglich ist.

Die Notation " w_* " deutet an, daß für die Konstruktion ein ganz bestimmter Weg, nämlich eben w , benutzt worden ist. Diese Präzisierung in der Notation ist notwendig, weil der resultierende Isomorphismus i.a. wirklich von der Wahl des Weges abhängt. Dies wird besonders deutlich, wenn man den Spezialfall betrachtet, wo $x = x'$ ist; wo in anderen Worten w ein *geschlossener* Weg mit Anfangspunkt und Endpunkt x ist. In diesem Falle wird der Isomorphismus w_* im allgemeinen *nicht* die identische Abbildung sein. Man kann ihn angeben. Nämlich, wenn $[w]$ das von w repräsentierte Element in $\pi_1(X, x)$ bezeichnet, dann ist die Abbildung w_* dasselbe wie der durch dies Element gegebene *innere Isomorphismus*: die Abbildung von $\pi_1(X, x')$ auf sich, die gegeben ist durch

$$\alpha \ \longmapsto \ [w]^{-1}\,\alpha\,[w] \ .$$

Überlagerungen

Definition. Sei X topologischer Raum. Eine *Überlagerung von* X bezeichnet einen topologischen Raum E zusammen mit einer Abbildung

$$p: \ E \longrightarrow X \ ,$$

die der folgenden Bedingung genügt:

Für jeden Punkt $x \in X$ *existiert eine Umgebung* U *von* x *in* X *, eine diskrete Menge* F_x (d.h. eine Menge, die aufgefaßt wird als topologischer Raum mit der diskreten Topologie) *und eine topologische Äquivalenz* u *von dem Unterraum* $p^{-1}(U)$ *in* E *zu dem Produktraum* $U \times F_x$; dabei soll u eine "*Abbildung über* U " sein, d.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\ u\ } & U \times F_x \\ \big\downarrow p & & \big\downarrow \mathrm{pr}_1 \\ U & \xrightarrow{\ \mathrm{id}_U\ } & U \end{array}$$

ist kommutativ.

Der Produktraum $U \times F_x$ könnte ebenso gut auch beschrieben werden als eine disjunkte Vereinigung von Kopien von U , nämlich je eine solche Kopie für jeden Punkt y in F_x . Da

$$U \times \{y\} \ \longrightarrow \ U$$

eine topologische Äquivalenz ist, gibt die Definition insbesondere deshalb eine Formulierung der Art, daß die Abbildung $p\colon E \to X$ "lokal" eine topologische Äquivalenz ist. Dies ist eine *starke* Formulierung insofern als *lokal* sich hier auf X bezieht, also eine *gleichzeitige* Aussage für sämtliche Urbilder macht.

Etwas technischer kann man es auch so ausdrücken: Für jedes $y \in p^{-1}(x)$ gibt es eine *lokale Umkehrabbildung*, definiert auf der Umgebung U , die x auf y abbildet. Dies ist eine Abbildung

$$u_y : \ U \longrightarrow E$$

mit der Eigenschaft, daß $p \circ u_y \ = \ \mathrm{id}_U$ und daß eben $u_y(x) = y$. Es ist

$$u_y : \ U \to \mathrm{Bild}\,(u_y)$$

eine topologische Äquivalenz. Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist, insgesamt, die disjunkte Vereinigung

$$p^{-1}(U) \ \approx \ \dot{\bigcup}_{y \in p^{-1}(x)} \mathrm{Bild}\,(u_y) \ .$$

Hier sind noch einige Vokabeln. Die Abbildung p heißt die *Überlagerungs–Projektion*. Die in der Definition vorkommende Umgebung U wird als eine *Elementarumgebung* (des Punktes x) bezeichnet. F_x heißt die *Faser über* x (es folgt aus der Definition der Überlagerungen, daß F_x zu dem Urbild $p^{-1}(x)$ isomorph ist; sogar als topologischer Raum — mit anderen Worten, $p^{-1}(x)$ trägt als Unterraum von E die diskrete Topologie). Die Anzahl der Punkte in F_x , insbesondere wenn diese Anzahl endlich ist, wird manchmal als die *Blätterzahl* der Überlagerung bezeichnet. (Genau genommen sollten wir hier von der *Blätterzahl am Punkte* x reden. Wir werden später sehen, daß bei *weg–zusammenhängendem* X die Blätterzahl nicht von dem Punkt x abhängt; im allgemeinen kann das aber durchaus der Fall sein).

Bevor wir zu interessanten Beispielen für Überlagerungen kommen, wollen wir einige eher uninteressante Dinge vorweg abhaken. Zunächst gibt es die banalen Beispiele für Überlagerungen: Jede topologische Äquivalenz ist eine Überlagerung; und die Abbildung der leeren Menge in irgendeinen Raum X ist auch eine Überlagerung.

Als nächstes nehmen wir zur Kenntnis, daß man aus gegebenen Überlagerungen über die *disjunkte Vereinigung* neue produzieren kann. Zunächst, wenn $E_1 \to X_1$ und $E_2 \to X_2$ Überlagerungen sind, dann ist auch die Abbildung der disjunkten Vereinigungen,

$$E_1 \,\dot\cup\, E_2 \;\longrightarrow\; X_1 \,\dot\cup\, X_2 \ ,$$

eine Überlagerung (denn für den Überlagerungstest an einem Punkt $x \in X_1 \,\dot\cup\, X_2$ braucht man nur folgendes zu bemerken: wenn $x \in X_1$, dann macht man den Überlagerungstest für $E_1 \to X_1$; ähnlich, wenn $x \in X_2$). — Ein wenig interessanter ist der folgende Sachverhalt.

Satz. *Wenn* $p_1 : E_1 \to X$ *und* $p_2 : E_2 \to X$ *Überlagerungen sind, dann auch*

$$p_1 \,\dot\cup\, p_2 \ : \ E_1 \,\dot\cup\, E_2 \;\longrightarrow\; X \ .$$

Beweis. Sei $x \in X$. Der Überlagerungstest für $p_1 : E_1 \to X$ gibt eine Umgebung U_1 von x und eine topologische Äquivalenz (über U_1)

$$u_1 \ : \ {p_1}^{-1}(U_1) \;\longrightarrow\; U_1 \times F_x^1 \ .$$

Ähnlich gibt der Überlagerungstest für $p_2 : E_2 \to X$ eine Umgebung U_2 von x und eine topologische Äquivalenz (über U_2)

$$u_2 \ : \ {p_2}^{-1}(U_2) \;\longrightarrow\; U_2 \times F_x^2 \ .$$

Durch Zusammenbauen dieser beiden bekommt man eine topologische Äquivalenz (über $U_1 \cap U_2$)

$$u_1|_{(U_1 \cap U_2)} \,\dot\cup\, u_2|_{(U_1 \cap U_2)} \ : \ (p_1 \dot\cup p_2)^{-1}(U_1 \cap U_2) \;\longrightarrow\; (U_1 \cap U_2) \times (F_x^1 \dot\cup F_x^2) \ .$$

Dies ist der erfolgreiche Überlagerungstest für die Abbildung $p_1 \,\dot\cup\, p_2$ über der Umgebung $U_1 \cap U_2$ von x . $\square$

Beispiele. (a) Sei die 1-Sphäre gegeben als der Raum der komplexen Zahlen vom Betrag 1 , $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$. Die Abbildung $S^1 \to S^1$,

$$z \longmapsto z^k$$

(k eine ganze Zahl), kann interpretiert werden als "k–faches Aufwickeln". Vorausgesetzt, daß $k \neq 0$, so ist die Abbildung eine Überlagerung. Die Blätterzahl ist $|k|$, die lokalen (!) Umkehrfunktionen sind gegeben durch

$$x \longmapsto \sqrt[k]{x} \ .$$

Ähnlich wie früher im Zusammenhang mit der Exponentialfunktion angesprochen, so ist auch die Funktion "*k-te Wurzel*" für $k \geq 2$ im komplexen Bereich nur *lokal* als Funktion eindeutig definierbar (beim Versuch, eine globale Definition zu bekommen, ergeben sich Mehrdeutigkeiten). Technisch zeigt sich das wieder darin: wenn man die Funktion um einen Punkt $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, in eine Potenzreihe entwickelt, so wird diese Potenzreihe nur in einem Kreis um den Punkt a mit Radius $|a|$ konvergieren; die Potenzreihe konvergiert sicherlich nicht für alle Punkte auf dem Einheitskreis gleichzeitig.

(b) Die Abbildung $\mathbb{R} \to S^1$,

$$x \longmapsto \exp(x) = e^{2\pi i x} \ ,$$

ist eine unendlich–blättrige Überlagerung (vgl. S. 68). Daß die lokalen Umkehrfunktionen (der Logarithmus) nur *lokal* eindeutig definierbar sind, wurde auch früher schon angesprochen.

(c) Die in (a) und (b) beschriebenen Überlagerungen des Kreises kann man zu weiteren Überlagerungen kombinieren (über die disjunkte Vereinigung — der vorstehende Satz).

(d) Bezeichne $\mathbb{R}P^2$ den Quotienten–Raum von S^2 , der durch die Identifizierung von Antipodenpunkten entsteht. Die Quotientenraum–Projektion

$$p: \ S^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$$

ist eine Überlagerung (mit Blätterzahl 2). Denn sei z.B. $x \in \mathbb{R}P^2$ der Bildpunkt des Nordpols. Sei die Umgebung $U \subset \mathbb{R}P^2$ definiert als das Bild der nördlichen Polkappe. Dann ist

$$p^{-1}(U) \approx \text{(nördl. Polkappe)} \ \dot\cup \ \text{(südl. Polkappe)} \ .$$

(e) Das letzte Beispiel, das wir hier betrachten, ist *keine* Überlagerung, obwohl es bei einem ersten flüchtigen Blick so aussehen mag. Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Die (Überlagerungs–) Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ liefert per Einschränkung eine Abbildung, die (a,b) auf den Kreis aufwickelt,

$$q : (a,b) \longrightarrow S^1 \ , \quad y \longmapsto \exp(y) \ .$$

Die Abbildung ist "lokal eine topologische Äquivalenz" in dem Sinne, daß zu jedem Punkt $z \in (a,b)$ eine Umgebung V von z existiert, so daß die eingeschränkte Abbildung $q|_V : V \to q(V)$ eine topologische Äquivalenz von V auf eine Umgebung des Bildpunktes $q(z)$ ist.

Andererseits ist die Abbildung *nicht* eine Überlagerung. Der Überlagerungs–Test funktioniert nämlich nicht für die beiden Punkte in S^1, die unter den Endpunkten von (a,b) liegen. Denn am Punkt $\exp(a)$ zum Beipiel müßte es einerseits eine lokale Umkehrfunktion geben, deren Bild die Punkte in (a,b) in der Nähe von a enthielte, andererseits aber könnte das Bild nicht den Punkt a selbst enthalten. Das ist offenbar widersprüchlich. □

Wir wenden uns jetzt den Überlagerungen allgemein zu. Wir benötigen zwei Sätze technischen Charakters, die wir als nächstes herleiten wollen, den *Wege–Liftungs–Satz* und den *Homotopie–Liftungs–Satz*. Im Grunde kennen wir diese Sätze schon. Wir haben sie nämlich verwendet bei der Berechnung von $\pi_1(S^1,x)$ bzw. $\mathcal{S}(S^1)$ (Seite 69 und Seite 70), wo wir diese Sätze für den speziellen Fall der Überlagerungs–Projektion $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ formuliert hatten.

Abgesehen von der größeren Allgemeinheit gibt es bei der gegenwärtigen Behandlung noch einen weiteren Unterschied. Wir werden bei unseren Liftungs–Problemen nämlich grundsätzlich voraussetzen, daß eine Liftung eines Anfangs–Punktes schon vorgegeben ist (oder schon vorher gewählt worden war). Dem Anschein nach ist dies eine irrelevante Kleinigkeit. Es hat aber einen dramatischen Effekt; es erzwingt nämlich die *Eindeutigkeit*(!) der Liftung.

Satz (Wege–Liftungs–Satz). *Sei $p\colon E \to X$ eine Überlagerung. Sei $w\colon [0,1] \to X$ ein Weg mit Anfangspunkt $w(0) = x_0$. Sei y_0 eine Liftung von x_0* (d.h. $y_0 \in p^{-1}(x_0)$). *Es existiert eine Liftung von w zum Anfangspunkt y_0*; d.h. *es existiert ein Weg*

$$\widetilde{w} : [0,1] \to E ,$$

so daß $\widetilde{w}(0) = y_0$ und so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\widetilde{w}} & E \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}|_{[0,1]}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ [0,1] & \xrightarrow{w} & X \end{array}$$

kommutiert. Der geliftete Weg $\widetilde{w}$ ist (bei Vorgabe des Anfangspunktes) *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Für jedes $x \in X$ sei eine *Elementar–Umgebung* U_x von x gewählt; solche existieren nach Definition der Überlagerungen. Es ist also

$$p^{-1}(U_x) \;\approx\; U_x \times p^{-1}(x)$$

in einer mit der Projektion verträglichen Weise, und auf U_x haben wir lokale Umkehr–Abbildungen zur Verfügung; diese sind indiziert durch die Punkte von $p^{-1}(x)$.

Da wir notfalls U_x auch durch seinen offenen Kern ersetzen können, dürfen wir annehmen, daß U_x selbst eine *offene* Umgebung von x ist. Damit haben wir dann insgesamt eine offene Überdeckung von X , nämlich $\{U_x\}_{x\in X}$. Die zurückgezogene Überdeckung $\{w^{-1}(U_x)\}_{x\in X}$ ist nun eine offene Überdeckung des kompakten, metrischen Raumes $[0,1]$, auf die wir den Lebesgue'schen Überdeckungs–Satz anwenden können. Folglich existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß . . . .

Wir wählen eine Unterteilung von $[0,1]$ in Bögen $B_1, \dots, B_m$, von denen jeder eine Länge $< \varepsilon$ hat. Nach Herleitung gilt dann für jedes $j = 1, \dots, m$, daß das Bild $w(B_j)$ ganz enthalten ist in einer (oder mehreren) der Elementar–Umgebungen U_x ; sei ein solches x ausgewählt und mit x_j bezeichnet. Statt U_{x_j} schreiben wir kürzer auch U_j ; also

$$w(B_j) \ \subset \ U_{x_j} = U_j \ .$$

Auf der Elementar–Umgebung U_j sind nun die lokalen Umkehr–Abbildungen

$$u_z : \ U_j \longrightarrow E \qquad (\text{ für } \ z \in p^{-1}(x_j) \ )$$

definiert. In einer Weise, die noch zu beschreiben sein wird, wählen wir unter diesen lokalen Umkehr–Abbildungen eine ganz bestimmte aus, die wir mit u_j bezeichnen. Damit wird dann die eingeschränkte Abbildung $\widetilde{w}|_{B_j}$ definiert als die zusammengesetzte Abbildung

$$B_j \xrightarrow{w|_{B_j}} U_{x_j} \xrightarrow{u_j} E \ .$$

Die Auswahl der lokalen Umkehr–Abbildungen ist natürlich so zu treffen, daß die eingeschränkten Abbildungen auch zusammenpassen; das geht am besten durch Induktion.

1. Schritt (*Definition von* $\widetilde{w}|_{B_1}$). Der Anfangspunkt $w(0) = x_0$ ist enthalten in U_1 , und

$$p^{-1}(U_1) \ = \ \dot{\bigcup}_{z\in p^{-1}(x_1)} \mathrm{Bild}(u_z) \ .$$

Da der vorgegebene Anfangspunkt y_0 enthalten ist in $p^{-1}(x_0)$, und damit auch in $p^{-1}(U_1)$, existiert somit ein z_1 (und zwar genau eins) so daß $y_0 \in \mathrm{Bild}(u_{z_1})$. Wir setzen $u_1 = u_{z_1}$, also

$$\widetilde{w}|_{B_1} \ = \ u_{z_1} \circ (w|_{B_1}) \ .$$

2. Schritt (*Definition von* $\widetilde{w}|_{B_2}$). Da der Anfangspunkt von B_2 gleich dem Endpunkt von B_1 ist, ist die zu definierende Abbildung $\widetilde{w}|_{B_2}$ auf dem Anfangspunkt a_2 von B_2 bereits definiert, nämlich als $\widetilde{w}|_{B_1}(a_2)$. Der Bildpunkt nun ist enthalten in

$$p^{-1}(U_2) \ = \ \dot{\bigcup}_{y\in p^{-1}(x_2)} \mathrm{Bild}(u_y)$$

und damit in $\mathrm{Bild}(u_{z_2})$ für genau ein $z_2 \in p^{-1}(x_2)$. Wir setzen

$$\widetilde{w}|_{B_2} \ = \ u_{z_2} \circ (w|_{B_2}) \ .$$

Nach Konstruktion gilt dann

$$(\widetilde{w}|_{B_2})\,(\text{Anfangspunkt von } B_2) \;=\; (\widetilde{w}|_{B_1})\,(\text{Endpunkt von } B_1) \;.$$

3.Schritt (*Definition von* $\widetilde{w}|_{B_3}, \ldots, \widetilde{w}|_{B_m}$). Das geht analog.

Bei der vorstehenden Konstruktion ist schlechterdings nicht zu sehen, was man hätte anders machen können. Insofern ist die Eindeutigkeit der Konstruktion zumindest plausibel. Trotzdem scheint es nicht unangebracht, für die Eindeutigkeit auch noch ein Argument anzugeben.

Sei also $\widetilde{w}'$ eine weitere Liftung von w mit

$$\widetilde{w}'(0) \;=\; \widetilde{w}(0) \;=\; y_0 \;.$$

Sei ε die durch die obige Anwendung des Lebesgue'schen Satzes gegebene Zahl. Es genügt sicherlich, zu zeigen: wenn $\widetilde{w}$ und $\widetilde{w}'$ an einer Stelle $s \in [0,1]$ übereinstimmen, dann auch noch in dem in s beginnenden Bogen B der Länge $\varepsilon/_2$.

Sei also s eine Stelle, an der $\widetilde{w}$ und $\widetilde{w}'$ übereinstimmen. Sei B der dort beginnende Bogen der Länge $\varepsilon/_2$. Dann ist B in einer ε–Kugel enthalten. Nach der Konstruktion von ε über den Lebesgueschen Satz existiert deshalb eine Elementar–Umgebung U_x in X mit

$$w(B) \;\subset\; U_x \;.$$

Das Urbild $p^{-1}(U_x)$ ist eine disjunkte Vereinigung,

$$p^{-1}(U_x) \;=\; \dot{\bigcup}_{z\in p^{-1}(x)} \text{Bild}(u_z) \;.$$

Andererseits kann der zusammenhängende Raum B nur auf solche Weise in eine disjunkte Vereinigung abbilden, daß der ganze Raum in eine *einzige* Komponente davon abbildet (das Bild eines zusammenhängenden Raumes ist wieder zusammenhängend!). Jeder der beiden Wege $\widetilde{w}$ und $\widetilde{w}'$ ist folglich in jeweils einer einzigen Komponente von $\dot{\bigcup}_{z\in p^{-1}(x)} \text{Bild}(u_z)$ enthalten. Schließlich haben diese beiden Komponenten auch noch einen Punkt gemeinsam, nämlich den Punkt $\widetilde{w}(s) = \widetilde{w}'(s)$. Es folgt, daß sie identisch sind; etwa beide gleich $\text{Bild}(u_{z_0})$.

Nun sind aber die lokale Umkehr–Abbildung u_{z_0} einerseits und die Einschränkung der Überlagerungs–Projektion p andererseits zueinander inverse topologische Äquivalenzen zwischen den Räumen $\text{Bild}\,(u_{z_0})$ und U_x . Es folgt, daß für alle $s' \in B$ gilt

$$\widetilde{w}'(s') \;=\; u_{z_0}(p(\widetilde{w}'(s'))) \;=\; u_{z_0}(w(s')) \;=\; u_{z_0}(p(\widetilde{w}(s'))) \;=\; \widetilde{w}(s') \;.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit des gelifteten Weges sind damit nachgewiesen. □

Satz (Homotopie–Liftungs–Satz). *Sei* $p : E \to X$ *Überlagerung. Seien*

$$\widetilde{w}_0\,,\ \widetilde{w}_1 :\ [0,1] \ \longrightarrow\ E$$

zwei Wege mit demselben Anfangspunkt $\widetilde{w}_0(0) = \widetilde{w}_1(0)$ (aber nicht notwendigerweise mit demselben Endpunkt). *Seien* w_0 *und* w_1 *die projizierten Wege*

$$w_0 = p \circ \widetilde{w}_0\ , \quad w_1 = p \circ \widetilde{w}_1\ ,$$

und sei

$$W :\ [0,1] \times [0,1] \ \longrightarrow\ X$$

eine Homotopie von w_0 *zu* w_1 *, relativ zum Anfangspunkt*

$$(\ W\,|_{[0,1]\times 0} = w_0\ ,\quad W\,|_{[0,1]\times 1} = w_1\ ,\quad W(0,t) = W(0,0)\ \text{ für alle } t\ )\ .$$

Es existiert eine Liftung von W *zu einer Homotopie*

$$\widetilde{W} :\ [0,1] \times [0,1] \longrightarrow E$$

(d.h. $p \circ \widetilde{W} = W$), *und* $\widetilde{W}$ *ist Homotopie von* $\widetilde{w}_0$ *zu* $\widetilde{w}_1$ *, relativ zum Anfangspunkt. Wenn die Homotopie* W *auf dem Endpunkt konstant ist, so ist auch die Homotopie* $\widetilde{W}$ *auf dem Endpunkt konstant.*

Beweis. Mit dem mittlerweile schon zur Routine gewordenen Trick der Anwendung des Lebesgue'schen Überdeckungssatzes werden wir uns überlegen, daß *irgendeine* Liftung $\widetilde{W}$ von W existiert mit der Eigenschaft

$$\widetilde{W}(0,0) = \widetilde{w}_0(0)\ .$$

Diese Liftung stellt sich als *eindeutig* heraus, und sie hat auch die verlangten Eigenschaften; von diesen Dingen werden wir uns zunächst überzeugen.

— *Eindeutigkeit von* $\widetilde{W}$. Sei $\widetilde{W}'$ eine weitere Liftung von W mit $\widetilde{W}'(0,0) = \widetilde{w}_0(0)$. Zu $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ gibt es einen Weg

$$v :\ [0,1] \ \longrightarrow\ [0,1] \times [0,1]$$

mit $v(0) = (0,0)$, $v(1) = (s,t)$. Es sind dann $\widetilde{W} \circ v$ und $\widetilde{W}' \circ v$ Wege in E , und beide sind Liftungen des Weges $W \circ v$ in X , mit dem gemeinsamen Anfangspunkt $\widetilde{W}(v(0)) = \widetilde{w}_0(0)$. Der vorige Satz ist nun anwendbar. Nach der Eindeutigklausel dieses Satzes folgt, daß die Wege $\widetilde{W} \circ v$ und $\widetilde{W}' \circ v$ identisch sind, insbesondere ist deshalb auch

$$\widetilde{W}(s,t) = (\widetilde{W} \circ v)(1) = (\widetilde{W}' \circ v)(1) = \widetilde{W}'(s,t)\ .$$

— *Behauptete Eigenschaften.* (i) Weil $p \circ \widetilde{W} = W$, ist $\widetilde{W}|_{[0,1]\times 0}$ eine Liftung des Weges $w_0 = W|_{[0,1]\times 0}$. Aber $\widetilde{w}_0$ ist auch eine Liftung von w_0 , und zwar zum selben Anfangspunkt $\widetilde{w}_0(0) = \widetilde{W}(0,0)$. Nach der Eindeutigkeitsklausel des vorigen Satzes folgt wieder, daß die Wege $\widetilde{W}|_{[0,1]\times 0}$ und $\widetilde{w}_0$ identisch sind.

(ii) Die eingeschränkte Homotopie $\widetilde{W}|_{0\times[0,1]}$ und der triviale Weg $0\times[0,1] \to \widetilde{w}_0(0)$ sind beides Liftungen des trivialen Weges $W|_{0\times[0,1]} : 0\times[0,1] \to w_0(0)$ in X , und zwar zum selben Anfangspunkt; sie sind deshalb identisch.

(iii) Wegen (ii) haben die beiden Liftungen $\widetilde{W}|_{[0,1]\times 1}$ und $\widetilde{w}_1$ von w_1 denselben Anfangspunkt; sie sind deshalb identisch.

(iv) Wenn die Homotopie W auf dem Endpunkt konstant ist, dann sind sowohl die eingeschränkte Homotopie $\widetilde{W}|_{1\times[0,1]}$ als auch die triviale Abbildung $1\times[0,1] \to \widetilde{w}_0(1)$ Liftungen des trivialen Weges mit Wert $w_0(1)$; diese beiden Liftungen sind dann identisch, d.h. die Homotopie $\widetilde{W}$ ist konstant auf dem Endpunkt von $\widetilde{w}_0$.

— *Existenz von* $\widetilde{W}$. Wie im vorigen Satz sei $\{U_x\}_{x\in X}$ eine offene Überdeckung von X durch Elementar–Umgebungen. Dann ist $\{W^{-1}(U_x)\}_{x\in X}$ eine offene Überdeckung des kompakten, metrischen Raumes $[0,1]\times[0,1]$. Also existiert nach dem Lebesgue'schen Satz ein $\varepsilon > 0$, so daß . . . . Wir wählen eine Unterteilung von $[0,1]\times[0,1]$ in Quadrate gleicher Größe

$$[0,1]\times[0,1] \quad = \quad \bigcup_{\substack{1\le k\le m \\ 1\le l\le m}} Q_{k,l} \ ,$$

deren jedes in einer ε–Kugel in $[0,1]\times[0,1]$ liegt. Nach Konstruktion von ε gilt dann für jedes (k,l) , daß das Bild $W(Q_{k,l})$ schon ganz enthalten ist in einer Elementar–Umgebung $U_{x_{k,l}}$, die wir abkürzend auch mit $U_{k,l}$ bezeichnen werden. Nun ist

$$p^{-1}(U_{k,l}) \ = \ \dot{\bigcup}_{y\in p^{-1}(x_{k,l})} \operatorname{Bild}(u_y) \ ,$$

wobei die u_y , $y \in p^{-1}(x_{k,l})$, die lokalen Umkehrabbildungen auf $U_{k,l}$ bezeichnen. In einer noch zu beschreibenden Weise wird eine dieser lokalen Umkehr–Abbildungen nun ausgewählt, die wir mit $u_{k,l}$ bezeichnen. Wir definieren dann eine Abbildung $\widetilde{W}_{k,l} : Q_{k,l} \to E$ als

$$\widetilde{W}_{k,l} \ = \ u_{k,l} \circ W|_{Q_{k,l}} \ .$$

Die Auswahl der $u_{k,l}$ kann so erfolgen, daß $\widetilde{W}_{k,l} \,|\, Q_{k,l}\cap Q_{k',l'} \ = \ \widetilde{W}_{k',l'} \,|\, Q_{k,l}\cap Q_{k',l'}$. Um das einzusehen, geht man induktiv vor: erst $(k,l) = (1,1)$, dann $(1,2)$, dann $(1,3),\ldots,(1,m)$; weiter mit $(2,1)$, dann $(2,2)$, etc. Die Details sind identisch mit denen in einem schon früher betrachteten Fall (s. Seite 72). Wir werden die Details deshalb hier weglassen. Wir können also schließlich definieren

$$\widetilde{W}|_{Q_{k,l}} \ := \ \widetilde{W}_{k,l} \ .$$

□

Liftungs–Satz

Als Anwendung der vorstehenden Resultate erhalten wir den nunmehr zu diskutierenden allgemeinen *Liftungs–Satz*. Das bemerkenswerte an diesem Satz ist, daß er eine Beziehung herstellt zwischen Dingen ganz verschiedener Art, nämlich

— einer geometrischen Aussage auf der einen Seite (Existenz einer Liftung) und

— einer algebraischen Aussage auf der anderen (daß nämlich eine gewisse Untergruppe der Fundamentalgruppe eine gewisse andere Untergruppe enthält).

Zur Formulierung des Satzes benötigen wir eine neue Vokabel. Ein Raum wird nämlich als *lokal weg–zusammenhängend* bezeichnet, wenn jeder Punkt darin beliebig kleine weg–zusammenhängende Umgebungen hat. Oder, etwas genauer:

DEFINITION. Ein Raum X heißt *lokal weg–zusammenhängend*, wenn für jeden Punkt $x \in X$ und für jede Umgebung U von x eine weg–zusammenhängende Umgebung V von x existiert, die in U enthalten ist.

Für solche Räume notieren wir:

SATZ. *Sei X lokal weg–zusammenhängend. Dann gilt:*

- *Jede Weg–Zusammenhangs–Komponente von X ist offen.*
- *X ist die disjunkte Vereinigung seiner Weg–Zusammenhangs–Komponenten.*
- *Es gibt in X keinen Unterschied zwischen Zusammenhangs–Komponenten einerseits und Weg–Zusammenhangs–Komponenten andererseits.*

BEWEIS. Die Definition von "lokal weg–zusammenhängend" sagt insbesondere, daß eine Weg–Zusammenhangs–Komponente in X zu jedem ihrer Punkte noch eine ganze Umgebung dieses Punktes enthält; sie ist also offen. Das Komplement einer Weg–Zusammenhangs–Komponente ist Vereinigung der anderen Weg–Zusammenhangs–Komponenten und deshalb ebenfalls offen. Es folgt, daß jede Weg–Zusammenhangs–Komponente sowohl offen als auch abgeschlossen ist; der Raum X ist daher die disjunkte Vereinigung seiner Weg–Zusammenhangs–Komponenten. Schließlich ist jede Weg–Zusammenhangs–Komponente einerseits zusammenhängend, andererseits nach dem gerade gesagten aber nicht enthalten in irgendeiner größeren zusammenhängenden Teilmenge von X ; folglich ist sie auch eine Zusammenhangskomponente. $\square$

Für später notieren wir an dieser Stelle noch den folgenden Sachverhalt.

SATZ. *Sei X lokal weg–zusammenhängend. Sei $p : E \to X$ Überlagerung. Dann gilt:*

- *E ist lokal weg–zusammenhängend.*
- *Wenn E' Zusammenhangs–Komponente von E ist (oder, allgemeiner, eine Vereinigung von Zusammenhangs–Komponenten), dann ist $p|_{E'} : E' \to X$ ebenfalls eine Überlagerung.*

Beweis; Sei $e \in E$ und sei V Umgebung von e. Wir wollen zeigen, daß V eine wegzusammenhängende Umgebung von e enthält. Sei U eine Elementarumgebung des Bildpunktes $p(e)$, so daß also eine topologische Äquivalenz (über U) besteht,

$$p^{-1}(U) \approx U \times p^{-1}(\,p(e)\,) .$$

Es ist $p|_{(U\times e)} : (U\times e) \to U$ eine topologische Äquivalenz, und $V \cap (U\times e)$ ist Umgebung von e. Es folgt, daß $p(\,V \cap (U\times e)\,)$ eine Umgebung von $p(e)$ in U ist; und deshalb auch in X. Nach Voraussetzung über X nun enthält diese Umgebung noch eine wegzusammenhängende Umgebung U' von $p(e)$. Damit ist dann

$$U' \times e \;\subset\; U \times p^{-1}(\,p(e)\,)$$

eine wegzusammenhängende Umgebung von e, die in $V \cap (U\times e)$ enthalten ist und deshalb auch in V. Die erste Behauptung ist somit geklärt.

Da wir nun wissen, daß E lokal wegzusammenhängend ist, wissen wir auch (nach dem vorigen Satz), daß E die disjunkte Vereinigung seiner Weg–Zusammenhangskomponenten ist (und daß *Zusammenhangskomponenten* einerseits und *Weg–Zusammenhangskomponenten* andererseits in E dasselbe bedeuten).

Sei E' eine Zusammenhangskomponente in E (oder eine Vereinigung von solchen), sei E'' das Komplement. E ist dann die disjunkte Vereinigung von E' und E''. Um zu zeigen, daß die eingeschränkte Abbildung $p|_{E'} : E' \to X$ eine Überlagerung ist, werden wir zeigen, daß wir für jeden Punkt $x \in X$ eine Elementarumgebung finden können.

Sei also $x \in X$. Sei U eine Elementarumgebung von x (für die Überlagerungsprojektion $p\colon E \to X$). Die Umgebung U enthält (nach Voraussetzung über X) eine *wegzusammenhängende* Umgebung U' von x. Die topologische Äquivalenz (über U)

$$p^{-1}(U) \approx U \times p^{-1}(x)$$

induziert eine topologische Äquivalenz (über U')

$$p^{-1}(U') \approx U' \times p^{-1}(x) .$$

Mit anderen Worten, U' ist auch eine Elementarumgebung. Darüberhinaus ist aber mit U' nun auch für jedes $y \in p^{-1}(x)$ der Raum $U' \times \{y\}$ wegzusammenhängend und deshalb entweder ganz in E' enthalten oder ganz in E''. Es folgt, daß die vorstehende topologische Äquivalenz als Einschränkung die folgende hat,

$$(p|_{E'})^{-1}(U') = E' \cap p^{-1}(U') \;\approx\; U' \times (\,E' \cap p^{-1}(x)\,) = U' \times (p|_{E'})^{-1}(x)$$

(eine topologische Äquivalenz über U'). Der Überlagerungstest war erfolgreich. $\square$

Nach diesen Vorbemerkungen über den lokalen Wegzusammenhang kommen wir nun schließlich zu dem allgemeinen Liftungs–Satz.

Satz (Liftungs–Satz). *Sei* $p: E \to X$ *eine Überlagerung. Sei* $x_0 \in X$ *und* $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. *Der Raum* Y *sei zusammenhängend und lokal weg–zusammenhängend. Sei* $y_0 \in Y$ *und sei*

$$f: (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

eine Abbildung von punktierten Räumen. Die folgenden zwei Aussagen sind äquivalent:

- f *hat eine Liftung zu einer Abbildung* $\widetilde{f}: (Y, y_0) \longrightarrow (E, e_0)$ (d.h., $p \circ \widetilde{f} = f$).
- $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Weiterhin gilt, daß eine Liftung von f (mit der Bedingung $\widetilde{f}(y_0) = e_0$) *schon eindeutig bestimmt ist* (falls sie existiert).

Beweis. Die eine der behaupteten Implikationen ist eine unmittelbare Folge aus der *Natürlichkeit* der Konstruktion der Fundamentalgruppe. Nämlich wenn die Liftung $\widetilde{f}$ von f existiert, so folgt für die Bild–Gruppen (Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$)

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = (p \circ \widetilde{f})_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\widetilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)) .$$

Umgekehrt wollen wir, wenn wir diese Inklusion voraussetzen dürfen, für die gegebene Abbildung f eine Liftung $\widetilde{f}$ konstruieren.

Diese Konstruktion geht über den Wege–Liftungs–Satz. Da Y wegzusammenhängend ist (denn es ist ja, nach Voraussetzung, zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend), können wir einen vorgegebenen Punkt y in Y durch einen Weg mit dem Basispunkt verbinden: wir *wählen* irgendeinen Weg $w_y: [0,1] \to Y$ mit

$$w_y(0) = y_0 , \quad w_y(1) = y .$$

Die zusammengesetzte Abbildung $f \circ w_y$,

$$[0,1] \xrightarrow{\ w_y\ } Y \xrightarrow{\ f\ } X ,$$

ist dann ein Weg in X . Auf diesen Weg wenden wir den Wege–Liftungs–Satz an. Das Resultat ist ein Weg $\widetilde{f \circ w_y}: [0,1] \to E$ mit $\widetilde{f \circ w_y}(0) = e_0$. Wir *definieren* nun

$$\widetilde{f}(y) := \widetilde{f \circ w_y}(1) .$$

Es bleibt zu zeigen:

- *die Abbildung* $\widetilde{f}$ *ist wohldefiniert*
- *die Abbildung ist stetig.*

Zur Frage der Wohldefiniertheit merken wir zunächst an, daß nach dem Wege–Liftungs–Satz das Liften von Wegen zu vorgegebenem Anfangspunkt eindeutig ist. Die Definition von $\widetilde{f}(y)$ hängt deshalb allenfalls von der getroffenen Wahl des Weges w_y ab.

Wir wollen zeigen, daß sie von dieser Wahl tatsächlich aber nicht abhängt. Dazu sei $w'_y : [0,1] \to Y$ ein anderer Weg, den wir hätten wählen können,

$$w'_y(0) = y_0 , \quad w'_y(1) = y .$$

Wir betrachten zuerst den Spezialfall, wo w'_y homotop ist zu w_y relativ zu Anfangs- und Endpunkt. In diesem Fall sind auch die Wege $f \circ w'_y$ und $f \circ w_y$ homotop relativ zu Anfangs- und Endpunkt. Die Anwendung des Homotopie–Liftungs–Satzes zeigt nun, daß auch die gelifteten Wege $\widetilde{f \circ w'_y}$ und $\widetilde{f \circ w_y}$ homotop sind relativ zu Anfangs- und Endpunkt; insbesondere haben wir deshalb $\widetilde{f \circ w'_y}(1) = \widetilde{f \circ w_y}(1)$.

Den allgemeinen Fall wollen wir auf diesen Spezialfall zurückführen (sowie auf ein Argument mit der Fundamentalgruppe). Dazu betrachten wir den zusammengesetzten Weg $w'_y \, {w_y}^{-1}$ ("zuerst w'_y , dann den zu w_y inversen Weg") oder, als Formel,

$$w'_y \; {w_y}^{-1}(s) \quad = \quad \begin{cases} w'_y(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ w_y(2{-}2s) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \; . \end{cases}$$

Wenn wir diesen Weg wiederum mit w_y zusammensetzen, so erhalten wir einen Weg $w'_y \; {w_y}^{-1} \, w_y$ oder, wieder als Formel,

$$w'_y \; {w_y}^{-1} \, w_y \, (s) \quad = \quad \begin{cases} w'_y(4s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ w_y(2{-}4s) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ w_y(2s{-}1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \; . \end{cases}$$

Dies ist ein Weg von y_0 zu y , und es ist klar (oder?), daß dieser Weg zu w'_y homotop ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt.

Wenn wir abkürzend schreiben $v_y = w'_y \, w_y^{-1} \, w_y$, so folgt also nach dem obigen Spezialfall, daß die Liftungen der beiden Wege $f \circ v_y$ und $f \circ w'_y$ dieselben Endpunkte haben,

$$(\widetilde{f \circ v_y})(1) \quad = \quad (\widetilde{f \circ w'_y})(1) \; .$$

Um nun weiter $(\widetilde{f \circ v_y})(1)$ mit $(\widetilde{f \circ w_y})(1)$ zu vergleichen, verwenden wir den

Hilfssatz. Wenn $f_*(\, \pi_1(Y, y_0)\,) \subset p_*(\, \pi_1(E, e_0)\,)$, dann ist die Liftung $\widetilde{f \circ (w'_y \, {w_y}^{-1})}$ von $f \circ (w'_y \, {w_y}^{-1})$ ein *geschlossener* Weg in E mit Anfangs- und Endpunkt e_0 .

Mit dem Hilfssatz können wir den gewünschten Vergleich auf die folgende Weise bewerkstelligen. Die Komposition mit der Abbildung f ist verträglich mit dem Zusammensetzen von Wegen, also

$$(\; f \circ v_y \; = \;) \quad f \circ (w'_y \, w_y^{-1} \, w_y) \quad = \quad (f \circ (w'_y \, w_y^{-1})\,) \; (f \circ w_y) \; .$$

Die Liftung von $f \circ (w'_y \, w_y^{-1} \, w_y)$ zum vorgegebenen Anfangspunkt e_0 kann daher in zwei Schritten konstruiert werden:

— *zu dem Anfangspunkt* e_0 *wird zunächst der erste Teilweg* $f \circ (w'_y\, w_y^{-1})$ *geliftet,*
— *mit dem dabei resultierenden Endpunkt als neuem Anfangspunkt wird danach der zweite Teilweg* $f \circ w_y$ *geliftet.*

Nach dem Hilfssatz ist nun aber der neue Anfangspunkt derselbe wie der alte: die zweite Liftung ist ebenfalls zum Anfangspunkt e_0 vorzunehmen. Es folgt, daß die Liftung des zweiten Teilweges in Wirklichkeit eine Reinkarnation der ursprünglichen Liftung des Weges $f \circ w_y$ ist; sie hat insbesondere deshalb auch denselben Endpunkt.

Beweis des Hilfssatzes. Der Weg $w'_y\, w_y^{-1}$ ist Schleife in Y zum Basispunkt y_0 und repräsentiert ein Element $[\, w'_y\, w_y^{-1}\,]$ in $\pi_1(Y, y_0)$. Die Schleife $f \circ (w'_y\, w_y^{-1})$ repräsentiert das Bildelement

$$f_*[\, w'_y\, w_y^{-1}\,] \ \in \ f_*(\,\pi_1(Y, y_0)\,)\ .$$

Nach der Voraussetzung des Hilfssatzes ist dieses Element nun auch enthalten in der Bildgruppe $p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$. Das bedeutet, daß eine Schleife $\widetilde{u}$ in E zum Basispunkt e_0 existiert mit

$$[\, f \circ (w'_y\ w_y^{-1})\,] \ = \ [\, p \circ \widetilde{u}\,]\ ;$$

was wiederum bedeutet, daß $f \circ (w'_y\, w_y^{-1})$ homotop ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zu $p \circ \widetilde{u}$. Wir wählen irgendeine solche Homotopie von $f \circ (w'_y\, w_y^{-1})$ zu $p \circ \widetilde{u}$. Nach dem Homotopie–Liftungs–Satz hat diese Homotopie eine Liftung zu einer Homotopie von Wegen in E , wobei die Homotopie auf dem Anfangspunkt konstant ist. Zusätzlich war aber die Homotopie in X auch auf dem Endpunkt konstant, und der Homotopie–Liftungs–Satz sagt, daß in dieser Situation auch die geliftete Homotopie auf dem Endpunkt konstant ist. Es folgt insbesondere, daß die Liftung von $f \circ (w'_y\, w_y^{-1})$ denselben Endpunkt hat wie diejenige von $p \circ \widetilde{u}$. Die Liftung von $p \circ \widetilde{u}$ ist aber $\widetilde{u}$, und dessen Endpunkt ist e_0 . Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Wir kommen nun zum Nachweis dessen, daß die (geliftete) Abbildung $\widetilde{f}$ eine *stetige* Abbildung ist; es ist dieser Teil des Arguments, bei dem die ominöse Voraussetzung über den lokalen Wegzusammenhang benötigt wird. Wir werden die Stetigkeit in der folgenden Form nachweisen. Wir zeigen: *Zu jedem Punkt* $y \in Y$ *und zu jeder Umgebung* V *des Bildpunktes* $\widetilde{f}(y)$ *existiert eine Umgebung* W *von* y *mit* $\widetilde{f}(W) \subset V$.

Sei U eine Elementarumgebung des Punktes $x = f(y)$ in X , so daß also eine topologische Äquivalenz (über U) besteht,

$$p^{-1}(U) \xrightarrow{\ u\ } U \times p^{-1}(x)\ .$$

Sei V' definiert als der Durchschnitt

$$V' \ := \ V \ \cap \ u^{-1}(U \times \widetilde{f}(y))\ .$$

Dann ist V' Umgebung von $\widetilde{f}(y)$, die eingeschränkte Abbildung $p|_{V'} :\ V' \to p(V')$ ist eine topologische Äquivalenz, und $p(V')$ ist Umgebung von $f(y) \ = \ p(\,\widetilde{f}(y)\,)$.

Wegen der Stetigkeit von f ist das Urbild $f^{-1}(\,p(V')\,)$ eine Umgebung von y in Y . Wir nutzen nun die Voraussetzung des lokalen Wegzusammenhangs aus. Es folgt, daß die Umgebung $f^{-1}(\,p(V')\,)$ noch eine *wegzusammenhängende* Umgebung W von y enthält. Mit der folgenden Behauptung wird schließlich alles bewiesen sein:

BEHAUPTUNG. *Das Bild* $\widetilde{f}(W)$ *ist enthalten in* V' (und damit auch in V).

BEWEIS DER BEHAUPTUNG. Sei $y' \in W$. Dann können wir y' durch einen *ganz in* W *verlaufenden Weg* w mit y verbinden. Sei w_y irgendein Weg von y_0 zu y . Nach dem vorher bewiesenen Teil (daß nämlich die Definition von $\widetilde{f}(y')$ nicht abhängt von der Wahl des Weges von y_0 zu y'), können wir ebenso gut nun auch das folgende Rezept als die Definition von $\widetilde{f}(y')$ nehmen:

Zuerst liften wir den Teilweg $f \circ w_y$ zum Anfangspunkt $e_0 = \widetilde{f}(y_0)$; der geliftete Teilweg wird den Endpunkt $\widetilde{f}(y)$ haben. Danach liften wir den Teilweg $f \circ w$ zum Anfangspunkt $\widetilde{f}(y)$. Der Endpunkt der Liftung des zusammengesetzten Weges, *und damit auch der Endpunkt der Liftung des zweiten Teilweges*, wird dann der Punkt $\widetilde{f}(y')$ sein.

Nach Konstruktion nun ist der Weg $f \circ w$ ganz enthalten in der Umgebung $p(V')$ von $f(y)$. Die eingeschränkte Abbildung $p|_{V'} :\ V' \to p(V')$ ist eine topologische Äquivalenz, und die Liftung von $f \circ w$ hat ihren Anfangspunkt in V' . Nach der Eindeutigkeit der Wegeliftung zu gegebenem Anfangspunkt folgt, daß *die Liftung des zweiten Teilwegs ganz enthalten ist in* V' , insbesondere ist deshalb der Endpunkt $\widetilde{f}(y')$ ebenfalls in V' enthalten. Der Beweis ist fertig. □

Wir kommen nun zu Anwendungen des Liftungs–Satzes.

Eine erste, hier etwas ferner liegende, Anwendung hat Beispiel–Charakter; sie gibt eine "zu–Fuß–Formulierung" der Tatsache, daß die sogenannten *höheren Homotopiegruppen* der 1-Sphäre sämtlich trivial sind.

SATZ. *Sei* $n \geq 2$. *Sei eine Abbildung* $f :\ (S^n, s_0) \to (S^1, x_0)$ *gegeben* (eine Abbildung der n-Sphäre in die 1-Sphäre, die den Basispunkt s_0 in den Basispunkt x_0 abbildet). *Es gibt eine Homotopie, relativ zum Basispunkt, von dieser Abbildung zu der trivialen Abbildung* (triviale Abbildung in den Basispunkt).

BEWEIS. Wir wollen den Liftungs–Satz anwenden auf die Überlagerung von S^1 , die durch $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ gegeben ist. Wir wählen irgendeinen Punkt $e_0 \in (\exp)^{-1}(x_0)$ als Basispunkt. Wir wollen eine Liftung von f zu $\widetilde{f} : S^n \to \mathbb{R}$ angeben, mit $\widetilde{f}(s_0) = e_0$. Sobald wir das geschafft haben, sind wir schon fertig. Denn für Abbildungen nach $\mathbb{R}$ haben wir *lineare Homotopien* zur Verfügung; in unserem Fall die Homotopie von $\widetilde{f}$ zur trivialen Abbildung nach e_0 ,

$$F :\ S^n \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad F(s,t) \ = \ (1{-}t)\,\widetilde{f}(s) + t\,e_0\ .$$

Die zusammengesetzte Abbildung $\exp\circ F:\ S^n\times[0,1]\to S^1$ ist dann die Homotopie, deren Existenz der Satz behauptet.

Um den Liftungs–Satz in der genannten Weise anzuwenden, müssen wir einige Dinge nachprüfen. Zunächst müssen wir wissen, daß der Raum S^n lokal wegweise zusammenhängend ist; das ist aber klar (oder?). Zum andern müssen wir wissen, daß die Bildgruppe $f_*(\pi_1(S^n,s_0))$ enthalten ist in einer gewissen andern Gruppe (nämlich in der Bildgruppe $\exp_*(\pi_1(\mathbb{R}))$. Nun wissen wir aber schon, daß die Fundamentalgruppe $\pi_1(S^n,s_0)$ die *triviale Gruppe* ist. Deshalb ist auch die Bildgruppe $f_*(\pi_1(S^n,s_0))$ die triviale Gruppe — und die ist schließlich in *jeder* Gruppe enthalten. □

Unsere nächste Anwendung liefert die erstaunliche Aussage, daß bei "vernünftigen" Räumen die Überlagerungen vollkommen charakterisiert werden können durch algebraische Daten.

Dazu notieren wir zunächst, daß der von einer Überlagerungsprojektion induzierte Homomorphismus der Fundamentalgruppe immer *injektiv* ist.

SATZ. *Sei $p: E\to X$ eine Überlagerung. Sei $x_0\in X$ und sei $e_0\in p^{-1}(x_0)$. Die Abbildung $p_*:\ \pi_1(E,e_0)\longrightarrow\pi_1(X,x_0)$ ist injektiv.*

BEWEIS. Sei v eine Schleife in E. Wenn das von v repräsentierte Element von $\pi_1(E,e_0)$ im Kern der Abbildung p_* liegt, so bedeutet dies, daß die Schleife $p\circ v$ das triviale Element in $\pi_1(X,x_0)$ repräsentiert; d.h., daß die Schleife $p\circ v$ homotop ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zur trivialen Schleife. Sei F eine Homotopie, die das leistet. Auf diese Homotopie können wir den Homotopie–Liftungs–Satz anwenden. Der Punkt ist nun (Inspektion der Formulierung des Satzes!), daß die geliftete Homotopie ebenfalls relativ ist zu Anfangs- und Endpunkt, und zwar ist sie eine Homotopie von der Schleife v zu der trivialen Schleife am Basispunkt e_0 von E. Daher ist v ein Repräsentant des trivialen Elements in $\pi_1(E,e_0)$. □

Unser erster Klassifikations–Satz nun sagt, daß die so resultierende Untergruppe (die Bildgruppe) *die Überlagerung schon vollkommen charakterisiert*; zumindest, wenn es sich um "vernünftige" Räume handelt, die zudem noch als (weg–)zusammenhängend vorausgesetzt werden.

SATZ. *Sei X ein Raum, der zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist; sei $x_0\in X$ ein Basispunkt. Seien $p_1: E_1\to X$ und $p_2: E_2\to X$ Überlagerungen, wobei E_1 und E_2 als zusammenhängend vorausgesetzt sind. Seien e_1 und e_2 über x_0 liegende Basispunkte in E_1 bzw. E_2. Wenn $p_{1*}(\pi_1(E_1,e_1)) = p_{2*}(\pi_1(E_2,e_2))$ (Gleichheit von Untergruppen von $\pi_1(X,x_0)$), dann gibt es eine topologische Äquivalenz (über X)*

$$E_1 \xrightarrow{\approx} E_2 .$$

Die topologische Äquivalenz kann so gewählt werden, daß e_1 auf e_2 abgebildet wird; sie ist dann eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir wollen die Abbildung $p_1 : E_1 \to X$ zu einer Abbildung

$$f_1 : E_1 \longrightarrow E_2 , \quad f_1(e_1) = e_2 ,$$

liften. Der Liftungs–Satz sagt, daß dies unter gewissen Bedingungen möglich ist; der Satz sagt auch, daß eine solche Liftung eindeutig ist, falls sie existiert. Die Bedingungen für die Existenz der Liftung sind:

— der Raum E_1 soll zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend sein; das ist aber klar: E_1 ist zusammenhängend nach Voraussetzung, und E_1 ist Überlagerung des lokal wegzusammenhängenden Raumes X , daher ebenfalls lokal wegzusammenhängend (nach einem früheren Satz),

— es soll eine Inklusion von Untergruppen $p_{1*}(\pi_1(E_1, e_1)) \subset p_{2*}(\pi_1(E_2, e_2))$ bestehen; das ist aber auch klar: diese Untergruppen sind sogar *gleich* (nach Voraussetzung).

Der Liftungs–Satz ist also anwendbar: f_1 existiert. Aus ähnlichen Gründen existiert auch eine Abbildung

$$f_2 : E_2 \longrightarrow E_1 , \quad f_2(e_2) = e_1 .$$

Wir behaupten jetzt, daß die Abbildungen f_1 und f_2 zueinander *invers* sind. Auch das ist, wie sich herausstellt, eine unmittelbare Anwendung des Liftungs–Satzes. Das Argument ist allerdings verblüffend: Die zusammengesetzte Abbildung $f_2 \circ f_1$,

$$E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} E_1 ,$$

kann aufgefaßt werden als eine Liftung der Abbildung $p_1 : E_1 \to X$ zu einer Abbildung $E_1 \to E_1$, die e_1 auf e_1 abbildet. Es gibt noch eine andere solche Liftung, nämlich die identische Abbildung auf E_1 . *Es kann aber nur eine geben* (nach der Eindeutigkeitsklausel beim Liftungs–Satz). Also ist

$$f_2 \circ f_1 = \mathrm{id}|_{E_1} .$$

Ähnlich ist auch $f_1 \circ f_2 = \mathrm{id}|_{E_2}$. □

Beispiel. Wir betrachten die Überlagerung der $1-$Sphäre auf sich, die gegeben ist durch "*$k-$faches Aufwickeln*", $k \geq 1$; m.a.W., wenn $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$, dann die Abbildung

$$p_k : S^1 \longrightarrow S^1 , \quad z \longmapsto z^k .$$

Bezeichne $w : ([0,1], \{0,1\}) \to (S^1, 1)$ den Repräsentanten eines Elements von $\pi_1(S^1, 1)$; wie wir wissen, ist jedes Element von $\pi_1(S^1, 1)$ repräsentierbar in der Form $w(s) = \exp(l \cdot s)$. Es folgt, daß die Bildgruppe $p_{k*}(\pi_1(S^1, 1))$ die Untergruppe derjenigen Elemente ist, die einen Repräsentanten der Art

$$w(s) = \exp(l \cdot k \cdot s)$$

haben. Unter dem Isomorphismus $\pi_1(S^1, 1) \approx \mathbb{Z}$ entspricht diese Untergruppe der additiven Gruppe derjenigen ganzen Zahlen, die Vielfache von k sind. Nach dem Satz nun ist die Überlagerung (bis auf Isomorphie) durch diese zugeordnete Untergruppe schon charakterisiert. □

Konstruktion von Überlagerungen

Zunächst einige Vokabeln. Ein Raum Y heißt *einfach–zusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Sind y_1 und y_2 Punkte in Y, so gibt es einen Weg, der y_1 und y_2 verbindet, und dieser Weg ist *eindeutig bis auf Homotopie* (Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt).

Das läßt sich auch anders formulieren. Nämlich, wenn Y einfach–zusammenhängend ist, dann ist es wegzusammenhängend und hat triviale Fundamentalgruppe (für jeden Basispunkt; das ist der Spezialfall der Definition wo $y_1 = y_2$). Umgekehrt, wenn Y wegzusammenhängend ist und $\pi_1(Y, y_0) = 0$ für irgendeinen Basispunkt y_0 in Y, dann ist, wie wir wissen, auch $\pi_1(Y, y_1) = 0$ für jeden anderen Basispunkt in Y (wenn Y wegzusammenhängend ist, so sind die Fundamentalgruppen für alle Basispunkte zueinander isomorph). Speziell gilt das für den gemeinsamen Anfangspunkt von v und w. Der geschlossene Weg $v\,w^{-1}$ (erst v durchlaufen, dann w rückwärts) ist also nullhomotop. Es folgt, daß der Weg $v\,w^{-1}\,w$ homotop ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zu w. Andererseits ist er aber auch zu v homotop. Y ist also einfach–zusammenhängend im obigen Sinne.

Definition. Eine Überlagerung $p: E \to X$ heißt *universelle Überlagerung* von X, wenn der Raum E einfach–zusammenhängend ist.

Die Wortwahl “universell” für diesen Sachverhalt ist nicht so weit hergeholt, wie das hier scheinen mag. Dies wird später deutlich werden.

Wie wir gesehen haben, sind, bei einem “vernünftigen” Raum, die Überlagerungen charakterisierbar durch (gewisse) Untergruppen der Fundamentalgruppe. Unser gegenwärtiges Ziel ist es, zu zeigen, daß umgekehrt auch *alle* Untergruppen auf diese Weise vorkommen; mit anderen Worten, daß jede Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ vorkommt als $p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$, das Bild der Fundamentalgruppe eines geeigneten Überlagerungsraumes E von X. Um das zu zeigen, benötigen wir eine weitere Eigenschaft, die “vernünftige” Räume haben.

Definition. Ein Raum X heißt *semi–lokal einfach–zusammenhängend*, wenn er lokal wegzusammenhängend ist und wenn darüberhinaus gilt: *Für jeden Punkt $x \in X$ existiert eine wegzusammenhängende Umgebung U von x, so daß die Abbildung der Fundamentalgruppen am Basispunkt x,*

$$\pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x) \;,$$

die triviale Abbildung ist. Eine Umgebung U, die diese Eigenschaft hat, wird auch als eine *Spezialumgebung* von x bezeichnen.

Das Bestehen dieser Eigenschaft ist in der Tat eine *notwendige* Bedingung, wie die folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung. *Sei X ein lokal–wegzusammenhängender Raum. Wenn eine universelle Überlagerung von X existiert, dann ist X semi–lokal einfach–zusammenhängend.*

Denn sei $x \in X$. Sei U eine Elementarumgebung von x . Es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß U wegzusammenhängend ist (denn, da X nach Voraussetzung lokal wegzusammenhängend ist, könnten wir notfalls U ersetzen durch eine kleinere wegzusammenhängende Umgebung; die wäre automatisch ebenfalls eine Elementarumgebung). Sei nun V eine Wegzusammenhangskomponente von $p^{-1}(U)$. Unter der topologischen Äquivalenz von $p^{-1}(U)$ zu $U \times p^{-1}(x)$ (Definition von Elementarumgebung) entspricht V einem Unterraum der Art $U \times \{y\}$, wo $y \in p^{-1}(x)$; insbesondere ist die durch Einschränkung von p gegebene Abbildung $q : V \to U$ eine topologische Äquivalenz. Wir haben nun das folgende kommutative Diagramm von Fundamentalgruppen

$$\begin{tikzcd} \pi_1(V,y) \arrow[r] \arrow[d, "q_*"] & \pi_1(E,y) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(U,x) \arrow[r] & \pi_1(X,x) \end{tikzcd}$$

In diesem Diagramm ist die zusammengesetzte Abbildung $\pi_1(V,y) \to \pi_1(X,x)$ die triviale Abbildung (weil sie über die Gruppe $\pi_1(E,y)$ faktorisiert, die ja nach Voraussetzung trivial ist). Andererseits ist die Abbildung q_* ein Isomorphismus (sie ist ja induziert von der Abbildung q , die eine topologische Äquivalenz ist). Es folgt, daß $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ die triviale Abbildung ist. $\square$

Der zu beweisende Satz wird sagen, daß die beschriebene notwendige Bedingung tatsächlich auch *hinreichend* ist. Bevor wir dazu kommen, machen wir noch eine Notiz über Spezialumgebungen.

Bemerkung. *Sei U Spezialumgebung von x . Wenn $x' \in U$ dann ist auch*

$$\pi_1(U,x') \longrightarrow \pi_1(X,x') \ ,$$

die triviale Abbildung. Wenn w und w' Wege in U sind mit demselben Anfangspunkt und demselben Endpunkt, dann sind w und w' , als Wege in X betrachtet, homotop relativ zu Anfangs- und Endpunkt.

Denn zunächst, wenn v ein Weg in U von x zu x' ist, so induziert v einen Isomorphismus v_* der Fundamentalgruppen. Dies ist sowohl in U als auch in X richtig, und zwar in kompatibler Weise. Mit anderen Worten, es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U,x) \arrow[r, "v_*"] \arrow[d] & \pi_1(U,x') \arrow[d] \\ \pi_1(X,x) \arrow[r, "v_*"] & \pi_1(X,x') \end{tikzcd}$$

in dem die horizontalen Abbildungen Isomorphismen sind. Es folgt: wenn der linke vertikale Pfeil die triviale Abbildung ist, dann auch der rechte.

Zu den Wegen w und w' nun bezeichne x' den gemeinsamen Anfangspunkt dieser beiden Wege. Es ist dann der zusammengesetzte Weg $w'\,w^{-1}$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt x' . Der Weg repräsentiert das triviale Element in $\pi_1(X,x')$, ist also homotop in X , relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zum trivialen Weg. Es folgt, daß der zusammengesetzte Weg $w'\,w^{-1}\,w$ homotop in X ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zu dem Weg w . Andererseits ist er auch homotop (sogar in U) zu dem Weg w' . $\square$

Die Existenz von Überlagerungen werden wir zuerst in dem speziellen Fall einer universellen Überlagerung diskutieren, den allgemeinen Fall werden wir danach dann daraus ableiten.

Satz. *Der Raum X sei zusammenhängend und semi–lokal einfach–zusammenhängend. Es existiert eine universelle Überlagerung von X .*

Beweis. Die Behauptung ist, daß eine Überlagerung $p:\ E \to X$ existiert, wo eben der Raum E einfach–zusammenhängend ist. Der Beweis dieser Behauptung geht über eine zwar abstrakte, aber sehr direkte Konstruktion für die Existenz. Um diese Konstruktion zu verstehen, gehen wir zunächst den umgekehrten Weg. Wir setzen nämlich voraus, daß wir $p:\ E \to X$ schon hätten. Mit einigen kleinen Tricks werden wir die Daten von E übersetzen *in Dinge, die nur mit dem Raum X zu tun haben.* Mit ein wenig Glück werden wir anschließend in der Lage sein, diese Übersetzung rückwärts zu lesen, und das wird dann die Konstruktion sein.

Die Übersetzung geht über *Wege–Liftung.* Die Wege–Liftung funktioniert gut für Wege, die an einem Ende fixiert sind, am andern Ende aber nicht. Wir werden also solche Wege nun systematisch betrachten. Dazu wählen wir in X einen Basispunkt x_0 und in E einen Basispunkt e_0 über x_0 .

Es soll ein *basierter Weg* in E nun einen Weg bezeichnen, dessen Anfangspunkt der gewählte Basispunkt e_0 in E ist. Die Menge der basierten Wege in E wird mit BE bezeichnet.

Ähnlich soll ein *basierter Weg* in X ein Weg sein, dessen Anfangspunkt der gewählte Basispunkt x_0 in X ist. Die Menge der basierten Wege in X wird mit BX bezeichnet.

Mit der Abbildung $p:\ E \to X$ bekommt man aus jedem Weg in E einen Weg in X . Da der (Anfangs–) Punkt e_0 über dem Punkt x_0 liegt, bekommt man speziell so auch eine Abbildung $BE \to BX$. Andererseits sagt der Wege–Liftungs–Satz, daß ein Weg in X mit Anfangspunkt x_0 eine eindeutige Liftung hat zu einem Weg in E mit Anfangspunkt e_0 . Folglich,

- *Die Abbildung $BE \to BX$ ist bijektiv.*

Als nächstes führen wir auf diesen Mengen von Wegen eine Äquivalenzrelation ein, nämlich die *Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt.* Die Menge der Äquivalenzklassen in BE wird mit $\widetilde{E}$ bezeichnet. Ein Element aus $\widetilde{E}$ läßt sich so beschreiben: es besteht aus einem Punkt e in E (dem Endpunkt) zusammen mit einer Homotopieklasse von Wegen von e_0 zu e .

Ähnlich bezeichnet $\widetilde{X}$ die Menge der Äquivalenzklassen in BX ; ein Element aus $\widetilde{X}$ besteht aus einem Punkt x in X zusammen mit einer Homotopieklasse von Wegen von x_0 zu x .

Die obige Abbildung, die einem Weg v in E den projizierten Weg $p \circ v$ zuordnet, ist mit Homotopie verträglich, induziert also eine Abbildung $\widetilde{E} \to \widetilde{X}$. Andererseits ist auch die Wege–Liftung mit Homotopie verträglich; das sagt der Homotopie–Liftungs–Satz. Folglich,

- *Die Abbildung* $\widetilde{E} \to \widetilde{X}$ *ist bijektiv.*

Die Tatsache, daß man einem Weg seinen Endpunkt zuordnen kann, kann man interpretieren als eine Abbildung $BE \to E$; und auch als eine Abbildung $\widetilde{E} \to E$. Nun ist nach Voraussetzung der Raum E aber einfach–zusammenhängend: zu je zwei Punkten in E gibt es einen und, bis auf Homotopie, auch nur einen Weg, der sie verbindet. Folglich,

- *Die Abbildung* $\widetilde{E} \to E$ *ist bijektiv.*

Mit den letzten beiden Bijektionen haben wir es nunmehr geschafft, für die unterliegende Menge des Raumes E eine Übersetzung zu finden in etwas, das vollständig mit Hilfe von X beschrieben werden kann und tatsächlich auch so beschrieben worden ist, nämlich $\widetilde{X}$.

Der nächste Schritt wird sein, in diese Übersetzung auch die topologische Struktur mit einzubauen. Von jetzt ab werden wir die Voraussetzung benötigen, daß der Raum X semi–lokal einfach–zusammenhängend ist.

Wegen dieser Voraussetzung hat jeder Punkt x in X eine *Spezialumgebung* U ; was nach Definition ja bedeutet, daß U eine weg–zusammenhängende Umgebung von x ist, die die Bedingung erfüllt, daß der (von der Inklusion induzierte) Homomorphismus $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ die triviale Abbildung ist. Es folgt hieraus noch ein wenig mehr: wenn U' eine vorgegebene Umgebung von x ist, so existiert innerhalb der Umgebung $U \cap U'$ noch eine wegzusammenhängende Umgebung U'' von x (wegen der ebenfalls gemachten Voraussetzung, daß X lokal wegzusammenhängend ist); die Umgebung U'' erfüllt nun automatisch auch die Bedingung über die Fundamentalgruppe (denn die Abbildung $\pi_1(U'',x) \to \pi_1(X,x)$ faktorisiert über die (triviale) Abbildung $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$, sie ist daher selbst trivial). Wir haben also innerhalb der vorgegebenen Umgebung U' noch eine Spezialumgebung, nämlich U'' , gefunden. Das kann man auch so ausdrücken: eine Teilmenge von X ist eine Umgebung von x genau dann, wenn sie eine Spezialumgebung enthält; oder, wie man für diesen Sachverhalt auch sagt,

- *Die Spezialumgebungen bilden eine Umgebungsbasis von* x *.*

Es sei nun y ein Punkt in E , der über x liegt. Sei U' eine wegzusammenhängende Elementarumgebung von x , und sei V' die (Weg–)Zusammenhangskomponente des Urbilds $p^{-1}(U')$, die den Punkt y enthält. Dann ist V' Umgebung von y , und die (von der Überlagerungsprojektion induzierte) Abbildung $V' \to U'$ ist eine topologische Äquivalenz. Die in U' enthaltenen Spezialumgebungen bilden eine Umgebungsbasis von x . Unter der genannten topologischen Äquivalenz entsprechen ihnen Teilmengen von V' , die wir als *geliftete Spezialumgebungen* bezeichnen wollen. Es resultiert,

- *Die gelifteten Spezialumgebungen bilden eine Umgebungsbasis von y in E .*

Sei insbesondere nun U'' eine Spezialumgebung, die in U' enthalten ist. Sei V'' die entsprechende geliftete Spezialumgebung in V' . Unter der bijektiven Abbildung von E zu $\widetilde{X}$ entspricht dem V'' dann eine Teilmenge von $\widetilde{X}$. Es ist nun sehr wichtig, daß wir in der Lage sein werden, diese Teilmenge von $\widetilde{X}$ auch *direkt* zu beschreiben (ohne uns auf E zu beziehen).

Es sei dazu v ein Weg vom Basispunkt e_0 zu dem Punkt y (bis auf Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt gibt es genau einen solchen Weg). Wenn y' ein anderer Punkt in V'' ist, so können wir e_0 mit y' verbinden durch einen Weg v' der folgenden Art: zunächst verbinden wir e_0 mit y durch den gerade genannten Weg v , dann setzen wir diesen zusammen mit einem Weg von y zu y' , der ganz in V'' verläuft. Bezeichne nun w den projizierten Weg $w = p \circ v$, und $w' = p \circ v'$. Der Weg w' kann auch beschrieben werden als zusammengesetzter Weg: zunächst wird der Basispunkt x_0 verbunden mit dem Punkt y durch den genannten Weg w , dieser Weg wird dann zusammengesetzt mit einem ganz in U'' verlaufenden Weg von x zu x' . *Umgekehrt ist durch diese Beschreibung der Weg w'* (bis auf Homotopie) *schon eindeutig festgelegt* (denn je zwei in der Spezialumgebung U'' verlaufende Wege von x zu x' sind als Wege in X homotop relativ zu Anfangs- und Endpunkt). Es folgt,

- *Das Bild von V'' in $\widetilde{X}$ ist die Spezialmenge* $M(\,x, [w], U''\,)$ (im folgenden Sinne:)

Definition. Sei $(\,x, [w]\,) \in \widetilde{X}$; also $x \in X$, und $[w]$ eine Homotopieklasse (relativ zu Anfangs- und Endpunkt) von Wegen mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x . Sei U eine Spezialumgebung von x . *Die zu $(\,x, [w]\,)$ und U gehörende Spezialmenge* $M(x, [w], U)$ ist definiert als die Menge der Paare $(\,x', [w']\,)$, wo $x' \in U$ und wo die Homotopieklasse $[w']$ repräsentierbar ist durch einen Weg w' der folgenden Art: w' ist zusammengesetzt aus zwei Wegen; zunächst ist der Basispunkt x_0 mit dem Punkt x verbunden durch den Weg w , der Punkt x ist dann weiter mit dem Punkt x' verbunden durch einen Weg, der ganz innerhalb von U verläuft.

Wir *definieren* nun eine topologische Struktur auf $\widetilde{X}$ durch die folgende Vorschrift.

Definition. *Eine Umgebungsbasis am Punkt $(\,x, [w]\,)$ ist gegeben durch die Spezialmengen*

$$M(\,x, [w], U\,) \ ,$$

wo U die Spezialumgebungen von x durchläuft.

Die Definition verpflichtet uns, folgendes nachzuprüfen: *zu je zwei Mengen der genannten Art enthält ihr Durchschnitt noch eine weitere* — das ist aber klar auf Grund der Tatsache, daß die Spezialumgebungen eine Umgebungsbasis von x in X bilden.

Die gegebene Übersetzung zeigt einerseits, daß der Raum $\widetilde{X}$ topologisch äquivalent zu dem Raum E ist, wenn wir annehmen, daß eine universelle Überlagerung $p: \ E \to X$

existiert. *Andererseits ist aber die Hypothese der Existenz von* E *ganz und gar unnötig für die Beschreibung von* $\widetilde{X}$ *; die gegebene Beschreibung können (und wollen) wir daher als die Konstruktion eines gewissen Raumes* $\widetilde{X}$ *ansehen.* Auf Grund der Herleitung vermuten wir, daß wir eine Abbildung $q : \widetilde{X} \to X$ angeben können; daß wir zeigen können, die Abbildung q ist eine Überlagerungsprojektion; und daß wir schließlich auch noch zeigen können, der Raum $\widetilde{X}$ ist einfach–zusammenhängend. *Diese Vermutungen wollen wir jetzt beweisen.*

Die gewünschte Abbildung $q : \widetilde{X} \to X$ ist sehr leicht zu beschreiben: sie ist gegeben durch $(\, x, [w]\,) \mapsto x$.

Um zu zeigen, daß die Abbildung q eine Überlagerungsprojektion ist, notieren wir zunächst, daß jede Spezialumgebung U von $x \in X$ noch eine Spezialumgebung U' von x enthält, die eine *offene Menge* in X ist. Denn sei U' definiert als diejenige Wegzusammenhangskomponente von U^0 , dem offenen Kern von U , die den Punkt x enthält. Dann ist U' eine offene Menge in X (wegen der Voraussetzung, daß X , und damit auch U^0 , lokal–wegzusammenhängend ist), wegzusammenhängend ist U' nach Definition, und schließlich erfüllt es auch die Fundamentalgruppenbedingung, da es in der Spezialumgebung U enthalten ist.

Es sei nun x ein Punkt in X . Sei U eine Spezialumgebung von x . Nach dem gerade Gesagten dürfen wir annehmen, daß U eine *offene Menge* in X ist. Wir werden zeigen, daß U eine Elementarumgebung von x für die Abbildung q ist.

Das Urbild $q^{-1}(U)$ ist, nach Definition, die Menge der Paare $(\, x', [w']\,)$ wo $x' \in U$ und wo $[w']$ eine Homotopieklasse ist (relativ Anfangs- und Endpunkt) von Wegen vom Basispunkt x_0 zum Punkt x' . Es gilt, wie wir wissen, folgendes (da U Spezialumgebung ist): wenn man zwei Punkte in U durch einen ganz in U verlaufenden Weg verbindet, so ist dieser als Weg in X eindeutig bis auf Homotopie relativ zu Anfangs- und Endpunkt. Durch Zusammensetzen mit einem solchen Weg können wir dem w' nun einen Weg w von x_0 zu x zuordnen; die Homotopieklasse $[w]$ ist dann eindeutig bestimmt durch die Homotopieklasse $[w']$, und umgekehrt ist auch die Homotopieklasse $[w']$ eindeutig bestimmt durch die Homotopieklasse $[w]$. Dies zeigt, daß die Menge $q^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung ist

$$q^{-1}(U) \quad = \quad \dot{\bigcup}_{(x,[w]) \,\in\, q^{-1}(x)} \; V_{[w]}$$

wo $V_{[w]}$ die Menge derjenigen $(\, x', [w']\,)$ bezeichnet, wo $[w']$ und $[w]$ in der beschriebenen Beziehung zueinander stehen.

Nun war U eine *offene* Menge in X . Das bedeutet, daß die Menge $V_{[w]}$ im Sinne der obigen Terminologie eine “Spezialmenge” für jeden ihrer Punkte ist. Nach Definition der Topologie von $\widetilde{X}$ heißt dies, daß $V_{[w]}$ eine *Umgebung* von jedem seiner Punkte ist; $V_{[w]}$ ist also *offen* in $\widetilde{X}$. Es resultiert, daß $q^{-1}(U)$ auch als topologischer Raum die disjunkte Vereinigung der $V_{[w]}$ ist. Wir müssen also nur noch nachprüfen, daß die bijektive Abbildung $V_{[w]} \to U$ eine topologische Äquivalenz ist. Das ist aber auch klar:

Die Topologie von U bestimmt sich durch die in U enthaltenen Spezialumgebungen (U ist Umgebung von jedem seiner Punkte, und jeder Punkt in U hat eine Umgebungsbasis von in U enthaltenen Spezialumgebungen), die Topologie von $V_{[w]}$ bestimmt sich ebenfalls durch die in U enthaltenen Spezialumgebungen (diese Spezialumgebungen entsprechen ein–eindeutig den durch sie bestimmten Spezialmengen in $V_{[w]}$). Unter der Bijektion $V_{[w]} \to U$ gehen diese Umgebungsbasen ineinander über, die Bijektion ist also eine topologische Äquivalenz.

Schließlich ist der Raum $\widetilde{X}$ auch einfach–zusammenhängend. Das folgt aus den folgenden drei Dingen.

- Die Abbildung $\pi_1(\widetilde{X}, e_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv.
- Sei w geschlossener Weg. Wenn $[w] \neq 0$, dann gibt es eine Liftung von w zu einem Weg in $\widetilde{X}$ mit Anfangspunkt e_0 , der *nicht* ein geschlossener Weg ist.
- Es ist $[w] \in q_*(\pi_1(\widetilde{X}, e_0))$ genau dann, wenn w zu einem *geschlossenen* Weg liftet.

Das erste davon wissen wir schon (der von einer Überlagerungsprojektion induzierte Homomorphismus ist immer injektiv). Das zweite geht durch explizites Hinschreiben: Dem Weg $w : [0,1] \to X$ mit $w(0) = w(1) = x_0$ wird der folgende Weg in $\widetilde{X}$ zugeordnet,

$$t \longmapsto (w(t) , w_t) ,$$

wo w_t den Weg von x_0 zu $w(t)$ bezeichnet, der gegeben ist durch

$$s \longmapsto w_t(s) = w(s \cdot t) .$$

Der angegebene Weg in $\widetilde{X}$ ist nicht geschlossen. Denn sein Endpunkt ist der Punkt $(w(1) , w_1)$. Obwohl $w(1) = w(0)$, ist dieser Punkt nicht derselbe wie der Anfangspunkt $(w(0) , w_0)$, da ja, nach Voraussetzung, der Weg $w_1 = w$ *nicht* homotop ist (relativ zu Anfangs- und Endpunkt) zum trivialen Weg w_0 .

Was die dritte Aussage angeht, so ist die eine Richtung offensichtlich (wenn v geschlossene Liftung von w ist, so ist $q_*([v]) = [w]$) und die andere Richtung folgt aus dem Homotopie–Liftungs–Satz. Sei nämlich $[w] = q_*([v'])$. Dies heißt, daß eine Homotopie (relativ Anfangs- und Endpunkt) existiert von w zu $q \circ v'$. Die geliftete Homotopie wird dann ebenfalls relativ zu Anfangs- und Endpunkt sein. Der geliftete Weg zu $q \circ v'$ nun ist v' , welches ein *geschlossener* Weg ist. Es folgt, daß der geliftete Weg von w ebenfalls ein geschlossener Weg ist.

Alle Teile des Satzes sind nun bewiesen. □

Nun der allgemeine Fall:

SATZ (Existenz–Satz). *Der Raum X sei zusammenhängend und semi–lokal einfach–zusammenhängend, $x_0 \in X$. Sei $H \subset \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Es existiert eine Überlagerung $p : E \to X$ und $e_0 \in E$, so daß die Bildgruppe $p_*(\pi_1(E, e_0))$ die vorgegebene Untergruppe H ist.*

Beweis. Es sei zunächst angemerkt, daß man den allgemeinen Fall des Satzes auf recht einfache Weise aus dem schon behandelten speziellen Fall der universellen Überlagerung herleiten kann. Davon werden wir uns später überzeugen (man braucht allerdings für die Herleitung noch anderes, was aber ohnehin gemacht werden soll).

Hier soll eine andere Methode beschrieben werden. Dazu wird die gegebene Konstruktion der universellen Überlagerung in geeigneter Weise modifiziert.

Wir gehen wieder so vor, daß wir zunächst annehmen, wir hätten schon die Überlagerung $p: E \to X$. Wir übersetzen die Daten davon in Dinge, die allein durch X ausgedrückt werden können, und zum Schluß überzeugen wir uns wieder, daß die erhaltene Beschreibung schon die Konstruktion liefert.

Es sei an die Bezeichnungen BE , BX , $\widetilde{E}$, $\widetilde{X}$ erinnert. BE ist die Menge der Wege in E , deren Anfangspunkt der Basispunkt e_0 ist, und $\widetilde{E}$ ist die Menge der Homotopieklassen (relativ Anfangs- und Endpunkt) von solchen Wegen. Ähnlich bezeichnen BX und $\widetilde{X}$ die Menge der Wege in X mit Anfangspunkt x_0 , bzw. die Menge der Homotopieklassen davon.

Wie im vorigen Beweis, so ist es auch hier richtig (aus denselben Gründen), daß die Abbildungen $BE \to BX$ und $\widetilde{E} \to \widetilde{X}$ bijektiv sind.

Es ist aber *nicht* richtig, daß die Abbildung $\widetilde{E} \to E$ bijektiv ist (dies würde nur gelten, wenn E einfach–zusammenhängend wäre). Aus dem Grund brauchen wir eine weitere Konstruktion; sie besteht darin, daß wir auf BE eine noch gröbere Äquivalenzrelation einführen. Diese hat die folgende Beschreibung.

Ist v ein Weg in BE , so darf v auf zwei Weisen modifiziert werden:

— *Homotopie* (relativ Anfangs- und Endpunkt)

— *Vorschalten eines geschlossenen Weges* (Ersetzen von v durch den zusammengesetzten Weg $\overline{v}\,v$, wo $\overline{v}$ einen geschlossenen Weg mit Anfangs- und Endpunkt e_0 bezeichnet).

Die von v repräsentierte Äquivalenzklasse wird mit $[[v]]$ bezeichnet. Die Menge der Äquivalenzklassen soll $\widetilde{E}'$ heißen. $\widetilde{E}'$ kann alternativ aufgefaßt werden als eine Menge von Äquivalenzklassen in $\widetilde{E}$; eine Homotopieklasse $[v]$ darf nämlich ersetzt werden durch das Produkt $[\overline{v}]\,[v]$, wo $[\overline{v}]$ die Homotopieklasse eines geschlossenen Weges zum Basispunkt e_0 ist.

Ähnlich führen wir auch eine gröbere Äquivalenzrelation auf BX ein. Ist w ein Weg in BX , so darf w auf zwei Weisen modifiziert werden:

— *Homotopie* (relativ Anfangs- und Endpunkt)

— *Vorschalten spezieller geschlossener Wege*; nämlich w darf ersetzt werden durch einen zusammengesetzten Weg $\overline{w}\,w$, wo $\overline{w}$ einen geschlossenen Weg (mit Anfangs- und Endpunkt x_0) bezeichnet, *der ein Element aus der Untergruppe* $H = p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$ *repräsentiert.*

Die von w repräsentierte Äquivalenzklasse wird mit $[[w]]$ bezeichnet. Die Menge der Äquivalenzklassen soll $\widetilde{X}'$ heißen. $\widetilde{X}'$ kann alternativ aufgefaßt werden als eine Menge von Äquivalenzklassen in $\widetilde{X}$; nämlich eine Homotopieklasse $[w]$ darf ersetzt werden durch das Produkt $[\overline{w}]\,[w]$, *wo* $[\overline{w}]$ *aus der Untergruppe* $H = p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$ *ist.*

Die Äquivalenzrelation auf $\widetilde{E}$ ist verträglich mit der Abbildung $\widetilde{E} \to \widetilde{X}$; denn wenn $[v]$ ersetzt wird durch $[\overline{v}]\,[v]$, so bedeutet das ja, daß das Bild $[p \circ v]$ zu ersetzen ist durch das (äquivalente) Bild $[p \circ \overline{v}]\,[p \circ v]$. Es gibt also eine induzierte Abbildung $\widetilde{E}' \to \widetilde{X}'$. Umgekehrt ist das Liften von Wegen ebenfalls verträglich mit der Äquivalenzrelation; denn wenn $\overline{w}$ ein geschlossener Weg am Basispunkt x_0 ist, so ist, wie wir wissen (z.B. Schluß des vorigen Beweises) die Voraussetzung $[\overline{w}] \in p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$ ja gleichbedeutend dazu, daß die Liftung von $\overline{w}$ zum Anfangspunkt e_0 ebenfalls ein *geschlossener* Weg ist. Es resultiert:

- *Die Abbildung* $\widetilde{E}' \to \widetilde{X}'$ *ist bijektiv.*

Wenn nun v und v' Wege in E mit gemeinsamem Anfangspunkt e_0 und gemeinsamem Endpunkt y sind, so ist einerseits v' homotop, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zu dem zusammengesetzten Weg $v'\,v^{-1}\,v$, andererseits unterscheidet sich dieser von dem Weg w aber nur durch das Vorschalten des geschlossenen Weges $v'\,v^{-1}$. Das bedeutet, das die Wege–Daten in einem Element von $\widetilde{E}'$ in Wirklichkeit gar keine zusätzliche Information beinhalten; mit anderen Worten:

- *Die Abbildung* $\widetilde{E}' \to E$ *ist bijektiv.*

Die beiden Bijektionen ergeben eine Übersetzung von E in etwas, nämlich $\widetilde{X}'$, das allein durch den Raum X und die Gruppe H (die spezifizierte Untergruppe in der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$), beschrieben werden kann.

Auf $\widetilde{X}'$ definieren wir nun eine topologische Struktur durch die folgende Vorschrift. Die Vorschrift ist eine fast wörtliche Wiederholung derjenigen, die im vorigen Beweis gegeben wurde für die Beschreibung der Topologie des Raumes $\widetilde{E}$; der einzige Unterschied ist, daß (wie die Doppelklammer " [[w]] " andeutet) hier eine andere (gröbere) Äquivalenzrelation für Wege benutzt wird.

Definition. *Eine Umgebungsbasis am Punkt* $(\,x, [[w]]\,)$ *ist gegeben durch die Spezialmengen*

$$M(\,x, [[w]], U\,)\ ,$$

wo U *die Spezialumgebungen von* x *durchläuft.*

Es ist klar (oder?), daß die topologische Struktur auf $\widetilde{E}'$ ebenso gut auch hätte definiert werden können mit Hilfe der früher definierten Topologie von $\widetilde{E}$ als die *Quotientenraumtopologie bezüglich der Abbildung* $\widetilde{E} \to \widetilde{E}'$.

Schließlich zeigen wir, daß die Abbildung $q:\ \widetilde{E}' \to X\ ,\ \ (\,x, [[w]]\,) \mapsto x$, eine Überlagerungsprojektion ist. Die Details dazu sind ganz ähnlich zu denen im vorigen Beweis, deshalb sollen sie hier nur angedeutet werden. Wir prüfen wieder nach: wenn U eine offene Spezialumgebung von x ist, dann ist U auch eine Elementarumgebung für die

Abbildung q . Ähnlich wie im vorigen Beweis stellen wir hierzu fest, daß das Urbild $q^{-1}(U)$ eine disjunkte Vereinigung ist,

$$q^{-1}(U) \quad = \quad \dot{\bigcup}_{(x,[[w]])\,\in\, q^{-1}(x)} \; V_{[[w]]} \ ,$$

wo $V_{[[w]]}$ die Menge derjenigen $(x', [[w']])$ bezeichnet, wo $x' \in U$, und wo $[[w']]$ und $[[w]]$ in der Beziehung zueinander stehen, daß $[[w]]$ und $[[w']]$ Repräsentanten w und w' haben, so daß w' die Zusammensetzung von w mit einem ganz in U verlaufenden Weg ist. Wie im vorigen Beweis, so ist diese Vereinigung nun auch hier eine disjunkte Vereinigung offener Mengen; und jede von diesen wird per topologischer Äquivalenz auf U abgebildet. □

Als Nebenprodukt der vorstehenden Resultate haben wir den folgenden Satz.

Satz. *Der Raum X sei zusammenhängend und semi–lokal einfach–zusammenhängend. Sei $\{p_i : E_i \to X\}_{i \in I}$ eine Familie von Überlagerungen. Die disjunkte Vereinigung*

$$\dot{\bigcup}_{i \in I} \; p_i \ : \ \dot{\bigcup}_{i \in I} \; E_i \ \longrightarrow \ X$$

ist ebenfalls eine Überlagerung.

Beweis. Das ist *nicht* eine Trivialität. Das Problem ist dies. Die Behauptung des Satzes ist, daß für jedes $x \in X$ eine Elementarumgebung U existiert, die für die disjunkte Vereinigung der p_i funktioniert; oder, was dasselbe bedeutet, daß eine solche Elementarumgebung U existiert, die *für alle p_i gleichzeitig* funktioniert. Man muß also mehr oder weniger folgendes wissen: Zu dem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung, die tatsächlich *für jede Überlagerung von X als Elementarumgebung verwendbar ist.*

Die Klassifikation der Überlagerungen ergibt das. Nach dem Klassifikations–Satz ist jede zusammenhängende Überlagerung von X isomorph zu einer solchen, wie sie im vorstehenden Existenzsatz behandelt wurde. Im Beweis dort wurde gezeigt, daß eine offene Spezialumgebung immer auch als Elementarumgebung funktioniert; jedenfalls für die dort behandelten Überlagerungen, d.h., die zusammenhängenden. Es ist aber klar (oder?), daß das an dieser Stelle ausreicht. □

Bemerkung. Alternativ kann man den vorstehenden Satz auch über den allgemeinen Liftungs-Satz erhalten: die Aussage "Zu dem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung, die tatsächlich für jede Überlagerung von X als Elementarumgebung verwendbar ist" kann man nämlich auch dadurch rechtfertigen, daß man den allgemeinen Liftungs-Satz anwendet auf die Inklusions-Abbildung $U \to X$, wo U eine Spezialumgebung von x in X bezeichnet.

Überlagerungen und G–Mengen

Das Studium der Überlagerungen hat bisher folgendes Bild ergeben. Sei X ein "vernünftiger" Raum und $x_0 \in X$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ klassifiziert die zusammenhängenden Überlagerungen von X auf die folgende Weise: zu einer Überlagerung $p : E \to X$ gehört, sobald ein Punkt $e_0 \in p^{-1}(x_0)$ ausgewählt worden ist, eine Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$, nämlich die Bildgruppe $p_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$. Die Untergruppe charakterisiert das Paar (E, e_0) . Umgekehrt kommt auch jede Untergruppe her von einer geeigneten Überlagerung.

Das Ziel der nun folgenden Betrachtungen ist es, dieses Bild in einem wesentlichen Detail zu modifizieren. Es soll nämlich erreicht werden, daß auf die Auswahl des Punktes e_0 in $p^{-1}(x_0)$ verzichtet werden kann. Diese Modifikation ist notwendig, um die Gruppe der Automorphismen einer Überlagerung (die sogenannte *Decktransformationengruppe*) studieren zu können.

Das wesentliche Hilfsmittel wird das systematische Heranziehen einer einfachen Art von algebraischer Struktur sein, die, wie sich herausstellt, auf der Menge $p^{-1}(x_0)$ vorhanden ist. Die Menge $p^{-1}(x_0)$ ist nämlich eine sogenannte *G–Menge*, wo G die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnet. Es bedeutet dasselbe, zu sagen, daß die Gruppe G auf der Menge $p^{-1}(x_0)$ *operiert*. Bevor wir die Operation näher anschauen (sie kommt her von der Wege–Liftung), sollen zunächst die benötigten Begriffe und Resultate über G–Mengen zusammengestellt werden.

Definition. Sei G eine Gruppe. Eine (rechte) *G–Operation* auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$M \times G \longrightarrow M \ , \qquad (\,m\,,\,g\,) \longmapsto m \cdot g \ ,$$

(oder, was auf dasselbe hinausläuft, jedem Element g ist eine Abbildung $M \to M$, $m \mapsto m \cdot g$, zugeordnet); dabei sollen einige naheliegende Bedingungen erfüllt sein. Nämlich einmal soll das Einselement der Gruppe auch als die identische Abbildung operieren,

$$m \cdot 1 \ = \ m \ ,$$

und zweitens soll die Komposition der Abbildungen kompatibel sein mit der Komposition in der Gruppe,

$$m \cdot (g\,g') \ = \ (\,m \cdot g\,) \cdot g' \ .$$

Definition. Die Menge M zusammen mit der Operation der Gruppe G wird als eine (*rechte*) *G–Menge* bezeichnet.

Bemerkung. Es gibt auch *linke* G–Operationen und linke G–Mengen (wir werden später eine treffen—der wesentliche Unterschied ist in dem gerade formulierten Assoziativitätsgesetz: die Reihenfolge ist da anders). Mit den G–Mengen verhält es sich ähnlich wie mit dem Straßenverkehr. Obwohl es eigentlich irrelevant ist, ob man nun rechts fährt oder links, so braucht man doch eine Regelung.

Definition und Konstruktion. Sei H eine Untergruppe von G. Eine *linke Nebenklasse* von H in G ist eine Untermenge in G von der Art

$$Hg_1 \quad = \quad \{\, h\, g_1 \mid h \in H \,\}$$

wo g_1 ein (festes) Element aus G ist. Ist g ebenfalls ein Element aus G, so kann man die linke Nebenklasse Hg_1 *von rechts* mit dem Element g multiplizieren. Das Resultat ist wieder eine linke Nebenklasse (im allgemeinen eine andere),

$$(Hg_1) \cdot g \quad = \quad \{\, h\,(g_1 g) \mid h \in H \,\} \ .$$

Die *Menge der linken Nebenklassen von* H *in* G wird mit $H\backslash G$ bezeichnet. Durch die beschriebene Operation wird $H\backslash G$ zu einer rechten G–Menge.

Bemerkung. Die Notation $H\backslash G$ deutet an, daß diese Menge auch interpretiert werden kann als eine Menge von Äquivalenzklassen, die man aus G durch eine Äquivalenzrelation erhält; nämlich zwei Elemente von G werden als äquivalent angesehen, wenn sie durch linke Multiplikation mit einem Element aus H auseinander hervorgehen.

Definition. Sei M eine G–Menge, sei $m \in M$. Die *Standgruppe* (oder *Isotropiegruppe*) von m ist die Untergruppe G_m derjenigen Elemente in G, die das Element m festlassen,

$$G_m \quad = \quad \{\, g \in G \ \mid \ m \cdot g \, = \, m \,\} \ .$$

Beispiel. In der G–Menge $H\backslash G$ hat das Element $H1$ als Standgruppe die Untergruppe H. Auch die Standgruppe irgendeines anderen Elements Hg kann man sofort angeben: die Standgruppe G_{Hg} ist die (zu H) *konjugierte Untergruppe*

$$G_{Hg} \quad = \quad g^{-1}Hg \underset{\text{(Def)}}{=} \{\, g^{-1}hg \, \in G \ \mid \ h \in H \,\} \ .$$

Definition. Eine G–Menge N heißt *transitiv*, wenn je zwei Elemente aus N durch die G–Operation ineinander übergeführt werden können; d.h., wenn zu vorgegebenen n_1 und n_2 in N immer ein g in G existiert mit $n_1 \cdot g \, = \, n_2$.

Beispiel. Sei H Untergruppe von G. Die G–Menge $H\backslash G$ ist transitiv.

Satz und Definition. *Sei* M *eine* G*–Menge.* M *zerfällt in eindeutiger Weise in eine* (disjunkte) *Vereinigung transitiver* G*–Mengen, der sogenannten Bahnen* (oder *Orbiten*).

Beweis. Wir betrachten die Relation auf M,

$$m_1 \sim m_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, g \in G\,,\ m_1 \cdot g \, = \, m_2 \ .$$

Es ist klar (oder?), daß dies eine Äquivalenzrelation auf M ist. Die Äquivalenzklassen zu der Relation ergeben die behauptete Zerlegung. $\square$

Sind M und N zwei G–Mengen, so soll eine *G–Abbildung* zwischen diesen beiden (oder auch eine *Abbildung von G–Mengen*) eine Abbildung bezeichnen, die mit den jeweiligen Operationen verträglich ist; also eine Abbildung $\varphi : M \to N$, so daß, für alle $g \in G$,

$$\varphi(m \cdot g) \;=\; \varphi(m) \cdot g \ .$$

Wenn die M_i , $i \in I$, die Bahnen in M bezeichnen, so induziert φ , per Einschränkung, G–Abbildungen $\varphi_i : M_i \to N$. Umgekehrt werden solche G–Abbildungen $\varphi'_i : M_i \to N$ sich auch zusammensetzen zu einer G–Abbildung $\varphi' : M \to N$ (die nachzuprüfende Bedingung $\varphi(m \cdot g) = \varphi(m) \cdot g$ bereitet keine Probleme, weil eben $m \cdot g$ und m immer in ein- und derselben Bahn liegen). Schließlich gilt auch noch: wenn M' eine transitive G–Menge in M ist (also eine Bahn), dann ist das Bild $\varphi(M')$ schon ganz enthalten in einer transitiven G–Menge in N . Wegen dieser Dinge wird es genügen, daß wir in erster Linie die Abbildungen transitiver G–Mengen betrachten.

Satz. *Sei M eine transitive G–Menge. Sei $m \in M$, mit Standgruppe G_m . Es gibt eine G–Abbildung*

$$\varphi_{M,m} : \; G_m\backslash G \;\longrightarrow\; M \ ,$$

welche die linke Nebenklasse $G_m\,1$ auf das Element m abbildet. Die Abbildung ist eindeutig bestimmt. Die Abbildung ist ein Isomorphismus.

Beweis. Die Abbildung $\varphi_{M,m} : G_m\backslash G \to M$ ist definiert als $\varphi_{M,m}(\,G_m\, g\,) := m{\cdot}g$. Die Definition ist unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten $g \in G_m\, g$. Denn ist g' ein anderer Repräsentant, so ist $g' = h\, g$, wo $h \in G_m$, deshalb

$$m \cdot g' \;=\; m \cdot (h\, g) \;=\; (m \cdot h) \cdot g \;=\; m \cdot g \ .$$

Die Abbildung $\varphi_{M,m}$ ist eine G–Abbildung, denn es ist

$$\varphi_{M,m}(\,(G_m\, g) \cdot g'\,) \;=\; \varphi_{M,m}(\,G_m\, gg'\,) \;=\; m \cdot gg' \;=\; (m \cdot g) \cdot g' \;=\; \varphi_{M,m}(G_m\, g) \cdot g' \ .$$

Die Abbildung ist surjektiv, da M transitive G–Menge ist. Die Abbildung ist injektiv, denn wenn $G_m\, g_1$ und $G_m\, g_2$ dasselbe Bild haben, so haben auch $G_m\, g_1\, g_1^{-1}$ und $G_m\, g_2\, g_1^{-1}$ dasselbe Bild; das bedeutet, daß

$$m \cdot g_2\, g_1^{-1} \;=\; \varphi_{M,m}(\,G_m\, g_2\, g_1{}^{-1}\,) \;=\; \varphi_{M,m}(\,G_m\, g_1\, g_1{}^{-1}\,) \;=\; m \ ,$$

also ist $g_2\, g_1{}^{-1} \in G_m$ und daher $G_m\, g_1 = G_m\, g_2$. Als G–Abbildung ist die Abbildung eindeutig bestimmt wegen

$$\varphi_{M,m}(\,G_m\, g\,) \;=\; \varphi_{M,m}(\,(G_m\, 1) \cdot g\,) \;=\; \varphi_{M,m}(\,G_m\, 1\,) \cdot g \ .$$

Schließlich ist die Abbildung ein Isomorphismus. Denn da $\varphi_{M,m}$ eine bijektive Abbildung ist, gibt es zumindest eine Umkehrabbildung auf dem Mengen–Niveau (ohne Berücksichtigung der Bedingung, die eine *G–Abbildung* nach Definition zu erfüllen hat). Es ist aber klar (oder?), daß diese Bedingung automatisch erfüllt sein wird. $\square$

Satz. *Seien M und N transitive G–Mengen. Seien $m \in M$ und $n \in N$, mit Standgruppen G_m und G_n . Es existiert eine G–Abbildung $\varphi : M \to N$ mit $m \mapsto n$ genau dann, wenn die Standgruppe G_m enthalten ist in der Standgruppe G_n . Die Abbildung ist eindeutig bestimmt* (wenn sie existiert), *und sie ist surjektiv.*

Beweis. Wenn $\varphi : M \to N$ existiert, so ist $G_m \subset G_n$. Denn wenn $g \in G_m$, dann ist

$$n \cdot g \;=\; \varphi(m) \cdot g \;=\; \varphi(\, m \cdot g\,) \;=\; \varphi(m) \;=\; n \;,$$

also auch $g \in G_n$. Umgekehrt sei jetzt angenommen, daß $G_m \subset G_n$. Man kann jeder linken Nebenklasse von G_m diejenige linke Nebenklasse von G_n zuordnen, worin sie enthalten ist. Dies definiert eine Abbildung $q : G_m\backslash G \to G_n\backslash G$, und zwar eine G–Abbildung. Mit Hilfe der Isomorphismen aus dem vorigen Satz wird die gewünschte Abbildung φ definiert als die zusammengesetzte Abbildung

$$M \xrightarrow{\ \varphi_{M,m}{}^{-1}\ } G_m\backslash G \xrightarrow{\ q\ } G_n\backslash G \xrightarrow{\ \varphi_{N,n}\ } N \;.$$

Die Abbildung ist eindeutig bestimmt durch ihren Wert auf $m \in M$, da M transitive G–Menge ist. Die Abbildung ist surjektiv, da N transitive G–Menge ist (und da die Abbildung nicht–leeres Bild in N hat). □

Korollar. *Sei M eine transitive G–Menge. Seien m und n Elemente aus M . Es gibt einen Isomorphismus $M \to M$ mit $m \mapsto n$ genau dann, wenn m und n dieselbe Standgruppe haben. Der Isomorphismus ist eindeutig bestimmt* (wenn er existiert).

Beweis. Wenn der Isomorphismus existiert, so liefert der Satz (angewandt auf den Isomorphismus, sowie auf seine Umkehrung), daß $G_m \subset G_n$ und $G_n \subset G_m$; also $G_m = G_n$. Wenn diese Gleichheit umgekehrt nun angenommen wird, so liefert der Satz G–Abbildungen $\varphi : M \to M$ und $\psi : M \to M$ mit $\varphi(m) = n$ und $\psi(n) = m$. Die zusammengesetzte Abbildung $\psi \circ \varphi$,

$$M \xrightarrow{\ \varphi\ } M \xrightarrow{\ \psi\ } M \;,$$

ist dann eine G–Abbildung von M auf sich, die m auf m abbildet. Nach der Eindeutigkeitsklausel des Satzes folgt, daß $\psi \circ \varphi$ gleich der identischen Abbildung auf M ist. Ähnlich folgt, daß auch $\varphi \circ \psi$ gleich der identischen Abbildung ist. Also sind φ und ψ zueinander inverse Isomorphismen von M auf sich. □

Es bezeichne $\mathcal{A}_G(M)$ die Menge der G–Automorphismen von M (Isomorphismen von M auf sich, die G–Abbildungen sind). Unter der Komposition von Abbildungen ist dies eine Gruppe. Es stellt sich heraus, daß diese Gruppe vollständig beschrieben werden kann. Das notieren wir in den folgenden Sätzen. In einem (besonders wichtigen) speziellen Fall ist die Antwort besonders einfach:

Bezeichne $\overline{G}$ die Menge der linken Nebenklassen der trivialen Untergruppe in G . Mit anderen Worten, es handelt sich bei $\overline{G}$ um die unterliegende Menge von G , aufgefaßt als rechte G–Menge.

Satz. *Die Gruppe* $\mathcal{A}_G(\overline{G})$ *ist isomorph zu* G *selbst. Ein Isomorphismus ist gegeben durch die Abbildung*

$$G \longrightarrow \mathcal{A}_G(\overline{G})\ , \qquad g \longmapsto \alpha_g\ ,$$

wo $\alpha_g : \overline{G} \to \overline{G}$ *derjenige Isomorphismus ist* (er ist eindeutig bestimmt), *der das Element* $1 \in \overline{G}$ *abbildet auf das Element* $g \in \overline{G}$.

Beweis. Nach dem vorstehenden Korollar ist die Abbildung $g \mapsto \alpha_g$ eine Bijektion zwischen den Elementen von G einerseits und den Elementen von $\mathcal{A}_G(\overline{G})$ andererseits. Es ist noch nachzuprüfen, daß die Abbildung mit Komposition verträglich ist, daß also gilt

$$\alpha_{g_1 g_2} \;=\; \alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2}\ .$$

Die Rechnung

$$(\alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2})(1) \;=\; \alpha_{g_1}(\alpha_{g_2}(1)) \;=\; \alpha_{g_1}(g_2) \;=\; \alpha_{g_1}(1) \cdot g_2 \;=\; g_1 \cdot g_2 \;=\; g_1 g_2$$

zeigt, daß diese beiden Isomorphismen auf $1 \in \overline{G}$ denselben Wert annehmen. Es folgt, daß sie gleich sind. □

Was transitive G–Mengen angeht, so ist es keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, sich auf solche der Art $H\backslash G$ zu beschränken.

Es bezeichne $N(H)$ die Menge derjenigen Elemente $g \in G$, welche die Eigenschaft haben, daß die zu H konjugierte Untergruppe

$$g^{-1}Hg \underset{\text{(Def)}}{=} \{\, g^{-1}hg \in G \mid h \in H \,\}$$

in Wirklichkeit *dasselbe* ist wie die Gruppe H selbst. Es ist klar (oder?), daß die Menge $N(H)$ selbst eine Gruppe ist, der sogenannte *Normalisator* von H in G . Die Gruppe H ist als Untergruppe in $N(H)$ enthalten, und zwar als *normale Untergruppe* (alias *Normalteiler*); es existiert also die Quotientengruppe $N(H)/H$.

Satz. *Die Gruppe* $\mathcal{A}_G(H\backslash G)$ *ist isomorph zu* $N(H)/H$. *Ein Isomorphismus ist induziert durch die Abbildung*

$$N(H) \longrightarrow \mathcal{A}_G(H\backslash G)\ , \qquad g \longmapsto \alpha_g\ ,$$

wo $\alpha_g : H\backslash G \to H\backslash G$ *derjenige Isomorphismus ist* (er ist eindeutig bestimmt), *der das Element* $H1$ *von* $H\backslash G$ *auf das Element* Hg *abbildet.*

Beweis. Da $g^{-1}Hg$ die Standgruppe von Hg ist, ist die Bedingung “ $g \in N(H)$ ” gleichbedeutend damit, daß $H1$ und Hg dieselbe Standgruppe haben; daß also ein G–Isomorphismus von $H\backslash G$ auf sich existiert mit $H1 \mapsto Hg$. Dies ist, nach Definition, α_g . Es ist klar (oder?), daß α_g nur von der Restklasse von g in $N(H)/H$ abhängt. Daß die Abbildung $N(H)/H \to \mathcal{A}_G(H\backslash G)$ mit der Komposition verträglich ist, wird durch die im vorigen Beweis gegebene Rechnung gezeigt. □

Wir kommen jetzt zu der Übersetzung von *Überlagerungen* einerseits in G*–Mengen* andererseits. Die Übersetzung beruht auf der *Wege–Liftung*, die wir hier in der folgenden Form zitieren.

SATZ. *Sei* $p : E \to X$ *eine Überlagerung. Sei* $w : [0,1] \to X$ *ein Weg mit Anfangspunkt* x_0 *und Endpunkt* x_1 *. Es gilt:*

• w *induziert eine Abbildung* $w_* : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$ *; diese Abbildung hängt nur von der Homotopieklasse* (relativ zu Anfangs- und Endpunkt) *von* w *ab.*

• *Die Zuordnung* $w \longmapsto w_*$ *ist verträglich mit der Komposition von Wegen*; d.h. ist w' ein Weg von x_1 zu x_2 , so ist die zusammengesetzte Abbildung " *zuerst* w_* *, dann* w'_* " dasselbe wie die Abbildung $(ww')_*$, die von dem zusammengesetzten Weg ww' induziert ist.

• *Die Abbildung* w_* *ist eine Bijektion, und die zu* w_* *inverse Abbildung ist induziert von dem zu* w *inversen Weg* $\overline{w}$ *.*

BEWEIS. Die Abbildung w_* ist auf die folgende Weise definiert. Nach dem Wege–Liftungs–Satz existiert zu einem Punkt $y \in p^{-1}(x_0)$ ein (eindeutig bestimmter) geliftteter Weg $\widetilde{w}$ mit Anfangspunkt $\widetilde{w}(0) = y$; der Endpunkt $\widetilde{w}(1)$ dieses Weges ist, nach Definition, der Punkt $w_*(y)$. Der Homotopie–Liftungs–Satz sagt, daß eine Homotopie (relativ zu Anfangs- und Endpunkt) von Wegen in X liftet zu einer ebensolchen Homotopie in E ; insbesondere wird die Liftung des deformierten Weges denselben Endpunkt haben wie $\widetilde{w}$ auch.

Die Verträglichkeit mit der Komposition von Wegen liegt schlicht daran, daß man einen zusammengesetzten Weg in seinen Einzelteilen liften kann: zuerst wird der erste Teilweg zum vorgegebenen Anfangspunkt geliftet; danach dann der zweite Teilweg zu dem neuen Anfangspunkt (dem Endpunkt der Liftung des ersten Teilweges).

Der Weg $w\,\overline{w}$ ist *null-homotop* (= homotop, relativ Basispunkt, zum trivialen Weg). Nach den obigen Dingen gilt deshalb

$$\overline{w}_* \circ w_* \quad = \quad (w\,\overline{w})_* \quad = \quad Id_{p^{-1}(x_0)} \ .$$

Ähnlich ist auch $w_* \circ \overline{w}_* = Id_{p^{-1}(x_1)}$. □

BEMERKUNG. Der Satz sagt insbesondere, daß bei *weg–zusammenhängendem* X die *Blätterzahl* von $p : E \to X$ über allen Punkten von X dieselbe ist. Man ist somit berechtigt, von der *Blätterzahl der Überlagerung* zu reden. □

Für den nächsten Satz wird die folgende Begriffsbildung benötigt. Seien $p_1 : E_1 \to X$ und $p_2 : E_2 \to X$ Überlagerungen. Eine *Abbildung von Überlagerungen*

$$(p_1 :\ E_1 \to X) \quad \longrightarrow \quad (p_2 :\ E_2 \to X)$$

ist, nach Definition, eine Abbildung $f : E_1 \to E_2$, wo f eine *Abbildung über* X ist; d.h. wo $p_2 \circ f \ = \ p_1$.

Satz. *Sei* X *ein wegzusammenhängender Raum,* $x_0 \in X$ *. Bezeichne* G *die Fundamentalgruppe,* $G := \pi_1(X, x_0)$ *. Sei* $p : E \to X$ *eine Überlagerung.*

- *Das Urbild* $p^{-1}(x_0)$ *hat die Struktur einer rechten* G*–Menge.*

- *Die Weg–Zusammenhangskomponenten von* E *entsprechen den Bahnen dieser* G*–Menge; die Standgruppe von* $y \in p^{-1}(x_0)$ *ist gleich der Bildgruppe* $p_*(\,\pi_1(E, y)\,)$ *.*

- *Eine Abbildung von Überlagerungen* $(\,p_1 : E_1 \to X\,) \;\to\; (\,p_2 : E_2 \to X\,)$ *induziert eine Abbildung von* G*–Mengen* $p_1^{-1}(x_0) \;\to\; p_2^{-1}(x_0)$ *.*

Beweis. Für den Spezialfall geschlossener Wege w mit Anfangs- und Endpunkt x_0 sagt der vorige Satz, daß w eine Abbildung w_* von $p^{-1}(x_0)$ auf sich induziert, die nur von der Klasse $[w] \in \pi_1(X, x_0)$ abhängt. Dies definiert eine G–Operation, da, wie der Satz auch sagt, die von einer solchen Operation verlangten formalen Eigenschaften erfüllt sind.

Seien $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$. Wenn y_1 und y_2 durch die Operation auseinander hervorgehen, so heißt dies insbesondere, daß sie durch einen Weg verbindbar sind. Wenn umgekehrt v ein Weg von y_1 zu y_2 ist, so folgt (wieder aus der Definition der Operation), daß y_2 aus y_1 hervorgeht durch die Operation des von dem geschlossenen Weg $p \circ v$ repräsentierten Gruppenelements. Die weitere Behauptung, daß die Standgruppe von $y \in p^{-1}(x_0)$ dasselbe ist wie die Bildgruppe $p_*(\,\pi_1(E, y)\,)$, ist eine Umformulierung der uns schon bekannten Tatsache, daß ein geschlossener Weg an x_0 genau dann zu einem *geschlossenen* Weg mit Anfangspunkt y liftet, wenn das von ihm repräsentierte Element in der genannten Bildgruppe liegt.

Sei $f : E_1 \to E_2$ eine Abbildung über X . Sei w ein geschlossener Weg in X (am Basispunkt). Sei $y \in p_1^{-1}(x_0)$. Eine Liftung $\widetilde{w}$ von w zum Anfangspunkt y ergibt, nach Definition, als ihren Endpunkt das Ergebnis der Operation von w_* auf y . Dies $\widetilde{w}$ nun war eine Liftung nach E_1 ; es ist dann $f \circ \widetilde{w}$ eine Liftung von w nach E_2 , zum Anfangspunkt $f(y)$. Nach Definition der Operation von w_* auf $f(y)$ ist das Ergebnis (dieser Operation) gegeben durch den Endpunkt der Liftung $f \circ \widetilde{w}$. Andererseits ist besagter Endpunkt aber auch das Bild von $w_*(y)$ unter der Abbildung f . □

Wir betrachten speziell jetzt "vernünftige" Räume. Es sei daran erinnert, daß ein *semi–lokal einfach–zusammenhängender* Raum insbesondere auch *lokal wegzusammenhängend* ist. Ist er zusammenhängend, so ist er folglich auch weg–zusammenhängend.

Satz. X *sei ein zusammenhängender und semi–lokal einfach–zusammenhängender Raum. Sei* $x_0 \in X$ *und* $G = \pi_1(X, x_0)$ *. Seien* $p_1 : E_1 \to X$ *und* $p_2 : E_2 \to X$ *zwei Überlagerungen. Die Zuordnung*

$$\big(\,(\,p_1 : E_1 \to X\,) \xrightarrow{\;f\;} (\,p_2 : E_2 \to X\,)\,\big) \quad \longmapsto \quad \big(\,p_1^{-1}(x_0) \xrightarrow{\;f|p_1^{-1}(x_0)\;} p_2^{-1}(x_0)\,\big)$$

gibt eine $1:1$ *Beziehung zwischen*

- *Abbildungen von Überlagerungen* (von $p_1 : E_1 \to X$ zu $p_2 : E_2 \to X$) ,
- *Abbildungen von* G*–Mengen* (von $p_1^{-1}(x_0)$ zu $p_2^{-1}(x_0)$) .

Beweis. Das wird eine Konsequenz aus dem allgemeinen *Liftungs–Satz* sein. Wir müssen uns nur klar machen, daß wir uns auf ein Argument mit *zusammenhängenden* Räumen zurückziehen können.

Da E_1 lokal weg–zusammenhängend ist (weil ja X diese Eigenschaft, nach Voraussetzung, hat), ist E_1 die disjunkte Vereinigung seiner (Weg–)Zusammenhangskomponenten. Sei E eine Zusammenhangskomponente von E_1 . Der Durchschnitt $E \cap p^{-1}(x_0)$ ist nicht leer. Denn ist e irgendein Punkt in E , so kann man den Bildpunkt $p(e)$ durch einen Weg mit dem Basispunkt x_0 verbinden. Eine Liftung dieses Weges zum Anfangspunkt e produziert als ihren Endpunkt dann einen Punkt in $E \cap p^{-1}(x_0)$.

Es ist nun klar, daß die Abbildung $f : E_1 \to E_2$, als Abbildung über X , durch ihren Effekt auf $p^{-1}(x_0)$ schon festgelegt ist. Denn sei E eine Zusammenhangskomponente von E_1 , sei $y \in E \cap p^{-1}(x_0)$ (wir haben uns soeben von der Existenz eines solchen y überzeugt), dann sagt die Eindeutigkeitsklausel im Liftungs–Satz, daß die eingeschränkte Abbildung $f \,|\, E$ schon durch ihren Effekt auf dem Punkt y bestimmt ist.

Auch für die Frage der Existenz von f zu vorgegebenem Verhalten auf $p^{-1}(x_0)$ wird es genügen, eine einzelne Zusammenhangskomponente zu betrachten (denn um eine Abbildung auf einer disjunkten Vereinigung zu definieren, darf man die Abbildungen auf den einzelnen Komponenten beliebig vorgeben). Sei also E eine Zusammenhangskomponente von E_1 , sei $y \in (p_1|E)^{-1}(x_0)$. Nun ist f auf $p^{-1}(x_0)$ nicht schlicht als *Abbildung* vorgegeben, sondern vielmehr als *Abbildung von G–Mengen.* Das impliziert, wie wir wissen, eine Relation zwischen Standgruppen; es impliziert nämlich, *daß die Standgruppe am Punkt y enthalten ist in der Standgruppe am Punkt $f(y)$* . Wir können andererseits, wie wir wissen, die Standgruppen über die Fundamentalgruppe ausdrücken: die Standgruppe an y ist die Bildgruppe $(p_1|E)_*(\,\pi_1(E,y)\,)$, die Standgruppe an $f(y)$ ist die Bildgruppe $(p_2)_*(\,\pi_1(E_2, f(y)\,)\,)$. Unsere Voraussetzung ergibt somit die Relation

$$(p_1|E)_*(\,\pi_1(E,y)\,) \quad \subset \quad (p_2)_*(\,\pi_1(E_2, f(y)\,)\,) \ .$$

Das ist aber gerade die Voraussetzung, die der Liftungs–Satz akzeptiert, um zu garantieren, daß eine Abbildung $E \to E_2$ (über X) existiert, mit $y \mapsto f(y)$. Diese Abbildung nun können wir nehmen. Denn ihre Einschränkung auf $(p_1|E)^{-1}(x_0)$ hat das vorgegebene Verhalten. Das liegt daran, daß die konstruierte Abbildung $E \to E_2$ als Abbildung von Überlagerungen ja ihrerseits auch eine Abbildung von G–Mengen $(p_1|E)^{-1}(x_0) \to (p_2)^{-1}(x_0)$ induziert. Wir haben also nun *zwei* Abbildungen von G–Mengen, die auf einer transitiven G–Menge definiert sind und die an einem Punkt übereinstimmen; solche zwei Abbildungen sind aber gleich. $\square$

Zusatz zum Satz. *Die Abbildung von Überlagerungen $f : E_1 \to E_2$ (über X) ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die zugeordnete Abbildung von G–Mengen $p_1^{-1}(x_0) \to p_2^{-1}(x_0)$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Die eine Richtung ist klar: die Zuordnung $f \mapsto f\,|\,p_1^{-1}(x_0)$ ist *funktoriell* in dem Sinne, daß sie mit Komposition von Abbildungen verträglich ist und daß sie Identitäten respektiert; sie respektiert deshalb auch Isomorphismen.

Für die Umkehrung nehmen wir an, daß f eine Abbildung ist, so daß die zugeordnete Abbildung g von G–Mengen ein Isomorphismus ist. Die Behauptung ist, daß in dieser Situation die Abbildung f selbst auch schon ein Isomorphismus ist. Nun hat der Isomorphismus g eine inverse Abbildung g'. Die Abbildung g' ist nach dem vorigen Satz ebenfalls von einer Abbildung von Überlagerungen existiert, diese heiße f'. Wir zeigen jetzt, daß die Abbildung f' tatsächlich invers zur Abbildung f ist.

Die zusammengesetzte Abbildung $f' \circ f$ induziert die Abbildung von G–Mengen $g' \circ g$, die eine identische Abbildung ist (nach Voraussetzung). Das bedeutet, im Klartext, daß $f' \circ f$ eine Abbildung von Überlagerungen ist, *die das Urbild des Basispunktes $x_0 \in X$ festläßt.* Eine solche Abbildung ist aber notwendigerweise eine identische Abbildung (nach der Eindeutigkeitsklausel des allgemeinen Liftungs–Satzes, angewandt auf die Zusammenhangskomponenten). — Auf ähnliche Weise folgt, daß auch die zusammengesetzte Abbildung $f \circ f'$ eine identische Abbildung ist. □

Als die *Decktransformationenengruppe* einer Überlagerung $p : E \to X$ bezeichnet man die Gruppe der Isomorphismen $E \to E$ (über X).

Satz. *Der Raum X sei zusammenhängend und semi–lokal einfach–zusammenhängend. Sei $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Sei $p : \widetilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung. Die Decktransformationengruppe der universellen Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ ist isomorph zur Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Nach den vorigen beiden Sätzen ist diese Decktransformationengruppe isomorph zur G–Automorphismengruppe der G–Menge $p^{-1}(x_0)$ (wo $G = \pi_1(X, x_0)$). Bei dieser G–Menge handelt es sich um die *freie* transitive G–Menge; wo “frei” bedeutet, daß die Standgruppe jedes Punktes die triviale Gruppe ist — daß dies so ist, folgt aus der Identifikation der Standgruppe von $y \in p^{-1}(x_0)$ mit der Bildgruppe $p_*(\,\pi_1(\widetilde{X}, y)\,)$. Von dieser speziellen Automorphismengruppe haben wir aber oben ausgerechnet, daß sie zu G selbst isomorph ist. □

Bemerkung. Der Isomorphismus im vorangegangenen Satz ist *nicht* kanonisch; er ist nur kanonisch *bis auf innere Automorphismen.* Wir haben zwar oben einen Isomorphismus explizit angegeben; die Angabe dieses Isomorphismus benutzte aber zusätzliche Information (nämlich die Auswahl eines ausgezeichneten Punktes in der G-Menge).

Wir haben oben andererseits aber auch ein ganz bestimmtes Modell für die universelle Überlagerung kennengelernt (s. S. 98-99). Nämlich, wenn X ein “vernünftiger” Raum ist, dann ist ein Modell für die universelle Überlagerung $\widetilde{X}$ wie folgt beschreibbar: ein Punkt in $\widetilde{X}$ ist repräsentiert von einem Paar (x, v), wo x ein Punkt aus X ist und v ein Weg, der den Basispunkt x_0 mit dem Punkt x verbindet (x_0 ist der Anfangspunkt von v, und x ist der Endpunkt). Die Punkte in $\widetilde{X}$ sind dann die Äquivalenzklassen bezüglich der Relation, wo (x, v) und (x, v') als äquivalent angesehen werden, wenn v homotop ist, relativ zu Anfangs- und Endpunkt, zu v'. Kurz gesagt, ein Punkt in $\widetilde{X}$ besteht aus einem Punkt x in X zusammen mit einer Homotopieklasse von Wegen vom Basispunkt zu x. Die Abbildung $\widetilde{X} \to X$ für dieses Modell ist schlicht die "vergeßliche" Abbildung, die den Weg v vergißt. Ferner gibt es in diesem Modell einen ganz kanonischen Punkt über dem Basispunkt x_0, nämlich den Punkt in $\widetilde{X}$, der gegeben ist durch das Paar (x_0, x_0) (das zweite " x_0 " hier bezeichnet einen trivialen Weg). Und schließlich gibt es in diesem Modell auch eine ganz explizite Beschreibung der Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der universellen Überlagerung $\widetilde{X}$. Nämlich, wenn $[w] \in \pi_1(X, x_0)$, dann ist das Resultat der Operation von $[w]$ auf dem Punkt (x, v) gegeben durch den Punkt $[w]_*(x, v) := (x, wv)$ (wo wv den zusammengesetzten Weg " erst w, dann v " bezeichnet; dieser zusammengesetzte Weg existiert, da der Endpunkt von w, nämlich der Basispunkt x_0, ja auch der Anfangspunkt von v ist).

Auch die Beziehung zu den rechten G-Mengen ist ganz explizit angebbar. Nämlich in $\widetilde{X}$ haben wir die Menge $p^{-1}(x_0)$, die eine rechte G-Menge ist. Konkret besteht diese Menge aus denjenigen Punkten (x_0, w) in $\widetilde{X}$, bei denen w ein *geschlossener* Weg ist (also nicht nur der Anfangspunkt, sondern auch der Endpunkt von w ist gleich dem Basispunkt x_0). Durch Ignorieren von " x_0 " kann man diese Menge mit der unterliegenden Menge der Gruppe G identifizieren; wie früher wollen wir diese mit $\overline{G}$ bezeichnen. Wenn nun $g \in G$ und wenn β_g die zugehörige Decktransformation bezeichnet, so ist die Einschränkung von β_g auf $p^{-1}(x_0)$ ein Isomorphismus von rechten G-Mengen. Es ist klar (oder?), daß unter der Identifikation von $p^{-1}(x_0)$ mit $\overline{G}$ dieser Isomorphismus dann demjenigen Isomorphismus von $\overline{G}$ auf sich entspricht, der früher mit α_g bezeichnet worden ist (S. 110). □

Bemerkung. Eine Überlagerung $p : E \to X$ wird als *regulär* bezeichnet, wenn sie "maximale Symmetrie" besitzt; d.h. wenn zu je zwei Punkten über $x_0 \in X$ eine Decktransformation existiert, welche diese beiden Punkte aufeinander abbildet. Bezeichne wie vorher $G = \pi_1(X, x_0)$; sei $y \in E$ ein Punkt über x_0 und $H = p_*(\pi_1(E, y))$. Die Regularität der Überlagerung bedeutet, nach der durch die obigen Sätze gegebenen Übersetzung, daß je zwei Punkte der G-Menge $p^{-1}(x_0)$ dieselbe Standgruppe haben. Es kommen aber sämtliche Konjugierten von H tatsächlich als Standgruppen vor. Die Regularität bedeutet also, daß die Konjugierten von H alle zueinander gleich sind; das heißt, daß H eine *normale Untergruppe* in G ist (oder daß der Normalisator von H die ganze Gruppe G ist). Als Variante des vorangehenden Satzes bekommt man, daß die Decktransformationengruppe der regulären Überlagerung $p : E \to X$ isomorph ist zur Quotientengruppe G/H.

Bemerkung. Unter Verwendung der Decktransformationengruppe kann man die anderen Überlagerungen eines (vernünftigen) Raumes X direkt aus der universellen Überlagerung $p : \widetilde{X} \to X$ konstruieren. Sei $x_0 \in X$ und sei ein Punkt $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ gewählt, so daß man also in der beschriebenen Weise die Decktransformationengruppe mit der Fundamentalgruppe $G = \pi_1(X, x_0)$ identifizieren kann. Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann operiert auch H auf $\widetilde{X}$, und man kann somit einen Raum E definieren als den Quotienten bezüglich dieser Aktion (zwei Punkte aus $\widetilde{X}$ werden identifiziert, wenn sie durch die Operation eines Elements $h \in H$ auseinander hervorgehen; der entstehende Raum wird mit der Quotiententopologie versehen).

Es ist nun klar, daß die resultierenden Abbildungen $\widetilde{X} \to E$ und $q : E \to X$ Überlagerungsprojektionen sind; denn sei $U \subset X$ eine *Spezialumgebung* in dem früher definierten Sinn (S. 96), die auch noch offen sei (S. 101). Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist dann eine disjunkte Vereinigung von Mengen U_i , $i \in I$, deren jede zu U topologisch äquivalent ist (vermöge der Abbildung p). Die Indexmenge I ist isomorph zu der unterliegenden Menge von G (allerdings nicht in kanonischer Weise; um einen bestimmten solchen Isomorphismus auszuwählen, müßte man z.B. einen Weg von x_0 zu U zu wählen). Die Gruppe H operiert auf der Vereinigung der U_i indem sie die U_i schlicht permutiert. Der Quotientenraum nach der Operation von H ist wieder eine disjunkte Vereinigung von Kopien von U ; die Indexmenge ist gegeben durch die Menge der Äquivalenzklassen in I bezüglich der Operation von H .

Um schließlich zu sagen, um *welche* Überlagerung es sich bei $q : E \to X$ denn nun handelt, genügt die folgende Bemerkung: Das Urbild $p^{-1}(x_0)$ ist *in bestimmter Weise* mit der unterliegenden Menge von G identifiziert (wegen der Wahl des Punktes $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$). Bezüglich dieser Identifizierung operiert ein Element $h \in H$ auf G durch die *linke Multiplikation mit* h (vgl. die explizite Beschreibung auf S. 110). Es folgt, daß $p^{-1}(x_0)$ die G–Menge $H \backslash G$ ist. Oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn $e_0 \in E$ das Bild von $\widetilde{x}_0$ bezeichnet, so ist die Bildgruppe $q_*(\,\pi_1(E, e_0)\,)$ gerade die Gruppe H selbst. $\square$

Wie wir zum Schluß noch anmerken wollen, so hat die Theorie der Überlagerungen auch einen "numerischen" Aspekt. Sie taugt nämlich dazu, Fundamentalgruppen in einigen Fällen wirklich auszurechnen. Das liegt daran, daß es bei einer Decktransformationenen-gruppe durchaus offensichtlich(!) sein kann, um welche Gruppe es sich denn nun handelt.

Beispiel. Die 1–Sphäre S^1 hat als Überlagerung die Gerade $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ einfach–zusammenhängend ist, handelt es sich hier um die universelle Überlagerung. Die Decktransformationenengruppe ist $\mathbb{Z}$, die Gruppe der ganzen Zahlen (mit der Addition als Verknüpfung). Über den Isomorphismus von "Decktransformationenengruppe der universellen Überlagerung" einerseits und "Fundamentalgruppe" andererseits erhalten wir somit einen anderen Beweis für die uns schon bekannte Tatsache, daß $\pi_1(S^1, s_0) \approx \mathbb{Z}$.

Beispiel. Die projektive Ebene RP^2 hat als Überlagerung die 2–Sphäre S^2 . Da S^2 einfach–zusammenhängend ist, handelt es sich hier um die universelle Überlagerung. Die Decktransformationenengruppe ist die (zyklische) Gruppe der Ordnung 2 (das nicht–triviale Element ist die Antipoden-Abbildung). Die Fundamentalgruppe von RP^2 ist also die Gruppe der Ordnung 2 .